高等学校函授教材

高等数学

第四分册

张之良 编著

水利出版社

O13
22:4

高等学校函授教材

高 等 数 学

第四分册

张之良　编著

水利出版社

高等学校函授教材

高 等 数 学

第四分册

张之良　编著

*

水利出版社出版发行

（北京德胜门外六铺炕）

水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　23$\frac{1}{4}$ 印张　515 千字

1980年3月第一版　1980年3月北京第一次印刷

印数 00001—14170 册　每册 2.35 元

书号 15047·4014

目　录

第十六章　行列式及线性方程组

［学习指示］　我们已经完成了前十五章的学习，大家回忆一下，在那些章节中，所研究的都是一元函数，所画的也都是平面图形。从这一章开始，我们将逐步过渡到多元函数的研究。为此，本章先讲行列式，然后讲线性方程组。

在工程计算中，时常遇到解多元一次方程组的问题（我们常常把这种多元一次方程组称为线性方程组），在解这种方程组时，行列式是一个很有力的工具。本章先由解二元一次方程组谈起，引出二阶行列式概念，然后由二阶行列式推广到三阶行列式，利用三阶行列式得到行列式的基本性质，最后简单介绍高阶行列式，同时讨论线性方程组的解法。本章以三阶行列式为重点，要求读者也要会计算四阶行列式，并能解三元线性方程组（齐次的或非齐次的），关于多于三元的情形将在二十六章详细讨论。

§1　二阶行列式和二元线性方程组

考察两个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

我们很熟悉方程组（1）的解法，先以b_2乘第一个方程，再以b_1乘第二个方程，然后再由第一个方程减去第二个方程消去y，如

$$\begin{array}{r} a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1 \\ -)\ a_2b_1x+b_1b_2y=b_1c_2 \\ \hline (a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2 \end{array} \qquad (2)$$

用类似的方法可以消去x，我们就有：

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \qquad (3)$$

若代数式$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，用它除（2）和（3）的两端得：

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad (4)$$

所以，如果已知方程组（1）的系数，且$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，则把这些系数代入（4）中，立即得到方程组的一组解，这个公式固然很好，但是却不容易记忆。为了解决这一问题，让我们先来观察方程组（1）中x，y的系数排列关系，它们是方阵

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

而在（4）式中的分母就恰为这个方阵中的两个对角线上的字母相乘然后相减的结果，现在我们规定将此方阵左、右两边加上两竖，就等于这一运算。于是我们有：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1 \qquad (5)$$

例 1 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=1\times 2-(-4)\times 3=2+12=14,$

例 2 $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-4\times 2-1\times 3=-8-3=-11,$

例 3 $\begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta\cdot\sin\theta-(-\cos\theta)\cdot\cos\theta$

$$= \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

我们称记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

为**二阶行列式**，数a_1，a_2，b_1，b_2叫做行列式的元素，并且说横排的元素构成行列式的行，纵排的元素构成行列式的列❶。例如，元素a_1、b_1构成行列式的第一行，元素a_1，a_2构成行列式的第一列。

由行列式的定义，并注意方程组（1）的解（4），我们就可以用二阶行列式来表示二元一次方程组（1）的解：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (6)$$

（6）式两个等号的右端都是分式，它们的分母相同，并且就是以方程组（1）里面两个未知数的四个系数为元素的二阶行列式。我们称这个行列式为方程组（1）的行列式，并常用符号Δ代表它；这两个分式的分子是两个不同的二阶行列式，x的分子是用（1）式右端的两个常数项c_1、c_2代替x的系数a_1，a_2作为第一列，仍以y的系数b_1，b_2作为第二列所成的行列式；y的分子是仍用x的系数a_1，a_2作为第一列，并以（1）式右端的两个常数项代替y的系数作为第二

---

❶ 有的书把纵排叫做行，横排叫做列。

列所成的行列式。如果用符号 Δ_x，Δ_y 分别代替这两个行列式，那么（6）式便可写成：

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta};\quad \Delta\neq 0 \qquad (6')$$

我们将用行列式解线性方程组的方法称为**克莱玛**（Cramer）法则。可见行列式是由实践的需要而引出的，下节我们将对二阶行列式进一步推广，并对它们的一些性质作系统地，理论地研究，从而得到多于二元的线性方程组，克莱玛法则也是适用的。这就是由实践出发，提高到理论上，然后再回到实践中去。不过在实际问题中有时会遇到几十个，甚至几百个未知数的问题，在理论上当然也可以用克莱玛法则来解，但这是一个很繁重的工作，例如在天气预报中，三天以内的气象情况，用此法则需两周才能算出结果，因而失去意义，现在由于电子计算机的出现，就能很快地算出结果了。

例 4 解方程组 $\begin{cases}2x-3y=1\\3x+2y=-4\end{cases}$

解 由公式（6）得到方程组的解

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -3\\-4 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\3 & 2\end{vmatrix}}=-\frac{10}{13},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & -4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\3 & 2\end{vmatrix}}=-\frac{11}{13}$$

在平面上这两个方程各代表两条直线，这一组解就是这两条直线的交点坐标（图16-1）。

在应用克莱玛法则时应注意：

（1）如果方程没有按 x，y 次序排列整齐如

$$\begin{cases}-3y+2x-1=0\\3x+2y+4=0\end{cases}$$

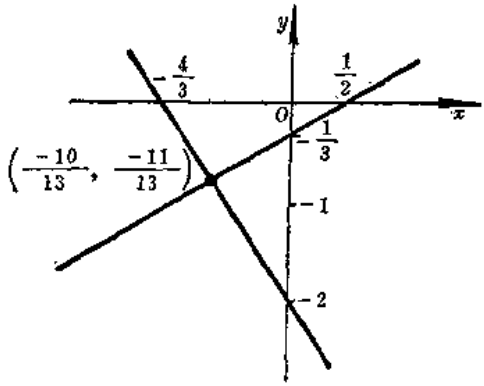

图 16-1

须先排好，写成

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x+2y=-4 \end{cases}$$

再使用法则

（2）要注意 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 的条件，因为解（6）是在方程组（1）的行列式 $\Delta\neq 0$ 的条件下才能有解。

当 Δ 等于零的时候，（4），（6），（6′）都不能成立，但（2），（3）两式却仍然成立：

$$\begin{cases} \Delta x=\Delta_x \\ \Delta y=\Delta_y \end{cases} \qquad (7)$$

由（7）我们可以得到下面的论断：

①当方程组（1）的行列式 Δ 等于零，而行列式 Δ_x，Δ_y 中至少有一个不等于零，此时（7）式左端是零，而右端至少有一个不是零，在这种情形下，任何 x，y 都不能满足（7），这就是说：方程组（1）无解：

从几何观点来说是很明显的，因 $\Delta=0$，即

$$a_1b_2-a_2b_1=0,\ \ a_1b_2=a_2b_1$$

或$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ 这表明两直线有相同的斜率，又因Δ_x，Δ_y至少有一不为零，这又说明此两直线仅平行而不重合，自然此两直线没有交点。

例 5
$$\begin{cases}2x-3y=2\\4x-6y=3\end{cases}$$

解 $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\4 & -6\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}2 & -3\\3 & -6\end{vmatrix}=-3\neq 0$

所以知方程组无解（图16-2）。

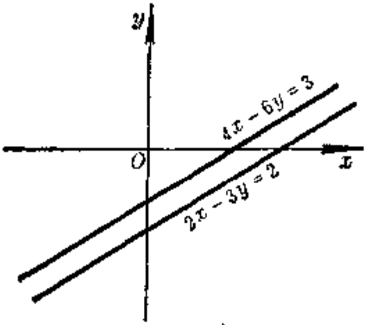

图 16-2

②当方程组（1）的系数行列式Δ等于零，并且行列式Δ_x，Δ_y也都等于零的时候，容易看出方程组（1）的两个方程对应的六个系数成比例。

因 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$，即$a_1b_2-a_2b_1=0$，或$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$

又因$\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\c_2 & b_2\end{vmatrix}=0$，即$c_1b_2-c_2b_1=0$，或$\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$

所以有：
$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\qquad（8）$$

设此比例常数为 k，则方程组（1）可以改写成：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ k(a_1x+b_1y)=kc_1 \end{cases} \qquad (9)$$

由方程组（9），我们可以明显的看到只要方程组（9）中任何一个方程得到的解，就必然适合另一个方程。在这种情况下，方程组（1）实际上只是一个二元一次方程，这种方程（未知数多于方程的个数）在代数上叫做不定方程。因此它的解不是唯一的，并且有无穷多组解。

在几何上也是显然的，二元一次方程代表一条直线，在该直线上有无穷多个点的坐标满足这两个方程。

例 6
$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$$

显然第二个方程是由第一个方程乘以 2 得到的，它的系数行列式：

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0, \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

两条直线重合，其解即是一条直线上的各点的坐标，因此方程组的解有无穷多（图16-3）。

③当$c_1=c_2=0$时，方程组（1）化为：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases} \qquad (10)$$

叫做齐次线性方程组，由方程组（10），很容易看出当$\Delta\neq0$时，则$x=0$，$y=0$为其唯一的一组解。我们称这种解为寻常解（零解）；如果 $\Delta=0$，则方程（10）实际上只是一个方程，因此它就有无穷多组解。

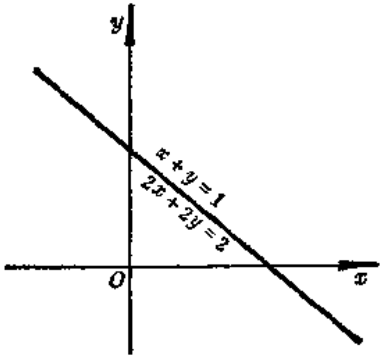

图 16-3

例 7
$$\begin{cases} 2x-3y=0 \\ x+5y=0 \end{cases}$$

解
$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=10+3=13\neq 0$$

有一寻常解（0，0），即是此两条直线交于原点(图16-4)。

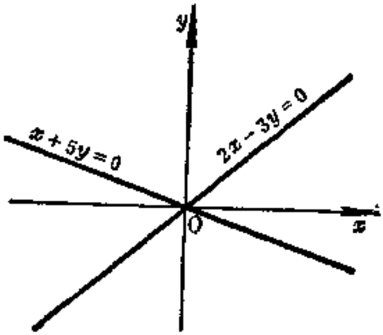

图 16-4

例 8
$$\begin{cases} 7x-5y=0 \\ 14x-10y=0 \end{cases}$$

解
$$\Delta=\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 14 & -10 \end{vmatrix}=0$$

方程组有无穷多组解，因为它们仅代表一条过原点的直线（图16-5）。

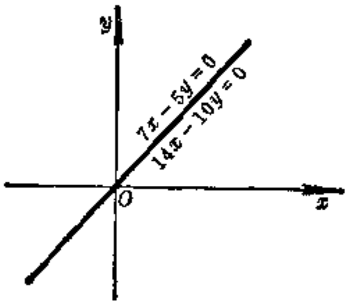

图 16-5

简 短 小 结

（1）若二元一次方程组的行列式$\Delta\neq0$，则这个方程组有唯一的解，并且用公式（6）表示这组解。

（2）若方程组的行列式$\Delta=0$，但行列式Δ_x，Δ_y至少有一个不为零，这时方程组无解。

（3）若方程组的行列式Δ和行列式Δ_x，Δ_y都等于零，这时这个方程组有无穷多组解。

由上面的讨论，我们可以看出，齐次方程组至少有一组解，而非齐次方程组有时有解，有时无解。

§2 三 阶 行 列 式

二阶行列式是由解二元线性方程组得到的，用消元法解三元线性方程组时，如解

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \qquad (1)$$

得：$(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2)x$

$$=d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1-d_2b_1c_3-d_1b_3c_2 \qquad (2)$$

$(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2)y$

$$=a_1d_2c_3+a_2d_3c_1+a_3d_1c_2-a_3d_2c_1-a_2d_1c_3-a_1d_3c_2 \qquad (3)$$

$(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2)z$

$$=a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1d_2-a_3b_2d_1-a_2b_1d_3-a_1b_3d_2 \qquad (4)$$

仔细观察（2），（3），（4），看出x，y，z的系数相同，它们都是

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2 \qquad (5)$$

若（5）式不为零，则方程组（1）的解容易得出。

但（5）式很不容易记忆，为此仿二元线性方程组情形，用记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

来表达（5）式，我们把这个由九个数排成三行三列的方阵，外加两竖的式子称为**三阶行列式**。所以有下列等式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1 -a_2b_1c_3-a_1b_3c_2 \qquad (6)$$

而把（5）式称为此行列式之值。和二阶行列式一样，我们称三阶行列式中的横排叫行，竖排叫列。

由（6）式的左边用什么便于记忆的方法即可化为右边的结果呢？下面介绍两种展开方法：

（一）沙路（Sarrus）法（或对角线法）

由（6）式知三阶行列式的展开式中共有六项，每一项是三个元素的乘积，有三项前带正号，另三项前带负号。这六项是如此规定的，凡是由左上角向右下角所画的实线（图16-6）上的元素的乘积带正号，由右上角到左下角所画虚线上的元素的乘积都带负号。于是（5）式也就很容易记忆了。我们把这一展开的方法叫做**沙路法**，它有时又用下面的方法记忆。

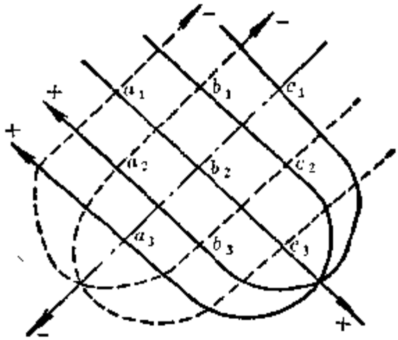

图 16-6

先将三阶行列式的元素按原来次序排成方阵，并在方阵的右侧添上行列式的第一列和第二列，然后由左上角向右下角画三条实线，凡是在实线上的元素的乘积取正号，由右上角向左下角画三条虚线，凡是在虚线上元素的乘积取负号（图16-7）。

例 1 试计算 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 之值

解 按沙路法展开得：