

高等学校函授教材

高等数学

第四分册

张之良 编著



水利出版社

013
22:4

高等学校函授教材

高等数学

第四分册

张之良 编著

水利出版社

高等学校函授教材

高 等 数 学

第四分册

张之良 编著

*

水利出版社出版发行

(北京德胜门外六铺炕)

水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 23 $\frac{1}{2}$ 印张 515 千字

1980年3月第一版 1980年3月北京第一次印刷

印数 00001—14170 册 每册 2.35 元

书号 15047·4014

目 录

第十六章 行列式及线性方程组	1
§ 1 二阶行列式和二元线性方程组	1
§ 2 三阶行列式	9
§ 3 行列式的主要性质	16
§ 4 三元一次非齐次线性方程组	27
§ 5 三元一次齐次线性方程组	32
§ 6 高阶行列式简介	39
总结	53
第十七章 空间直角坐标及矢量代数初步	57
§ 1 有向线段在轴上的投影, 投影定理	58
§ 2 空间的直角坐标及其基本问题	61
§ 3 矢量的定义, 矢量的加、减法	73
§ 4 数量与矢量的积, 矢量共线、共面条件, 矢量在 坐标轴上的分解式	78
§ 5 两个矢量的数量积	95
§ 6 两个矢量的矢量积	102
§ 7 三个矢量的混合积	115
总结	132
第十八章 空间解析几何	136
§ 1 曲面方程的概念	136
§ 2 球面方程和柱面方程	139
§ 3 空间曲线方程	147
§ 4 曲面和空间曲线的矢量方程	151
§ 5 平面方程	163

§ 6	两平面的夹角以及两平面互相平行和垂直的条件	173
§ 7	平面的法线式方程, 平面到空间一点的距离	177
§ 8	空间直线方程	190
§ 9	空间两直线的夹角, 两直线垂直和平行的条件	197
§ 10	空间直线和平面的夹角, 平面束	206
§ 11	二次曲面	221
§ 12	三元线性方程组的几何解释	240
§ 13	矢量分析初步	247
	总结	278
	第六次测验作业	279
第十九章 多元函数的微分法及其应用		287
§ 1	基本概念	288
§ 2	二元函数的极限和连续	308
§ 3	偏导数	325
§ 4	二元函数的微分中值定理	338
§ 5	全增量与全微分	341
§ 6	复合函数及隐函数的微分法	363
§ 7	曲面的切平面与法线, 空间曲线的切线与法平面	390
§ 8	高阶偏导数	400
§ 9	二元函数的泰勒公式及泰勒级数	413
§ 10	多元函数的极值	422
§ 11	条件极值, 拉格朗日乘数法	437
§ 12	最小二乘法简介	454
	总结	468
	第七次测验作业	472
第二十章 重积分		476
§ 1	二重积分概念	476
§ 2	二重积分的基本性质	482
§ 3	二重积分的计算——累次积分法	490

§ 4	积分域与积分限	519
§ 5	二重积分的应用	533
§ 6	三重积分概念	564
§ 7	三重积分在直角坐标系中的计算方法——累次积分法	567
§ 8	柱坐标、球坐标及其计算方法	582
§ 9	三重积分的应用	600
	总结	623
	附录	629
第二十一章 曲线积分		638
§ 1	对弧长的曲线积分 (又名第一型曲线积分)	638
§ 2	对坐标的曲线积分 (又名第二型曲线积分)	651
§ 3	沿平面闭路的曲线积分, 格林 (Green) 定理	667
§ 4	曲线积分与路径无关的条件	673
	总结	682
第二十二章 曲面积分		685
§ 1	对面积的曲面积分 (又名第一型曲面积分)	685
§ 2	对坐标的曲面积分 (又名第二型曲面积分)	692
§ 3	奥斯特罗格拉特斯基 (Остроградский) 公式 (简称奥氏公式)	709
§ 4	斯托克斯 (Stokes) 公式	714
	总结	723
第八次测验作业		726

第十六章 行列式及线性方程组

〔学习指示〕 我们已经完成了前五章的学习，大家回忆一下，在那些章节中，所研究的都是一元函数，所画的也都是平面图形。从这一章开始，我们将逐步过渡到多元函数的研究。为此，本章先讲行列式，然后讲线性方程组。

在工程计算中，时常遇到解多元一次方程组的问题（我们常常把这种多元一次方程组称为线性方程组），在解这种方程组时，行列式是一个很有力的工具。本章先由解二元一次方程组谈起，引出二阶行列式概念，然后由二阶行列式推广到三阶行列式，利用三阶行列式得到行列式的基本性质，最后简单介绍高阶行列式，同时讨论线性方程组的解法。本章以三阶行列式为重点，要求读者也要会计算四阶行列式，并能解三元线性方程组（齐次的或非齐次的），关于多于三元的情形将在二十六章详细讨论。

§ 1 二阶行列式和二元线性方程组

考察两个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

我们很熟悉方程组 (1) 的解法, 先以 b_2 乘第一个方程, 再以 b_1 乘第二个方程, 然后再由第一个方程减去第二个方程消去 y , 如

$$\begin{array}{r} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = b_2 c_1 \\ -) a_2 b_1 x + b_1 b_2 y = b_1 c_2 \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1) x = b_2 c_1 - b_1 c_2 \end{array} \quad (2)$$

用类似的方法可以消去 x , 我们就有:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) y = a_1 c_2 - a_2 c_1 \quad (3)$$

若代数式 $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, 用它除 (2) 和 (3) 的两端得:

$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (4)$$

所以, 如果已知方程组 (1) 的系数, 且 $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, 则把这些系数代入 (4) 中, 立即得到方程组的一组解, 这个公式固然很好, 但是却不容易记忆。为了解决这一问题, 让我们先来观察方程组 (1) 中 x, y 的系数排列关系, 它们是方阵

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}$$

而在 (4) 式中的分母就恰为这个方阵中的两个对角线上的字母相乘然后相减的结果, 现在我们规定将此方阵左、右两边加上两竖, 就等于这一运算。于是我们有:

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (5)$$

$$\text{例 1} \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{array} \right| = 1 \times 2 - (-4) \times 3 = 2 + 12 = 14,$$

$$\text{例 2} \quad \left| \begin{array}{cc} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = -4 \times 2 - 1 \times 3 = -8 - 3 = -11,$$

$$\begin{aligned} \text{例 3} \quad \begin{vmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} &= \sin \theta \cdot \sin \theta - (-\cos \theta) \cdot \cos \theta \\ &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

我们称记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

为二阶行列式，数 a_1, a_2, b_1, b_2 叫做行列式的元素，并且说横排的元素构成行列式的行，纵排的元素构成行列式的列^①。例如，元素 a_1, b_1 构成行列式的第一行，元素 a_1, a_2 构成行列式的第一列。

由行列式的定义，并注意方程组(1)的解(4)，我们就可以用二阶行列式来表示二元一次方程组(1)的解：

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(6)

(6)式两个等号的右端都是分式，它们的分母相同，并且就是以方程组(1)里面两个未知数的四个系数为元素的二阶行列式。我们称这个行列式为方程组(1)的行列式，并常用符号 Δ 代表它；这两个分式的分子是两个不同的二阶行列式， x 的分子是用(1)式右端的两个常数项 c_1, c_2 代替 x 的系数 a_1, a_2 作为第一列，仍以 y 的系数 b_1, b_2 作为第二列所成的行列式； y 的分子是仍用 x 的系数 a_1, a_2 作为第一列，并以(1)式右端的两个常数项代替 y 的系数作为第二

① 有的书把纵排叫做行，横排叫做列。

列所成的行列式。如果用符号 Δ_x , Δ_y 分别代替这两个行列式, 那么 (6) 式便可写成:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad \Delta \neq 0 \quad (6')$$

我们将用行列式解线性方程组的方法称为**克莱玛 (Cramer)**法则。可见行列式是由实践的需要而引出的, 下节我们将对二阶行列式进一步推广, 并对它们的一些性质作系统地, 理论地研究, 从而得到多于二元的线性方程组, 克莱玛法则也是适用的。这就是由实践出发, 提高到理论上, 然后再回到实践中去。不过在实际问题中有时会遇到几十个, 甚至几百个未知数的问题, 在理论上当然也可以用克莱玛法则来解, 但这是一个很繁重的工作, 例如在天气预报中, 三天以内的气象情况, 用此法则需两周才能算出结果, 因而失去意义, 现在由于电子计算机的出现, 就能很快地算出结果了。

例 4 解方程组
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$$

解 由公式 (6) 得到方程组的解

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{10}{13}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{11}{13}$$

在平面上这两个方程各代表两条直线, 这一组解就是这两条直线的交点坐标 (图16-1)。

在应用克莱玛法则时应注意:

(1) 如果方程没有按 x , y 次序排列整齐如

$$\begin{cases} -3y + 2x - 1 = 0 \\ 3x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

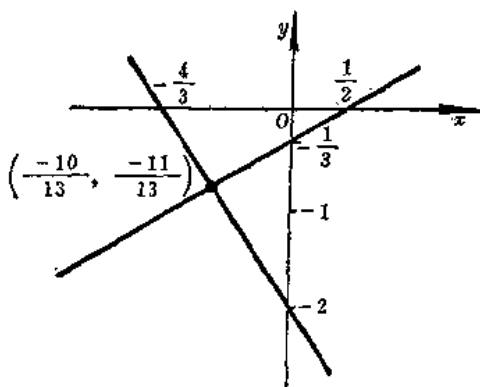


图 16-1

须先排好，写成

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$$

再使用法则

(2) 要注意 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 的条件，因为解 (6) 是在方程组 (1) 的行列式 $\Delta \neq 0$ 的条件下才能有解。

当 Δ 等于零的时候，(4)，(6)，(6') 都不能成立，但 (2)，(3) 两式却仍然成立；

$$\begin{cases} \Delta x = \Delta_x \\ \Delta y = \Delta_y \end{cases} \quad (7)$$

由 (7) 我们可以得到下面的论断：

① 当方程组 (1) 的行列式 Δ 等于零，而行列式 Δ_x ， Δ_y 中至少有一个不等于零，此时 (7) 式左端是零，而右端至少有一个不是零，在这种情形下，任何 x ， y 都不能满足 (7)，这就是说：方程组 (1) 无解：

从几何观点来说是很明显的，因 $\Delta = 0$ ，即

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0, \quad a_1 b_2 = a_2 b_1$$

或 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ 这表明两直线有相同的斜率, 又因 Δ_x, Δ_y 至少有一不为零, 这又说明此两直线仅平行而不重合, 自然此两直线没有交点。

例 5
$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 4x - 6y = 3 \end{cases}$$

解
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

所以知方程组无解 (图16-2)。

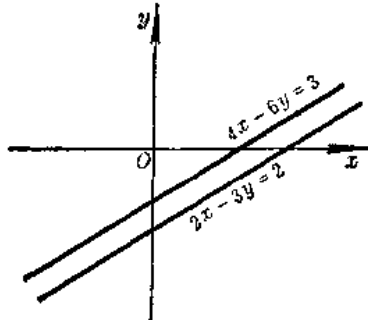


图 16-2

②当方程组 (1) 的系数行列式 Δ 等于零, 并且行列式 Δ_x, Δ_y 也都等于零的时候, 容易看出方程组 (1) 的两个方程对应的六个系数成比例。

因 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, 即 $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, 或 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

又因 $\Delta_y = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, 即 $c_1 b_2 - c_2 b_1 = 0$, 或 $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

所以有:
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (8)$$

设此比例常数为 k ，则方程组 (1) 可以改写成：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ k(a_1x + b_1y) = kc_1 \end{cases} \quad (9)$$

由方程组 (9)，我们可以明显的看到只要方程组 (9) 中任何一个方程得到的解，就必然适合另一个方程。在这种情况下，方程组 (1) 实际上只是一个二元一次方程，这种方程（未知数多于方程的个数）在代数上叫做不定方程。因此它的解不是唯一的，并且有无穷多组解。

在几何上也是显然的，二元一次方程代表一条直线，在该直线上有无穷多个点的坐标满足这两个方程。

例 6
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

显然第二个方程是由第一个方程乘以 2 得到的，它的系数行列式：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

两条直线重合，其解即是一条直线上的各点的坐标，因此方程组的解有无穷多（图16-3）。

③当 $c_1 = c_2 = 0$ 时，方程组 (1) 化为：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases} \quad (10)$$

叫做齐次线性方程组，由方程组 (10)，很容易看出当 $\Delta \neq 0$ 时，则 $x=0, y=0$ 为其唯一的一组解。我们称这种解为零解（零解）；如果 $\Delta=0$ ，则方程 (10) 实际上只是一个方程，因此它就有无穷多组解。

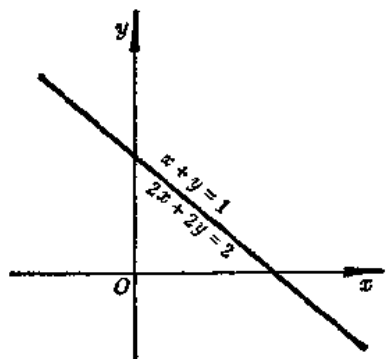


图 16-3

例 7
$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + 5y = 0 \end{cases}$$

解
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13 \neq 0$$

有一寻常解 $(0, 0)$ ，即是此两条直线交于原点(图16-4)。

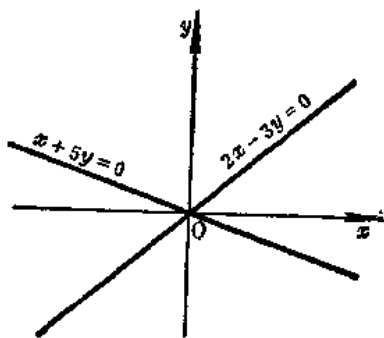


图 16-4

例 8
$$\begin{cases} 7x - 5y = 0 \\ 14x - 10y = 0 \end{cases}$$

解
$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 14 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

方程组有无穷多组解，因为它们仅代表一条过原点的直线（图16-5）。

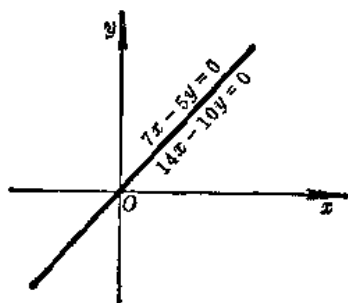


图 16-5

简 短 小 结

（1）若二元一次方程组的行列式 $\Delta \neq 0$ ，则这个方程组有唯一的解，并且用公式（6）表示这组解。

（2）若方程组的行列式 $\Delta = 0$ ，但行列式 Δ_x ， Δ_y 至少有一个不为零，这时方程组无解。

（3）若方程组的行列式 Δ 和行列式 Δ_x ， Δ_y 都等于零，这时这个方程组有无穷多组解。

由上面的讨论，我们可以看出，齐次方程组至少有一组解，而非齐次方程组有时有解，有时无解。

§ 2 三 阶 行 列 式

二阶行列式是由解二元线性方程组得到的，用消元法解三元线性方程组时，如解

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{得: } (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2)x \\ = d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1 - d_2b_1c_3 - d_1b_3c_2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2)y \\ = a_1d_2c_3 + a_2d_3c_1 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c_1 - a_2d_1c_3 - a_1d_3c_2 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2)z \\ = a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1 - a_2b_1d_3 - a_1b_3d_2 \quad (4) \end{aligned}$$

仔细观察 (2), (3), (4), 看出 x, y, z 的系数相同, 它们都是

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \quad (5)$$

若 (5) 式不为零, 则方程组 (1) 的解容易得出。

但 (5) 式很不容易记忆, 为此仿二元线性方程组情形, 用记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

来表达 (5) 式, 我们把这个由九个数排成三行三列的方阵, 外加两竖的式子称为三阶行列式。所以有下列等式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \quad (6)$$

而把 (5) 式称为此行列式之值。和二阶行列式一样, 我们称三阶行列式中的横排叫行, 竖排叫列。

由 (6) 式的左边用什么便于记忆的方法即可化为右边的结果呢? 下而介绍两种展开方法:

(一) 沙路 (Sarrus) 法 (或对角线法)

由 (6) 式知三阶行列式的展开式中共有六项，每一项是三个元素的乘积，有三项前带正号，另三项前带负号。

这六项是如此规定的，凡是由左上角向右下角所画的实线 (图16-6) 上的元素的乘积带正号，由右上角到左下角所画虚线上的元素的乘积都带负号。于是 (5) 式也就很容易记忆了。我们把这一展开的方法叫做沙路法，它有时又用下面的方法记忆。

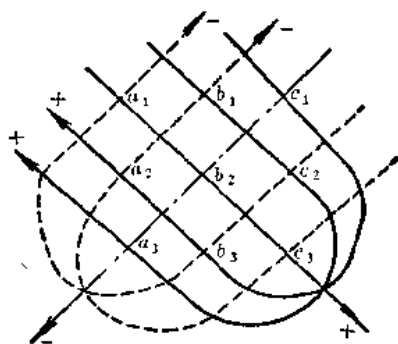


图 16-6

先将三阶行列式的元素按原来次序排成方阵，并在方阵的右侧添上行列式的第一列和第二列，然后由左上角向右下角画三条实线，凡是在实线上的元素的乘积取正号，由右上角向左下角画三条虚线，凡是在虚线上元素的乘积取负号 (图16-7)。

例 1 试计算
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$
 之值

解 按沙路法展开得，