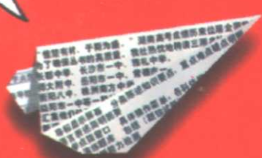
根据教育部推行的最新全日制普通中学教材编写

代数 高二

同步新课堂

主编 陈 峰



湖南教育出版社
中南大学出版社

同步新课堂

主　编 陈　峰

副主编 黄仁寿　周　辉　丁玉斌

编　著 涂立奇　黄仁寿　丁玉斌

刘光文　周　辉　郑时来　孟建华

高二代数

湖南教育出版社

中南大学出版社

同步新课堂
高二代数
主　　编：陈　峰
责任编辑：胡　旺
湖南教育出版社
中南大学出版社 出版发行
湖南新华书店经销　湘潭县人民印刷厂印刷
880×1230　32开　印张：7.75　字数：300,000
2001年7月第1版　2001年7月第1次印刷
ISBN 7-5355-3431-7/G·3426
定　价：8.80元
本书若有印刷、装订错误，可向承印厂调换
厂址：湘潭市城正街250号　电话：8393986

领你走进《同步新课堂》

社会发展到今天，已经越来越突出地呈现出现代性。对教育而言，表现为对人的要求愈来愈高。正如对未来研究极富权威的“罗马俱乐部”总裁奥雷列奥·佩西在他的报告《未来一百年》中所说：“无论从哪个角度去提示未来，有一点必须首肯——未来是以个人素质全面发展为基础的社会。”在人民教育走过五十几个年头的时候，有识之士已经传来呼声：社会主义市场经济体制的建立和现代化的实现，最终取决于国民素质的提高和人才的培养；并且为之付诸实践。的确，一个国家的前途，不取决于它的国库之殷实，不取决于它的城堡之坚固，也不取决于它的公共设施之华丽，而在于它的公民的文明素养，即在于人们所受的教育，在于人们的远见卓识和品格的高下，简言之，在于人的素质。人的素质是国家、集体乃至个人在发展竞争中能否获得持久优势的关键。素质来自于教育，可以这样说：素质教育，是现代化的基石。

中学教育正在朝着素质教育方向不断发展，我们想，优秀素质的培养必须建立在对过去的积累温习，对现实的认识和对未来的设想上；必须通过一定形式来检测验证。所以必要的应试，恐怕是不能缺少的，但是必须科学规范，符合教育规律，符合社会需求，有利于社会发展。新大纲的颁发，新教材的使用，课堂新思路的探觅，尤其是 3+x 高考模式的出现，都是这一改革形势的具体表现。我们理当充分重视这一切，迎着浪潮，做一个弄潮志士吧！《同步新课堂》就是见证。

《同步新课堂》是一套教师教学、学生自学、家长辅导的高质量的助学丛书。在通往大学殿堂的路上，有春致秋景的招引，但也留存崎岖坎坷。它需要有暴霜露、斩荆棘的胆与识，但好风凭借力，有成就的人无不是善假于物的智者。所以，选择科学有效的助学书籍，是中学生将理想变为现实的阶梯，是由此岸抵达彼岸的船桨。但是，这需要有一双慧眼。我们应以培养创新精神和综合素质的观念来挑选帮助自己解惑答疑、巩固强化

的教学资料,具体地说,选择助学书籍着眼点在于它写什么,即材料内容;写得怎样,即编写艺术;怎么写的,即编写方法。留心这三个方面,精心揣摩,才能明白其真谛,从而作出正确评价,选择到上乘的助学书。

《同步新课堂》编写了什么?

依据素质教育的要求,近年来中学教育有两件大事:一是新高考,一是新教材。新高考这根指挥棒在导向综合素质和创新精神,新教材则在提供综合素质和创新精神的途径手段。《同步新课堂》将新高考和新教材交融一块,产生了这个兼济彼此的产品。它涉及到初中和高中的语文、数学、英语、物理、化学、生物六个学科。它以基础和能力为主线,以新考纲和新教材为背景,编写了教学目标、点拨方法、疑难释解、名题讲析、学科文化视角、厚实新颖的练习和创新能力检测,真正做到了内容夯实、材料新颖、合纲合本、形神兼备。

《同步新课堂》编写得怎样?

一言以蔽之,既科学又艺术。这套丛书以独创电脑视窗模式为纵轴,以课堂节奏的律谱为横轴,将多媒体的流水线与课堂的学习节拍结合,纵横交错,网络密集,延伸得有章有法。它循纲而发,依本而行,同步教材而又不拘纲本;源于文本而又高于文本。它比较同类的"同步辅导书",方法性、新颖性、可读性、效果性更强。它突出同种异类的比较,解题思路的激活,推理过程的活化,思维品质的提高。它选择启发性强又有新意的各类练习题进行思路方法训练,并按"基础、提高、创新"的梯度进行合理安排。在名题讲析中,它强调分析问题的思路及推理过程,注意典型错误的化解,帮助学生学会运用知识、掌握正确的学习方法和解题技巧,提高分析问题、解决问题的能力。它注意了不同的阅读方法和解题方法,多文比较,一题多解,题目变形、扩展和引申。它重视学生视野的开拓、学习兴趣的培养,学习原动力的激发。它以特别的栏目来作艺术的表现,像各学科在"导学点拨窗口"这个大栏目中,分别设有【风景剪辑】、【漫游物理世界】、【新视角揽胜】、【视野聚焦】等,显现出了新颖、有趣、可读的优势。

《同步新课堂》怎么编写?

"惟楚有材,于斯为盛。"湖湘文化的阳光是充足的,水分是充沛的,土

壤是肥沃的。她哺育的学子，从来就有一股不屈和奋进，流淌的血液里永远都活跃着争一流的基因。她的兴盛从来就潜在地向世人透着一种文化的智慧。这种智慧呈现于教育的长廊里，熠熠闪亮。《同步新课堂》就是这种智慧的最直接表现。它的撰写者是三湘名校——长郡中学、长沙市一中、湖南师大附中、雅礼中学、岳阳市一中、常德市一中、衡阳市八中、益阳市一中、石门县一中、株洲南方中学和省市教育科学研究所的一批特级高级教师、优秀教研员。它汇集了他们处理新教材的新理念，设计新课堂的新思路，以及训练测试的新模式；它是仰仗他们多年在教育一线上的教学科研能力，重新构建、整合而成的新生代。《同步新课堂》历经过严密的教育教学的观察实验和严格的逻辑推理；对其材料与方法、讲析与训练都做过去伪存真、去粗取精、由此及彼、由表及里的筛选工作；它准确地找到了素质与创新之间的相互关系和作用，对教与学的互化思路、因果变化，形成了规律性的教育认识。它的材料运用丰富全面，事例解说客观求实，训练实践举一反三，结论重复可比、逻辑严密。

《同步新课堂》的“导标显示屏幕”，是一张知识网络的交通图。通过屏幕告诉你学什么，考什么，这就是你教或学的一本谱。“导学点拨窗口”，各学科设栏同中有异，相当一位资深的导游——知识渊博，能力极强，可以领你进入知识宝库，获取知识的滋润。“能力演练题库”按“跟踪试题”、“提高试题”、“创新试题”三个档次拉开梯度，起点基础，路线正确，目标高远，为你提供了一个科学的训练基地。你从基础起步，尽最快的速度攀升，可直达能力发展的高峰。“创新能力检测”是为你设置的、以一个章节或单元为基本单位的、以高考或中考的试卷分值和新颖精典厚实的试题为手段的检验室。走过这个检验室，让你心中有数，胸有成竹。

读《同步新课堂》，可以让你尽情吸吮“新课堂”中的缤纷景致、甘泉琼浆，你一定会满载而归。请认准向你招手的丛书“卡通同龄”符号。祝愿你书到功成。

《同步新课堂》丛书编写组

2001 年 6 月

目 录

第五章　不等式

5.1　不等式的概念与不等式的性质

导析显示屏幕

【学习目标】

掌握实数之大小比较的依据：$a>b \Leftrightarrow a-b>0$，$a=b \Leftrightarrow a-b=0$，$a<b \Leftrightarrow a-b<0$. 能运用实数大小比较的依据将比较大小问题转化为研究两式差的符号问题．能系统地掌握不等式的性质，培养逻辑思维能力．

【高考热点】

考查不等式的基本性质及运用，且多以填空选择题的形式出现．而在不等式解法、证明、及应用中，性质得到更广泛的运用．

导学点拨窗口

【学法领航】

1. 不等式的性质主要有：

对称性：$a>b \Longleftrightarrow b<a$.

传递性：若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.

加法单调性：若 $a>b$，则 $a+c>b+c$.

乘法单调性：若 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$；

若 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$.

开方法则：若 $a>b>0$，则$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n\in N$, $n>1$).

2. 性质的拓展：

移项法则：若 $a+c>b$，则 $a>b-c$.

同向不等式可加：若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$.

异向不等式可减：若 $a>b$，$c<d$，则 $a-c>b-d$ 或者 $c-a<d-b$.

同向正号不等式可乘：若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd>0$.

异向正号不等式可除：若 $a>b>0$，$0<c<d$，则$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}>0$ 或 $0<\frac{c}{a}<\frac{d}{b}$.

乘方法则：若 $a>b>0$，则 $a^n>b^n>0$. 若 $a>b$，则 $a^{2n+1}>b^{2n+1}$($n\in N$).

倒数法则：若 a、b 同号，且 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

3．在运用不等式的性质证明问题时，要注意步步有理（即有定理或推论作为依据）.

【网络建构】

$\boxed{\text{实数的大小理论}} \xrightarrow{\text{发展}} \boxed{\text{不等式的性质定理}} \xrightarrow{\text{拓展}} \boxed{\text{不等式性质的推论}}$

【方法拾掇】

1．运用性质判定或证明有关问题：

例 1 （93 全国高考题）若 a，b 是任意实数，且 $a>b$，则 （　　）

A. $a^2>b^2$　　　　B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$　　　　D. $\left(\frac{1}{a}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

解 ∵ $a>b$ 并不保证 a、b 为正数，而 A、B 不一定成立，又 $a>b$，仅 $a-b>0$，不能保证 $a-b>1$，即不能保证 $\lg(a-b)>0$，故 C 不一定成立，故应选 D.

例 2 若 $a>b$，且 a、b 同号，求证：$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

证明：∵ a、b 同号，∴ $\frac{1}{ab}>0$，

而 $a>b$，故 $a\cdot\frac{1}{ab}>b\cdot\frac{1}{ab}$，

即 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，也就是 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

2．运用性质求代数式的值之范围．

例 3 设 $60<a<84$，$28<b<33$，求 $a-b$，$\frac{a}{b}$ 的取值范围．

解 ∵ $60<a<84$，$28<b<33$，

则 $33>b>28$；

∴ $27<a-b<56$.

又 $\frac{1}{33}<\frac{1}{b}<\frac{1}{28}$，

∴ $\frac{20}{11}<\frac{a}{b}<3$.

故 $a-b$ 之范围是 $(27,56)$，$\frac{a}{b}$ 之范围是 $\left(\frac{20}{11},3\right)$.

例 4 若 $a>0$，$a\neq1$，$M=\log_a(a^3+1)$，$N=\log_a(a^2+1)$．试比较 M、N 之大小如何？

解 作差 $M-N=\log_a(a^3+1)-\log_a(a^2+1)=\log_a\frac{a^3+1}{a^2+1}$.

(1) $a>1$ 时，$\frac{a^3+1}{a^2+1}>1$，则 $M>N$.

(2) $0<a<1$ 时，$0<\frac{a^3+1}{a^2+1}<1$，则 $M>N$.

故 在 $0<a<1$ 或 $a>1$ 时，均有：$M>N$.

说明：运用实数之大小理论来比较两数之大小，常采用作差之方法．

【能力发展】

关于不等式的同解变形．

所谓不等式的同解变形，即对不等式施行变形时，其解集保持不变．如运用不等式性质中的对称性、加法之单调性、乘法的单调性、开方法则采用的变形，都是同解变形．而运用同向不等式可以相加或异向不等式两边可以相减的变形，往往不是同解变形，多次使用这种变换往往将扩大代数式中未知数的取值范围．

例 4 设 $f(x)=ax^2+bx$，且 $-1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(-2)$ 的取值范围．

解 设 $f(-2)=mf(-1)+nf(1)=m(a-b)+n(a+b)$
$=(m+n)a+(n-m)b$.

又∵ $f(x)=ax^2+bx$，

∴ $f(-2)=4a-2b$.

比较可知 $\begin{cases} m+n=4, \\ n-m=-2. \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} m=3, \\ n=1. \end{cases}$

即 $f(-2)=3f(-1)+f(1)$.

∵ $-3\leqslant 3f(-1)\leqslant 6$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，

∴ $-1\leqslant f(-2)\leqslant 10$，即 $f(-2)$ 范围为 $[-1,10]$.

另解 ∵ $f(-2)=4a-2b$，

又由 $-1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，∴ $-1\leqslant a-b\leqslant 2$. ①

而 $2\leqslant f(1)\leqslant 4$，∴ $2\leqslant a+b\leqslant 4$. ②

①+②，则 $1\leqslant 2a\leqslant 6$，即 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 3$. ③

由②得：$-4\leqslant -a-b\leqslant -2$. ④

①+④得：$-5\leqslant -2b\leqslant 0$，即 $0\leqslant b\leqslant \frac{5}{2}$. ⑤

由③、⑤可得：$2\leqslant 4a\leqslant 12$，
$-5\leqslant -2b\leqslant 0$.

∴ $-3\leqslant 4a-2b\leqslant 12$，即 $-3\leqslant f(-2)\leqslant 12$.

此范围与解法 1 之答案 $-1\leqslant f(-2)\leqslant 10$ 比较，明显偏大．因此，在求解此类范围问题时，应尽量减少不等式多次相加、相减之变换，而采用等式变形代之．

例 5 已知：$-1\leqslant a+b\leqslant 1$，$1\leqslant a-2b\leqslant 3$，

求 $a+3b$ 的取值范围．

解 设 $a+3b=k_1(a+b)+k_2(a-2b)=(k_1+k_2)a+(k_1-2k_2)b$.

比较系数，$\begin{cases} k_1+k_2=1, \\ k_1-2k_2=3. \end{cases}$ 解之：$\begin{cases} k_1=\dfrac{5}{3}, \\ k_2=-\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

而 $-1\leqslant a+b\leqslant 1$，∴ $-\dfrac{5}{3}\leqslant\dfrac{5}{3}(a+b)\leqslant\dfrac{5}{3}$.

由 $1\leqslant a-2b\leqslant 3$，∴ $-2\leqslant-\dfrac{2}{3}(a-2b)\leqslant-\dfrac{2}{3}$.

两式相加，得：$-\dfrac{11}{3}\leqslant a+3b\leqslant 1$.

能力演练题库

【跟踪试题】

一、选择题

1．已知 $a<b<0$，则有 （　　）

A．$a^2<ab<0$　　B．$a^2>ab>b^2$

C．$a^2<b^2<0$　　D．$b^2>a^2>0$

2．已知 $a+b>0$，$b<0$，那么 a、b、$-a$、$-b$ 的大小关系为 （　　）

A．$a>b>-b>-a$　　B．$a>-b>-a>b$

C．$a>-b>b>-a$　　D．$a>b>-a>-b$

3．a、b、c、$d\in R$，且 $ab>0$，$-\dfrac{c}{a}<-\dfrac{d}{b}$，则下列各式恒成立的是 （　　）

A．$bc<ad$　　B．$bc>ad$

C．$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$　　D．$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}$

4．不等式 $(2a+7)x>a+3$ 与 $x>-\dfrac{a+3}{2a+7}$ 同解，则 （　　）

A．$a<-\dfrac{7}{2}$　　B．$-\dfrac{7}{2}<a<3$

C．$a=-3$　　D．$a>-3$

二、填空题

5．若 $b>0$，则 $\dfrac{a}{b}$____$\dfrac{a-1}{b}$．(用不等号填空)

6．角 α、β 满足 $-\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\alpha-\beta$ 的取值范围是________．

7．已知 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $\dfrac{1}{ac}$ 与 $\dfrac{1}{bd}$ 的大小关系是________．

三、简答题

8．已知 a，b 为非零实数，且 $a>b$，试比较 $\dfrac{1}{a}$ 与 $\dfrac{1}{b}$ 的大小．

9．用不等式性质证明：若 $a>b>0$，$d<c<0$，则$\frac{\sqrt{a}}{c}<\frac{\sqrt{b}}{d}$.

10．若 $a\geqslant 1$，试比较 $M=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$和$N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$的大小．

【提高试题】

一、选择题

1．若 $a>b$，$c>d$，则一定有 （　　）

A．$c>d+a-b$　　B．$b>c+d-a$

C．$d>a+b-c$　　D．$a>b-c+d$

2．若 a、$b\in R$ 且$a>b$，则一定有 （　　）

A．$a+c\geqslant b-c$　　B．$ac\geqslant bc$

C．$(a-b)c^2\geqslant 0$　　D．$\frac{c^2}{a-b}>0$

3．若 a、b 是任意实数，且 $a>b+1$，则 （　　）

A．$a^2>b^2$　　B．$\frac{a}{b}>1$

C．$\lg(a-b)>0$　　D．$\lg a>\lg b$

4．已知 $m<n<0$，下列不等式正确的是 （　　）

A．$m^2<n^2$　　B．$\frac{m}{n}<1$

C．$m<4-n$　　C．$\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$

5．设 a、$b\in R$，有以下四个命题：

①$a<b<c\Rightarrow a^2<b^2$；　　②$ac^2>bc^2\Rightarrow a>b$；

③$\frac{a}{b}<c\Rightarrow a<bc$；　　④$a<b<0\Rightarrow\frac{b}{a}<1$

其中正确的命题是 （　　）

A．①④　　B．②④　　C．②③　　D．③④

6．以下四个命题正确的是 （　　）

①$m>0\Rightarrow m^2>m$，　　②$m<0\Rightarrow m^2>m$

③$m^2>m\Rightarrow m>1$　　④$m^2<m\Rightarrow m<1$

A.①　　B.②　　C.①③　　D.②④

7．对于 $x\in[0,1]$的一切值，$a+2b>0$ 是使 $ax+b>0$ 恒成立的 （　　）

A．充分必要条件　　B．必要非充分条件

C．充分非必要条件　　D．既不充分也不必要条件

8．已知 $x>y>z$，且 $x+y+z=0$，则下列不等中成立的是 （　　）

A．$xy<xz$　　B．$xz>yz$

C．$xy>xz$　　D．$x|y|>z|y|$

二、填空题

9. 若 $-1<a<b<0$，则 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，a^2，b^2 按从小到大排列为__________.

10. 若 $c>a>b>0$，则 $\frac{a}{c-a}$ 与 $\frac{b}{c-b}$ 的大小关系是__________.

11. 若 $1<\alpha<3$，$-4<\beta<2$，那么 $\alpha-|\beta|$ 的取值范围是__________.

12. 设 $a>b>0$，$m>0$，$n>0$，则 $\frac{b}{a}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{b+m}{a+m}$，$\frac{a+n}{b+n}$ 之大小关系是__________.

三、解答题

13. 若 $1<x<10$，$a=(\lg x)^2$，$b=\lg x^2$，$c=\lg\lg x$ 确定 a、b、c 的大小顺序．

14. 已知 $f(x)=ax^2-c$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，求 $f(3)$ 的取值范围．

15. 若函数 $y=a^x-1$ 的值域为 $(0,+\infty)$，其反函数记为 $f(x)$，试比较 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ 与 $f(x_1+x_2+x_3)$ 的大小．

【创新试题】

1. 已知：$a>b>c$，且 $a+b+c=0$，则函数 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的位置关系是 ( )

A. 相交　　B. 相切

C. 相离　　D. 以上均可能

2. 若 x、y、z 均为大于 -1 的负数，则一定有 ( )

A. $x^2+y^2-z^2<0$　　B. $xyz>-1$

C. $x+y+z<-3$　　D. $(xyz)^2>1$

3. 已知 $f(x)=(x-a)(x-b)-2$，并且 α、β 是方程 $f(x)=0$ 的两根，则实数 a、b、α、β 的大小关系可能是 ( )

A. $\alpha<a<b<\beta$　　B. $a<\alpha<\beta<b$

C. $a<\alpha<b<\beta$　　D. $\alpha<a<\beta<b$

【参考答案】

跟踪试题答案

一、选择题

1.B　2.C　3.B　4.C

二、填空题

5.>　6. $(-\pi,0)$　7. $\frac{1}{ac}<\frac{1}{bd}$

三、简答题

8. ∵ $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，

而 $a>b$，$b-a<0$，

当 $ab<0$ 时，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；

当 $ab>0$ 时，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

9. $\because\ a>b>0$，$\therefore\ \sqrt{a}>\sqrt{b}>0$． ①

又 $d<c<0$，$\therefore -d>-c>0$，$0<\frac{1}{-d}<-\frac{1}{c}$．

则有：$-\frac{1}{c}>\frac{1}{-d}>0$． ②

①×② 得：$\frac{\sqrt{a}}{-c}>\frac{\sqrt{b}}{-d}>0$，

即 $\frac{\sqrt{a}}{c}<\frac{\sqrt{b}}{d}$．

10. $\because\ M-N=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})-(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}<0.$$

$\therefore\ M<N$．

提高试题答案

一、选择题

1.D 2.C 3.C 4.C 5.B 6.B 7.B 8.C

二、填空题

9. $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<b^2<a^2$ 10. $\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$ 11. $(-3,3)$ 12. $\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}<\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$

三、解答题

13. $\because\ 1<x<10$，$a-b=(\lg x)^2-\lg x^2=\lg x\cdot(\lg x-2)<0$，

又 $0<\lg x<1$ 则 $a-c=(\lg x)^2-\lg\lg x>0$，

$\therefore\ b>a>c$．

14. $\because\ \begin{cases}a-c=f(1),\\4a-c=f(2)\end{cases}$ $\therefore\ \begin{cases}a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)],\\c=-\frac{4}{3}f(1)+\frac{1}{3}f(2).\end{cases}$

而 $f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$，

又 $-1\leqslant f(2)\leqslant 5$．

$\therefore\ -\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}$．

又 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，则 $\frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant\frac{20}{3}$．

$\therefore$ 由两式相加，得 $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$．

15. $\because\ y=a^x-1$ 的值域为 $(0,+\infty)$，

$\therefore$ 其反函数 $f(x)=\log_a(1+x)$，$x\in(0,+\infty)$．

又 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$

$=\log_a(1+x_1)+\log_a(1+x_2)+\log_a(1+x_3)$

$=\log a(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)$，其中 x_1、x_2、$x_3\in(0,+\infty)$．

而 $f(x_1+x_2+x_3)=\log_a(1+x_1+x_2+x_3)$，

又 $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)-(1+x_1+x_2+x_3)$

$=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2x_3>0$，

$\therefore$ $a>1$ 时：

$\log_a(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)>\log_a(1+x_1+x_2+x_3)$；

$0<a<1$ 时：

$\log_a(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)<\log a(1+x_1+x_2+x_3)$．

即 $a>1$ 时，$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)>f(x_1+x_2+x_3)$；

$0<a<1$ 时，$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)<f(x_1+x_2+x_3)$．

创新试题答案

1.A 2.B 3.A

5.2 基本不等式

导标显示屏幕

【学习目标】

掌握基本不等式及推论，能运用基本不等式求最值并解决有关应用问题．培养运算能力及解决实际问题的能力．

【高考热点】

用基本不等式证明有关不等式，用基本不等式求函数的最值或确定参变量的范围，用基本不等式解决实际问题均是高考热点．

导学互探窗口

【学法领航】

1．基本不等式包括如下内容：

(1) 若 a、$b\in R$，则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，当且仅当"$a=b$"时取"="．

(2) 若 a、$b\in R^+$，则 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当且仅当"$a=b$"时取"="．

(3) 若 a、b、$c\in R^+$，则 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$，当且仅当 $a=b=c$ 时取"="号．

(4) 若 a、b、$c\in R^+$，则 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，当且仅当 $a=b=c$ 时取"="号．

2．基本不等式的有关推论：

(1) 若 a、$b\in R^+$，且 ab 为定值，则有

$a+b\geqslant2\sqrt{ab}=$定值，且当 $a=b$ 时，$a+b$ 取最小值．

(2) 若 a、$b\in R^+$，且 $a+b$ 为定值，则有

$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$定值，当 $a=b$ 时，ab 取最大值．

(3) 当 a、b、$c\in R^+$ 时，类似于(1)、(2)，abc 为定值，则 $a+b+c$ 有最小值；$a+b+c$ 为定值，则 abc 有最大值．

3．运用基本不等式求最值，要特别注意取等号之条件．其中常用"凑配"、"变形"之手法．

【网络建构】

实数大小理论 $\xrightarrow{\text{导出}}$ 基本不等式 $\xrightarrow{\text{导出}}$ 基本不等式的推论

【方法拾掇】

1．运用基本不等式求函数的最值

例 1 当 $x>0$ 时，$3-3x-\frac{4}{x^2}$ 的最大值是 (　　)

A. 5　　B. 6　　C. $3-3\cdot\sqrt[3]{9}$　　D. 不存在

解 $3-3x-\frac{4}{x^2}=3-\frac{3x}{2}-\frac{3x}{2}-\frac{4}{x^2}=3-\left(\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{x^2}\right)$.

而 $\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{x^2}\geqslant3\cdot\sqrt[3]{\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{4}{x^2}}=3\cdot\sqrt[3]{9}$.

当 $\frac{3x}{2}=\frac{4}{x^2}$，即 $x^3=\frac{8}{3}$，$x=\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{9}$ 时取等号，即 $\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{x^2}$ 取最小值 $3\cdot\sqrt[3]{9}$，

$\therefore$ $3-3x-\frac{4}{x^2}$ 取最大值 $3-3\cdot\sqrt[3]{9}$，

应选 C.

例 2 求函数 $y=x^2(2-5x)\ \left(0<x<\frac{5}{2}\right)$ 的最大值．

解 $\because$ $0<x<\frac{5}{2}$，$\therefore$ $\frac{5}{2}x>0$，

故 $y=x^2(2-5x)=\frac{4}{25}\left(\frac{5}{2}x\right)\left(\frac{5}{2}x\right)(2-5x)$

$\leqslant\frac{4}{25}\cdot\left[\frac{\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}x+(2-5x)}{3}\right]^3=\frac{32}{675}$.

当 $\frac{5}{2}x=2-5x$，即 $x=\frac{14}{15}$ 时，

y 取最大值 $\frac{32}{675}$.

说明：例 1、例 2 的"配凑"有所不同，例 1 中配出和为定值，例 2 中配出和为定值．特别应注意的是两例取等号之条件．

例 3　已知正数 x、y 满足 $x+2y=1$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为______．

解　$\because$　x、y 为正数，且 $x+2y=1$，

$$\therefore\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+2y}{x}+\frac{x+2y}{y}=3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=3+2\sqrt{2}.$$

当且仅当 $\frac{x}{y}=\frac{2y}{x}$，即 $x=\sqrt{2}y$，且 $x+2y=1$.

即 $(2+\sqrt{2})y=1$，$y=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 时，

$y_{\min}=3+2\sqrt{2}$.

说明：此例运用 $1=x+2y$ 反代，从而将 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 化为可直接运用基本不等式的式子．

2．运用基本不等式证明不等式的有关问题

例 4　设 a、b、$c\in R^{+}$，证明：

$$3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)\geqslant 2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right).$$

证明：$\because$　$3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)-2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)$

$$=(a+b+c-3\cdot\sqrt[3]{abc})-(a+b-2\sqrt{ab})$$
$$=c+2\sqrt{ab}-3\cdot\sqrt[3]{abc}$$
$$=c+\sqrt{ab}+\sqrt{ab}-3\cdot\sqrt[3]{abc}$$
$$\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{c\cdot\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}}-3\cdot\sqrt[3]{abc}=3\cdot\sqrt[3]{abc}-3\cdot\sqrt[3]{abc}=0,$$
$$\therefore\quad 3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)\geqslant 2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right).$$

说明：此例运用了实数大小理论 $A-B\geqslant 0\Leftrightarrow A\geqslant B$ 以及均值不等式．

例 5　在某两个正数 x、y 之间，若插入一个数 a，使 x，a，y 成等差数列；若插入两个数 b、c，使 x，b，c，y 成等比数列，求证：$(a+1)^2\geqslant(b+1)(c+1)$.

证明　由等差、等比数列的定义，

$$得\begin{cases}2a=x+y,\\ b^2=cx,\\ c^2=by.\end{cases}$$

用 x、y 表示 a、b、c，解得，