傅里叶分析及其应用

潘文杰 编著

北京大学出版社

傅里叶分析及其应用

潘文杰　编著

北 京 大 学 出 版 社
·北　　京·

图书在版编目(CIP)数据

傅里叶分析及其应用/潘文杰编著. —北京:北京大学出版社,2000.5

ISBN 7-301-04384-8

Ⅰ. 傅… Ⅱ. 潘… Ⅲ. 傅里叶分析-高等学校-教材

Ⅳ. D174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 66708 号

书　　　名:傅里叶分析及其应用

著作责任者:潘文杰　编著

责 任 编 辑:刘　燕

标 准 书 号:ISBN 7-301-04384-8/O·454

出　版　者:北京大学出版社

地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm

电　　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62752021

电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn

排　版　者:北京因温特有限公司

印　刷　者:北京大学印刷厂印刷

发　行　者:北京大学出版社

经　销　者:新华书店

850×1168　32 开本　8.375 印张　210 千字

2000 年 5 月第 1 版　2000 年 5 月第 1 次印刷

印　　　数:0001—4000 册

定　　　价:13.00 元

内 容 简 介

本书是为高年级本科生学习“傅里叶分析”课程而写的教材.全书共分六章,内容包括:预备知识,Fourier 级数,Fourier 变换与 Fourier 积分,共轭函数与 Hilbert 变换,广义函数,缓增广义函数及其 Fourier 变换.书末有两个附录:多重 Fourier 级数,快速 Fourier 变换.为了应用的方便,本书还给出了两个附表,即:一些函数的 Fourier 变换,一些广义函数的 Fourier 变换.书中介绍了傅里叶分析在近代科技领域中的应用,并把重要的应用成果编为范例.各章都配有相当数量的习题,为读者掌握 Fourier 分析的方法提供必要的训练.

傅里叶分析有着丰富的理论成果,本书只选取了最基本的及较常用的内容.虽然书中理论要以实变函数和泛函分析为基础,但作者力图采取比较容易接受的方式来讲述,以便于读者学习,并且对于应用傅里叶分析的读者来说,可以不需做太多的理论准备,阅读时略去证明过程,直接使用其结果.

本书可作为综合性大学、师范院校数学系的教材或教学参考书,也可供理工科大学的本科生与研究生、科技工作者阅读.

516
21

序　言

傅里叶分析是分析学中的一个重要分支，在数学发展史上，虽然早在18世纪初期，有关三角级数的论述已在D. Bernoulli，D'Alembert，L. Euler等人的工作中出现，但真正重要的一步是由法国数学家J. Fourier(傅里叶)迈出的. 他在著作《热的解析理论》(1822年)中，系统地运用了三角级数和三角积分来处理热传导问题. 此后，众多数学家，如Dirichlet，Riemann，Lipschitz以及Jordan等都曾从事于这一领域的研究，不仅弥补了Fourier工作中的不足，而且极大地发展了以Fourier命名的级数理论，扩大了Fourier分析的应用范围，还使得这一理论成为研究周期现象(各种振动，行星运动，波动与通讯等)不可缺少的工具. 特别是现代实用性很强的"小波分析"理论和方法也是从Fourier分析的思想方法演变出来的.

Fourier分析在概念和方法上对其他数学分支的发展给予了深刻的影响，数学中很多重要的思想和理论都与Fourier分析的发展密切相关. 正如A. Zygmund在他的专著《三角级数》中指出的：许多函数论的基本概念与结果是一些数学家在研究三角级数的过程中得到的. 例如，现代正确的函数概念是由Dirichlet在研究三角级数收敛性的论文中首先提出的(1837年)；微积分教科书上所讲的Riemann积分的定义是由Riemann在题为《用三角级数来表示函数》的论文中明确引进的(1854年)；1861年Weierstrass用三角级数给出了处处连续而处处不可微的函数的例子；19世纪70年代，Cantor在对三角级数的唯一性集合的研究中奠定了点集论的基础；到了20世纪初，Fourier分析的研究还推动了函数空间理论的发展.

“Fourier 分析”作为一门课程，早已在国内许多高等院校数学系（应用数学系以及概率统计系）中开设，然而始终没有恰当的教材可供使用. 国外的名著如 Zygmund 的新版《三角级数》以及 Бари 的《三角级数》虽也传入我国，但由于篇幅过大，取材繁细，只能作为参考书和查阅用. 又如河田龍夫在 70 年代所写的《Fourier 分析》虽在国内有译本，但从今日观之，又过于古典. 就是数学家陈建功先生所著的《三角级数论》也因年代久远而缺少近代内容. 因此，为了提高教学质量，出版这方面的可用教材，是一件值得庆贺的事情.

80 年代以来，北京大学数学系潘文杰教授一直执教“Fourier 分析”课程，积累了丰富的教学经验. 此间，她还参阅国外同类书刊，不断吸取先进内容补充讲授. 今天她将所编讲义整理出版，必将为教学工作带来极大方便，为提高教学质量作出贡献.

作为教材，以下几个方面可以说是该书的特色：1. 注意到与先行课程的衔接；2. 为顾及不同数学分支的学生学习，主要论述基本理论与方法，并指出若干有趣的应用，附录中还有实用快速傅里叶变换；3. 用相当篇幅介绍近代广义函数的傅里叶变换理论和方法，为更多邻近学科应用这一工具提供了方便；4. 书中还编有相当数量的习题（其他同类书籍中少见），为读者掌握这一内容提供实习的园地.

程民德　周民强

1998 年 1 月于北京大学

前　言

本书主要作为高年级本科生学习“Fourier 分析”课程的教材.因为以 Riemann 积分为基础的 Fourier 级数理论已经在“数学分析”课程中讲述过,而且 Fourier 分析的经典理论是在 Lebesgue 积分的基础上才得以完善的,所以本书以 Lebesgue 积分理论为基础.书中的证明经常用到实变函数论的一些基本定理(控制收敛定理,Fubini 定理,微积分基本定理等),从而学习本教材将有利于读者对实变函数理论的掌握与应用.教材的部分内容用到泛函分析的一些基本概念及定理,这些内容也可以看作是泛函分析的应用.

本书的内容主要包括 Fourier 级数与 Fourier 积分(变换)两个方面,共分六章.第一章是预备知识,接下来的三章陈述 Fourier 分析的经典基础理论,第五、六章讲述广义函数及其 Fourier 变换.

我之所以要把第五、六两章编入本书是因为在数学的各方面应用中,Fourier 分析的经典理论已不能满足要求(例如最简单的常数函数与多项式函数,其 Fourier 变换按经典理论都是没有定义的),而如今广义函数及其 Fourier 变换已在现代科学的各个领域中广泛使用.为了使读者不至于感到困难,书中采用比较容易接受的方式介绍广义函数的基本概念(不涉及拓扑线性空间理论).主要希望读者能够理解和运用缓增广义函数及其 Fourier 变换.为此,还专门编写了§6.4 一节,其中包含了一些把常见的函数看作广义函数并求其 Fourier 变换的具体例子.至于§5.4 至§5.7 及§6.5 至§6.7 等内容,则可视课学时的多少而取舍.

因为多重 Fourier 级数有着与一维情形不同的一些特性,所以本书编写了附录 I,对多重 Fourier 级数理论作了简明的介绍.

又因为在实际问题中常需通过数值计算来求 Fourier 变换，而从 1965 年发展起来的“快速傅里叶变换”算法则能够使计算速度大为提高，得到了科学界较高的评价，所以在附录Ⅱ中介绍了这一算法. 由于学时的限制，两个附录均可不列入教学计划内，仅供读者参考.

对于 Fourier 分析在众多领域中的应用，本书尽量在可接受的范围内编入各种应用范例，使读者能开阔思路，扩大视野. 书中还编有相当数量的习题，以配合课程的教学，为读者掌握 Fourier 分析的方法提供必要的训练.

本人在五、六十年代曾聆听过程民德教授对此课的讲授，书中关于经典理论的部分参考了当年的课程内容. 本书的出版也是在同行们的鼓励与支持下才得以实现的. 特别是周民强教授，他对本书内容的选材和编写提出了许多宝贵的意见. 我在此对他们表示谢意. 由于编者的水平所限，本书还会出现错误与不妥之处，望能得到同行们以及读者的批评指正.

潘文杰

1999 年 2 月

目　录

第一章 预备知识

在“数学分析”课程中，已经对 Fourier 级数作过初步介绍，为了便于学习，我们在本章第一节把有关的基本知识简要地叙述一下. 因为 Fourier 级数的部分和经过适当的运算可以化为 Dirichlet 积分的形式，也就是周期函数的卷积形式，而且 Fourier 级数通过各种求和法所得到的平均，通常也可以化成周期函数的卷积形式. 此外对于 Fourier 积分，类似的问题也会出现卷积的形式，所以从本章第二节开始，还将介绍卷积与恒等逼近的理论.

§1.1 三角函数系及 Fourier 级数

我们称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1.1}$$

为实型三角级数，其中 $a_0,a_k,b_k(k=1,2,\cdots)$ 是实数列，又称级数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx} \tag{1.2}$$

为复型三角级数，其中 $c_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是复数列. $a_0,a_k,b_k(k=1,2,\cdots)$ 与 $c_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 称为相应的三角级数的系数.

函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\cdots,\cos kx,\ \sin kx,\cdots \tag{1.3}$$

称为三角函数系. 因为有关系式

$$e^{ix}=\cos x+\mathrm{i}\sin x,$$

所以也称函数系

$$\{e^{ikx}\}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{1.4}$$

为三角函数系(复的形式).

三角函数系具有以下特性:

(1) **周期性** 三角函数系中的函数都以 2π 为周期.

(2) **正交性** 它们在长度为 2π 的任意区间 $I=(a,a+2\pi)$ 上组成正交函数系,即有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=0,\quad m\neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=0,\quad m\neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{imx}\,\overline{\mathrm{e}^{inx}}\mathrm{d}x=0,\quad m\neq n.$$

(将积分区间换成 $I=(a,a+2\pi)$,以上各式仍成立.)

(3) **完全性** 若有 $f\in L(I)$,它在 I 上与三角函数系(1.3)(或(1.4))中的每一个函数正交,则 $f(x)=0$, a.e.(其证明见定理 1.1).

因为对给定函数 $f\in L(I)$, $I=(a,a+2\pi)$,总可以把它延拓成为实轴上周期为 2π 的函数,而且使得它在每个长为 2π 的区间上可积,所以今后常讨论周期可积函数.我们记

$$\boldsymbol{T}=\{x:-\pi<x\leqslant\pi\}=(-\pi,\pi].$$

用 $L(\boldsymbol{T})$ 表示在 $\boldsymbol{T}$ 上可积,并且以 2π 为周期的函数全体.又用 $C(\boldsymbol{T})$ 表示在实轴上连续且以 2π 为周期的函数全体.

若给定函数 $f\in L(\boldsymbol{T})$,三角级数(1.1)的系数由以下公式给定

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x,\quad k=0,1,2,\cdots,\tag{1.5}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x,\quad k=1,2,\cdots,\tag{1.6}$$

则称该三角级数为 $f(x)$ 的(实型)Fourier 级数,记为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).\tag{1.7}$$

其系数 a_k 及 b_k 分别称为 f 的 Fourier **余弦系数**及 Fourier **正弦系数**，或统称为三角型 Fourier 系数. 同样地，若三角级数(1.2)的系数由公式

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{1.8}$$

给定，则称该三角级数为 f 的(复型)Fourier 级数，记为

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}. \tag{1.9}$$

其系数 c_k 称为 f 的(复型)Fourier 系数，或指数型 Fourier 系数. 级数(1.7)与(1.9)的系数之间有以下关系式

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}a_0, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k), \\ c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}b_k), \quad k = 1,2,\cdots. \end{aligned} \tag{1.10}$$

注意到当 f 是实值函数时，其实型 Fourier 系数 $a_0, a_k, b_k (k = 1,2,\cdots)$ 都是实数，而其复型 Fourier 系数具有性质

$$c_{-k} = \overline{c_k}, \quad k = 1,2,\cdots.$$

如果 $I = (-\pi, \pi)$，且 f 是 I 上的偶函数，那么，

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x, \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_k = 0, \quad k = 1,2,\cdots.$$

Fourier 级数(1.7)化为余弦级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

若 f 是 I 上的奇函数，则

$$a_k = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x, \quad k = 1,2,\cdots.$$

Fourier 级数(1.7)化为正弦级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Fourier 级数的 n 阶部分和为

$$
\begin{aligned}
S_n(x) = S_n(f,x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} c_{-k} e^{-ikx} = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

此式表明级数(1.9)的 n 阶对称部分和就等于级数(1.7)的 n 阶部分和,可根据关系式(1.10)验证. Fourier 级数的两种形式各自有其优点,二者都是常用的.

以下定理说明了三角函数系的完全性.

定理 1.1 设 $f\in L(\boldsymbol{T})$,若 f 的一切 Fourier 系数为 0,即

$$c_k(f) = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

则 $f(x)=0$, a.e..

证明 (1) 先设 $f\in C(\boldsymbol{T})$, $f(x)$为实值函数,并且对一切 k, $c_k(f)=0$,由此推证

$$f(x) \equiv 0.$$

如若不然,即 $f(x)\not\equiv 0$,则必存在点 $x_0\in[-\pi,\pi]$,使得

$$|f(x_0)| = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)| = M > 0.$$

不妨设 $f(x_0)=M$. 因为 f 连续,存在 $\delta>0$,使得

$$f(x) > \frac{1}{2}M, \quad \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I.$$

现在考虑三角多项式

$$P(x) = 1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta,$$

它在 I 内严格大于 1. 取 $J=\left(x_0-\frac{\delta}{2}, x_0+\frac{\delta}{2}\right)$,则存在 $r>1$,使得

$$P(x) \geqslant r, \quad \forall\ x \in J.$$

而对一切 $x\in[x_0-\pi, x_0+\pi]\setminus I$, $|P(x)|\leqslant 1$.

按假定 f 的 Fourier 系数都是 0,因此对任意三角多项式 $Q(x)$,必定有

$$\int_{-\pi}^{\pi} fQ\,dx = 0.$$

从而对一切 $N=1,2,\cdots$,

$$\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x)P^N(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} fP^N\mathrm{d}x = 0. \tag{1.12}$$

容易看到

$$\left|\int_{[x_0-\pi,x_0-\pi]\setminus I} fP^N\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\pi M\cdot 1^N = 2\pi M,$$

而当 $N\to+\infty$ 时

$$\int_I fP^N\mathrm{d}x \geqslant \int_J fP^N\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}M\cdot r^N\cdot\delta\to+\infty,$$

联合上述两个不等式,可得到

$$\lim_{N\to\infty}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} fP^N\mathrm{d}x = +\infty.$$

这与(1.12)矛盾. 因此必有 $f(x)\not\equiv 0$.

如果 f 是复值连续函数,且对一切 k,$c_k(f)$都是 0,不难推知 $c_k(\overline{f})=\overline{c_{-k}(f)}$也都是 0. 从而 f 的实部与虚部的 Fourier 系数也都是 0. 由前面所证便知 f 的实部与虚部都恒为 0,即 $f\equiv 0$.

(2) 设 $f\in L(\boldsymbol{T})$,对一切 k,$c_k(f)$都是 0,那么

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

作函数

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

便有 $F(\pi)=0=F(-\pi)$. 易知 $F(x)$绝对连续,以 2π 为周期. 记 $a=c_0(F)$,令

$$G(x) = F(x) - a,$$

则 $G(x)$也是绝对连续函数,以 2π 为周期,并且

$$c_0(G) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[F(x) - a]\mathrm{d}x = 0.$$

因为 $G'(x)=f(x)$, a.e.,由分部积分公式推知

$$c_k(f) = \mathrm{i}kc_k(G),$$

所以

$$c_k(G) = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

由前面(1)部分已证的结果,便知

$$G(x) \equiv 0,$$

从而 $$f(x) = G'(x) = 0, \quad \text{a.e.}. \quad \blacksquare$$

这个定理也表明:在对等的意义下,可积函数由它的 Fourier 系数所唯一确定.

推论 1.2 若 $f, g \in L(\boldsymbol{T})$,有

$$c_k(f) = c_k(g), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

则 $$f(x) = g(x), \quad \text{a.e.}.$$

由定理 1.1 容易推得此推论. ▌

一般的 Fourier 级数定义是关于正交函数系给出的,设 E 是实轴上具有正测度的子集.(复值)函数 $\psi_k \in L^2(E)(k=1,2,\cdots)$,如果有以下等式成立

$$\langle \psi_k, \psi_j \rangle = \int_E \psi_k \overline{\psi}_j \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ \lambda_k > 0, & k = j, \end{cases}$$

就称函数系$\{\psi_k\}$为 E 上的正交系.任给(复值)函数 $f \in L^2(E)$,称

$$c_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_E f(x) \overline{\psi_k(x)} \mathrm{d}x$$

为 f 关于$\{\psi_k\}$的 Fourier 系数.级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x)$$

称为 f 关于$\{\psi_k\}$的 Fourier 级数,记作

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x).$$

本书只讨论关于三角函数系的 Fourier 级数.

在实际应用的问题中,常需要使用给定在任意区间上的函数的 Fourier 级数展开式.为此介绍一般周期函数的 Fourier 级数.

设 $f(x)$以 T 为周期($T>0$),在$(-T/2, T/2)$上 Lebesgue 可积.令 $\varphi(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)$,则 $\varphi(t)$以 2π 为周期,且属于 $L(-\pi, \pi)$.我们