北京大学数学丛书

黎曼几何初步

伍鸿熙　沈纯理　虞言林 著

北京大学出版社

内 容 简 介

本书是黎曼几何的一本入门教材．本书从黎曼度量及联络出发，介绍了黎曼流形研究中的各种基本概念和技巧．以测地线的研究为重点讨论了各种形式的比较定理和 Morse 指数定理，同时还介绍了子流形几何学．书中也勾划了近代微分几何中的一些重大成果：如球面定理、正质量猜想以及几乎平坦流形等，最后还列举了当今微分几何研究中一些尚待解决的问题．

本书可供大学、师范院校数学系高年级选修课教材以及研究生教材，也可供数学工作者参考．

北京大学数学丛书

黎 曼 几 何 初 步

伍鸿熙 等著

责任编辑：邱淑清

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

850×1168 毫米　32 开本　10.25 印张　244 千字

1989 年10月第一版　1989 年10月第一次印刷

印数：0001—1050 册

ISBN 7-301-00804 X/O·143

定价：2.55 元

序

这本书是根据我 1984 年夏天在暑期教学中心讲授微分几何时的讲义编写而成的.讲义的整理工作,完全是由沈纯理和虞言林两位同志动手.虞言林同志并对某些部份有所增补.第八节的附录就是他写的.我谨在此向他们深致谢意.

这本书的内容是微分几何入门的第一步. 故此所涉及的课题,从某一个角度来看,是非常浅显的.对此,一些国内国外的学者和同事表示不解,问我为什么要远涉重洋来讲这么浅的课.自然这就间接提出了为什么我要在中国发表一本这么初步的著作的疑问.我的回答是分开两方面的.第一,我很喜欢讲初步的课和写初步的书;其次,我素来信服唐朝魏征的四句话:

欲流之远者,必浚其泉源.

求木之长者,必固其根本.

在目前偏重所谓"尖端科学"的时刻,这种"浚源、固本"的教育工作,是很有可能被忽略的.这本书是我们三个人对这方面的一个小贡献.

伍鸿熙

1985 年 5 月于加州

致读者的话

> “你们的事业的成长，应该像一棵树的成长一样．应该是顺其自然、无间断、和全面的．我希望你们的根能够在这个学院的肥沃土地下面尽量深入，以使你们的树干长得既粗且壮．这样，将来无论树叶多么茂盛丰满，也永不会有水份供应不暇的毛病．在上空将不时会有狂风大雨，也会有行雷闪电．所以切勿长得太快太高．”

以上的一段话，是当代英国演员罗伦士奥利维亚在 1947 年 Old Vic 戏剧学院开幕典礼中，向学生致词的一部份．这几句话对你们是有特殊意义的．因为这本书是一本很初步的书．如果你们有意细读这本书的话，则最少要弄清楚从这本书中你们能够得到什么．目前一般研究生心目中，最迫切的问题似乎是：有没有一个可以写一篇文章的小题目？因此我要先此声明：这本书不讨论这一类的小题目．我写这本书的原意，只是希望能使“你们的根尽量向下面深入”．以后是否开枝发叶，就只能看你们自己的努力和天赋．书内所讨论的题目，都是一般的和基础性的，而且也是任何一个几何学家所熟悉的．要是你们能够好好掌握这几个基本性的概念，并且在将来能对几何学有一个比较全面的理解，则日后自然能够挑一些有意义的大题目来做．急功好利、只顾眼前的收获、和只找易做的小题目来写文章，这都不是一个数学工作者所应有的态度．这本书应该是你们向前迈进的踏脚石之一．我希望你们很快就会超过这本书的范围．

每一本书的作者都有一点和一个魔术师相同的地方，就是希

望观众或读者所看见的一切，刚好是他希望他的读者或观众所看见的一切. 那么在我心中，幻想你们能够从这本书中看到的是什么呢?

第一，你们会了解书内的定义和定理都既是人为的，又同时是合理的. 也许你们认为一本书要写得高深莫测，才能显出作者的学问渊博. 但是我却希望你们会觉得书中的一切，不但是理所当然，而且是容易得只要肯化一点功夫就可以自己做出来的. 要做到这一点，除了一般的“定义→定理→证明”基本形式以外，我设法多加一些按语来说清楚每个主要定义和主要定理的来龙去脉和直观意义. 另一方面我也要指出，书内的概念和结果所以被认为是基本性的，并不是因为某某权威说过是如此如此，而是因为经过时间的考验后，发现确切是如此的. 就是说，从经验的总结，我们现在知道这些概念和定理是有用和必需的. 所以一个初学者应该致力于探求为什么所学的是有用的和必需的，否则不能对所学有一个全面的了解. 这种治学态度，其实不单是适用于数学上，而是适用于一切学问的领域上的，包括社会科学在内.

其次，我希望你们能够把握全书的要点，同时也能把握每个定理、每个证明和每个概念的要点. 一本好的数学书应该不同于一本字典. 在后者当中每一个字都占有同等的地位. 但是如果说这本书内无数的定义、定理和证明都是同样重要的，就未免荒谬无稽了. 比方说，弧长的二次变分公式只是一个一般性的技巧性结果，要点在于弄清楚如何将它应用于具体的情况，而不在于探讨这个公式本身的深度或研究这个公式的推导. 所以不应该只算出这个公式而不给应用，更不应该把这个公式当作主要定理之一. 又比如，Synge 定理的证明看来是相当累赘的. 但是如果从一个很直观的事实作出发点，就是“任何一个非单连通的紧致黎曼流形上必存在一个非同伦于零的最短闭曲线”，则其它一切都是顺理成章的了. 所以我希望你们能够培养一个习惯，总要问：这本书的要点

何在？这一章的要点何在？这个证明的要点何在？能找到所有这些问题的答案，才能说有真正的了解。

最后，我希望你们能够完全以直观的眼光去了解这本书的内容。所有数学书都是充满了技术性的术语的，因为为了要表达清楚，作者毫无选择的余地。但是一个数学工作者的思考，大部份时候是靠直观（甚至是过份简化的直观）的想法来向前推进的。在几何学上这一点尤其是重要。所以书内这一类直观的讨论，比其它的数学课本会多一点。也许你们还迷信所谓“数学严格性”，以为数学上最重要的是每一步推论的正确性。这个论点，相当于说鲁迅文章的好处，主要是在于每句话都写得很通顺。我希望你们不会犯这个“见小不见大”的毛病。

当然以上三点只是我个人的幻想。现实和幻想的距离可能很大。但是当知道我的意图之后，希望你们能够用自己的想像力来填补这本书的不足之处。

我讲这个课的时候，刚好和奥运会重合。由于祖国在奥运会上的丰收，自然引起了“为什么中国数学家不能拿数学界的金牌”的问题。于是“拿金牌”这个口号不胫而走，暑期中心的同志们人人面上都挂了同一个问号：“中国在什么时候才拿数学界的第一面金牌？”这个问题后来甚至在杂志、报章上也被提出来了。这个想法实在很具有刺激性。若是真能把一门严肃的学问当作一种体育比赛，以后可以玩的花样就多得不可想像。比方说，人民日报第一页可能有如下的标题：“Poincaré 与高斯在拓扑场上激战，Poincaré 大胜，五比零。”又或：“群论决赛，Abel 苦战 Galois，不幸以二比三败北”等等。不过我猜想提倡在数学上“拿金牌”，主要的用意也不过是作为一种鼓励罢了。这个用意自然是很好的，但是，这个口号却不幸被人误解，以为学数学的最终目的，不外是拿一个什么奖之类。这就和古代“十载寒窗，一举成名”的封建思想，有太多重合之处了。你们一定很清楚地认识到，在你们自

己这一代当中，这种功利主义的想法已是与日俱增，犯不着再用“金牌”作为鼓励了．我觉得比较值得做的事，倒是鼓励你们去培养一种“实事求是，为这门有悠久历史的学问尽一己之力”的学者风度．只是这件事一说开来就不是三言两语所能够说清楚的，而且恐怕也有一些说教的味道．所以我还是回过头来和你们讨论数学罢．

“拿金牌”的另一个用意，就是举出一个目标，希望大家朝这个方向走．从一个数学工作者的立场看来，这个做法似乎不够彻底．如果真要坚持这个观点，就不如索性举出最伟大的数学家作为年青人的榜样．古语云：“取法乎上，得法乎中．”根据学问远胜于我的人的看法，数学史上登峰造极的数位，还要数十九世纪的高斯，黎曼，Abel，Poincaré 等等．Hermann Weyl 在 1944 年写 Hilbert 的悼文时就说过，伟大如 Hilbert，他的学术成就还不及高斯和黎曼．但也是 Weyl，毫不含糊地加上一句话：“在我们(即 Weyl 本人)这一代当中，并没有一个能够和 Hilbert 相比的数学家．” Weyl 是被公认为本世纪数一数二的数学家，同时也许是数学史上最后的一个全才．可是从他这个评价，就可以了解为什么要是想攀登数学的高峰，就非要拿这些十九世纪的大师们作榜样不可．要认识他们的成就，就得要念他们的全集．如果只谈“拿金牌”而不谈这个明显的事实，则无形中变成鼓励年青人“取法乎中”，结果自然“得法乎下”．这就和提倡这个口号的原意脱节了．

你们一定以为“向大师们学习”，只是一句说来动听而不切实际的话．这是可以理解的．毕竟年青人爱时髦，看的文章总是要愈新愈好．所以一、二十年前的文献已是有过时之嫌，更惶论十九世纪的文章？可是这个提法是无需我来辩护的，因为有才学远超过我的人来代替我这样做． 在我作研究生的时候，有一次去听 André Weil 演讲．他一开头就说年青人一定要找高斯，Euler 等

第一流数学家的全集来读. 在这方面, Weil 是一个言行一致的人. 1947 年有一段时间他的情绪低落, 但从翻阅高斯的文集中得到启发, 因而作了一连串的猜想. 这就是支配了过去三十年来代数几何发展的“Weil 猜想”. 其实相像的例子是太多了. 与其多举, 不如推荐下列数篇文章, 让你们自己亲身体验罢:

(一) 高斯创造近代曲面几何学的文章: Disquisitiones generales circa superficies curves. 这篇文章最近刚有新的英文翻译和注释. 请阅 P. Dombrowski, 150 Years After Gauss' Disquisitiones ···, *Astérisque*, Vol. 62, *Soc. Math. France*, 1979.

(二) 黎曼创造“黎曼几何”的短文: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. 这篇文章的英文翻译和详细的解释可在本书参考文献 [S8, II] 中找到.

(三) Poincaré 创造代数拓扑的一系列文章:

Analysis situs, J. École Polytechnique (2) 1 (1895), 1—121;

1^r Complément, *Rend. circ. mat. Palermo* **13**(1899), 285—343;

2^d Complément, *Proc. London Math. Soc.* **32**(1900), 277—308;

3^e Complément, *Bull. Soc. Math. France* **30**(1902), 49—70;

4^e Complément, *J. Math. Pure Appl.* (5) **8**(1902), 169—214;

5^e Complément, *Rend. circ. mat. Palermo* **18**(1904), 45—110.

这些文章都是你们基本上能够看懂的. 同时我也可以保证, 它们是会使你们感觉无限鼓舞的.

最后我们再回到“拿金牌”这个问题罢. 一般人以为参加奥运

会的唯一目的就是拿金牌．去年李宁拿了三面金牌，举国称庆，而童非一面也拿不到．所以用“拿金牌”的尺度来衡量，成功和失败的分野，真是一目了然．但是“金牌得主”的李宁，他个人的想法又是怎么样呢？ 你们可以去图书馆翻看他在 1984 年底发表在报章上，以“童非是真正的英雄”为题的文章，就可以看到另外一个观点．其实参加体育竞赛，或者是钻研数学，也只不过是人生的一部份而已．探求人生的意义，是我们至死的一天都学不完的大学问．下面录出的两段话，也许足以提供一些与众不同的看法给大家作参考． 第一段是近代奥运会始创人 Pierre de Coubertin 说的：

运动的目的不在胜利而在竞争，
人生的意义不在克服而在奋斗．

另一段则是古代希腊奥运会的格言之一：

切勿要求胜利，只应要求有一往无前的勇气．因为从坚忍不拔的奋斗中，你将为自己带来荣誉，但更重要的，你将为全人类带来光荣．

伍鸿熙

1985 年 6 月于北京大学

目　录

内 容 简 介

本书是黎曼几何的一本入门教材．本书从黎曼度量及联络出发，介绍了黎曼流形研究中的各种基本概念和技巧．以测地线的研究为重点讨论了各种形式的比较定理和 Morse 指数定理，同时还介绍了子流形几何学．书中也勾划了近代微分几何中的一些重大成果：如球面定理、正质量猜想以及几乎平坦流形等；最后还列举了当今微分几何研究中一些尚待解决的问题．

本书可供大学、师范院校数学系高年级选修课教材以及研究生教材，也可供数学工作者参考．

北京大学数学丛书
黎 曼 几 何 初 步
伍鸿熙 等著
责任编辑：邱淑清

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

850×1168 毫米　32 开本　10.25 印张　244 千字
1989 年10月第一版　1989 年10月第一次印刷
印数：0001—1050 册
ISBN 7-301-00804 X/O・143
定价：2.55 元

§ 1　线性联络，黎曼度量和平行移动

本节参考文献

[GKM]，　§ 2.1，§§ 2.5-2.7.

[S8，I]，　第 9-1 页至第 9-16 页.

[S8，II]，　第 6-1 页至第 6-17 页.

[M1]，　　§ 8.

关于本书所讨论的课题，我们想先说几句．为此先列出下列式子：

微分几何⊂微分拓扑⊂点集拓扑.

这里记号"⊂"表示研究对象的集合之包含关系．细说起来，点集拓扑研究的是一般拓扑空间，微分拓扑研究 C^∞ 流形，而微分几何处理的则是 C^∞ 流形，并带有某种附加结构．这里所谓的附加结构可以是一个黎曼度量，也可以是一个联络，或是一个张量场．研究对象越少，研究的方法和结果就越多．例如在微分拓扑中惯用的微积分算法在点集拓扑学中就不能用．上面的式子粗糙地勾划了微分几何与其他数学分支的关系．

微分几何的核心是关于流形上黎曼度量的研究，这就是所谓的**黎曼几何**．本书讨论的正是黎曼几何．

读本书之前，我们假定读者对微分流形已有初步的了解(例如[CC] 中第一，二，三章)，并且熟悉大学微分几何教材(关于 $\boldsymbol{R}^3$ 中曲面的理论).

C^∞ 流形M上一个**黎曼度量** g 是什么呢？ 我们帮助大家回忆一下定义．g 是一个"C^∞ 指定"."指定"的含义就是对于M的每

一个切向量空间 $M_x(x\in M)$，指定 M_x 中一个向量内积 $g_x(\ ,\ )$（有时把 $g_x(\ ,\ )$ 记为 $\langle\ ,\ \rangle_x$，类似地有时记 $g(\ ,\ )$ 为 $\langle\ ,\ \rangle$）。所谓指定是 C^∞ 的，那表示：对 M 的任意一个局部坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$，如令

$$g_{ij}(x)=g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\ \frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

则这些 $g_{ij}(x)$ 是坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 的 C^∞ 函数。 在此提请注意：$g_x(\ ,\ )$ 是内积这一事实就相当于矩阵 $[g_{ij}(x)]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 是正定对称的。如果用张量的语言来说，g 其实就是 M 上一个 C^∞ 二阶共变张量场，并且具有下列性质：对 M 中任意向量场 X,Y，有

$$g(X,Y)=g(Y,X),\quad g(X,X)\geqslant 0.$$

并且 $g_x(X,X)=0$ 的充要条件是 $X(x)=0$。值得注意，C^∞ 流形上总可找到一个黎曼度量（参阅 [CC]，第 133 页定理 1.1）。

着手研究黎曼度量之前，先谈谈"**联络**"，从概念的复杂程度上讲这是较为简单的。联络是什么呢？至少有四种不同但彼此等价的说法来阐述它（参阅本节的附录或 [S8，II] 5—8）。现在我们先给它一个直观的描述：联络者就是使我们得以对流形上向量场进行"**微分**"的一种手段。让我们沿用这种直观的方式来阐明它的形成背景。我们是研究**微分**几何的，所以能对向量场做微分自然是头等重要的事，于是上面说的联络势必为一个最重要的概念。看看在欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中是如何微分一个向量场的（这当然是大家熟悉的）。简单说来，如果 v 是 $p\in\boldsymbol{R}^n$ 处一个向量，f 是 p 点附近的一个可微函数，那么**方向导数** D_vf 是可以定义的，它就是一个实数

$$\mathrm{D}_vf=\lim_{t\to 0}\frac{f(p+tv)-f(p)}{t|v|}.$$

现设 X 是 p 点附近的一个向量场，于是 X 可表为 n 个 C^∞ 函数 $X=(X^1,\cdots,X^n)$，其中 X^i 是由等式

$$X=\sum_{i=1}^{n}X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

所确定的，$(x^1,\cdots,x^n)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的**自然坐标**. 这时**向量场** X **沿** v **的导数**就定义为

$$\mathrm{D}_vX\equiv(\mathrm{D}_vX^1,\cdots,\mathrm{D}_vX^n),$$

即

$$\mathrm{D}_vX=\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{D}_vX^i)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

D_vX 有下列显见的性质(这些性质只不过是函数的方向导数性质的翻版):

(a) $\mathrm{D}_{\alpha v}X=\alpha\mathrm{D}_vX$, $\forall\alpha\in\boldsymbol{R}$;

(b) $\mathrm{D}_v(fX)=(\mathrm{D}_vf)X+f\mathrm{D}_vX$, $\forall$ 函数 f;

(c) $\mathrm{D}_v(X_1+X_2)=\mathrm{D}_vX_1+\mathrm{D}_vX_2$, $\forall$ 向量场 X_1, X_2;

(d) $\mathrm{D}_{v+v'}X=\mathrm{D}_vX+\mathrm{D}_{v'}X$, $\forall$ 向量 v, v'.

只做形式计算时，(a)—(d) 正是我们关于 $\boldsymbol{R}^n$ 中向量场的微分运算所需知道的全部性质. 当然我们还知道

$$\mathrm{D}_v\frac{\partial}{\partial x^i}=0,$$

可是这个性质不能推广到微分流形的情形，只能割爱了. 上述讨论稍做改变如下：如果 V 是 p 的邻域中一个向量场，使得 $V(p)=v$，则定义一个向量场 D_VX 为:

$$(\mathrm{D}_VX)(p)=\mathrm{D}_vX.$$

于是 (a)—(d) 变为

(C1) $\mathrm{D}_{fV+gW}X=f\mathrm{D}_VX+g\mathrm{D}_WX$;

(C2) $\mathrm{D}_V(fX)=(\mathrm{D}_Vf)X+f\mathrm{D}_VX$;

(C3) $\mathrm{D}_V(X+Y)=\mathrm{D}_VX+\mathrm{D}_VY$,

其中 V, W, X, Y 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中向量场，f, g 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数.

综合起来，上面讨论的要点是：在 $\boldsymbol{R}^n$ 中给定向量场 V 和

X，我们可以定义**方向导数** $D_V X$，它依旧是向量场并具有性质(C1)—(C3)。

现在让我们置身于微分流形的情形．设 V，X 是流形M上向量场．在M的任一个坐标邻域内(其内的坐标函数是 $x^1,\cdots,x^n$)，V与X可看做是 $\boldsymbol{R}^n$ 中某开集上的向量场，于是在这个坐标邻域内可以搬用 $\boldsymbol{R}^n$ 的情形来定义 $D_V X$，它是此坐标邻域内的向量场．很自然地设想：将各个坐标邻域内如此定义出的向量场，拼成M上整体定义的向量场，从而给出M上的 $D_V X$。可是这是行不通的，麻烦出在上述局部定义的 $D_V X$ 依赖于坐标函数的选取．假若在坐标邻域 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 内分别具有坐标函数 $\{x^i\}$ 和 $\{y^i\}$。当 $\mathscr{U}\cap\mathscr{V}\neq\varnothing$，按照上述办法，$D_V X$ 在 $\mathscr{U}$ 中就应是

$$D_V X=\sum_i (D_V f^i)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 $X=\sum\limits_i f^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$。在 $\mathscr{V}$ 中就应是

$$D_V X=\sum_i (D_V g^i)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

其中 $X=\sum\limits_i g^i\dfrac{\partial}{\partial y^i}$．如果设想它们能拼起来，就表示在 $\mathscr{U}\cap\mathscr{V}$ 中有

$$\sum_i (D_V f^i)\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_i (D_V g^i)\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

不幸的是，这个式子几乎总不能成立．因为如果它成立，则必有

$$\begin{aligned}\sum_i (D_V f^i)\frac{\partial}{\partial x^i}&=\sum_i (D_V g^i)\frac{\partial}{\partial y^i}\\&=\sum_{i,j} (D_V g^j)\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^i},\end{aligned}$$

即

$$D_V f^i=\sum_j (D_V g^j)\frac{\partial x^i}{\partial y^j},\quad \forall i \tag{1.1}$$

由 $X = \sum_i f^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_i g^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ 得

$$g^j = \sum_k f^k \frac{\partial y^j}{\partial x^k}, \quad \forall j \tag{1.2}$$

将(1.2)代入(1.1)得

$$D_V f^i = D_V f^i + \sum_{k,j} f^k \left(D_V \frac{\partial y^j}{\partial x^k}\right) \frac{\partial x^i}{\partial y^j}, \quad \forall i,$$

从而有

$$\sum_{k,j} f^k \left(D_V \frac{\partial y^j}{\partial x^k}\right) \frac{\partial x^i}{\partial y^j} = 0 \tag{1.3}$$

由于 $\sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \delta^i_k$ (这里 δ^i_k 是 Kroneker 记号),故

$$\sum_{k,j} f^k \left(D_V \frac{\partial y^j}{\partial x^k}\right) \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$$
$$= \sum_{k,j} f^k D_V \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) - \sum_{k,j} f^k \frac{\partial y^j}{\partial x^k} D_V \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right).$$

将此式与(1.2)代入(1.3)即得

$$\sum_j g^j \left(D_V \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) = 0, \quad \forall i. \tag{1.4}$$

容易写出具体例子使(1.4)不成立,从而在 $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ 中分别定义的 $D_V X$ 不能拼起来,前面的设想就失败了.

习题 1. 给出合适的 X, V, $\{x^i\}$, $\{y^i\}$, 使(1.4)不成立.

上面冗长而曲折的分析是想告诉读者，要定义M上的 $D_V X$，不可机械地将 $\boldsymbol{R}^n$ 中那个"方向导数"搬过来. 须知能搬过来的东西是微分流形结构本身所蕴含的，所以想要定义出M上的 $D_V X$，无疑要在M上附加一个异于微分结构的结构. 干脆设想这个附加结构不多不少正是 $D_V X$. 它自然很像 $\boldsymbol{R}^n$ 中的方向导数,不过又不能太像，以后称之为**联络结构**. 数学中定义一个东西有时采用**"优先权"的方法**，这就是把我们最急于知道的关于那个东西的性质做为定义. 例如$\sqrt{2}$定义为有理数列 $\{q_i\}$ 的等价类，其中 q_i^2

越来越接近 2．我们现在采用此法定义联络．

定义 C^∞ 流形 M 上的一个**联络**就是对每一对 C^∞ 向量场 V, X，指定一个新的 C^∞ 向量场 $\mathrm{D}_V X$，使得它具有方向导数拥有的那三条性质 (C1)—(C3)．在 (C1)—(C3) 中出现的 $\mathrm{D}_V f$ 理解为 Vf．

上述定义表明联络是 $\boldsymbol{R}^n$ 中方向导数概念的推广．换句话说，$\boldsymbol{R}^n$ 中的方向导数是一个特殊的联络（**标准联络**）．为了进一步弄清联络的定义，我们加一些注记．

注记 1．"**联络**"一词，顾名思义，该是联系着一些东西罢．究竟联系什么呢？答案是 M 中各点的切空间．这一点将在以后做详细解释．

注记 2．给定一个联络之后，人们把向量场 $\mathrm{D}_V X$ 称为 X 沿 V 的**协变导数**．因此 D 有时称为**协变微分**．**协变**二字可字面地理解为：随着坐标系的改变而变化．我们知道在经典的文献中不管去做什么都要在局部坐标系中进行，而我们现在定义 D，没有动用局部坐标系．

注记 3．这里我们称之为的联络，在经典文献中有时称为**线性联络**，以区别于**仿射联络**，**射影联络**等等．线性两字用于概括 (C1)，即 $\mathrm{D}_V X$ 对 V 是 C^∞ 函数环上线性的．C^∞ **函数环**是 M 上所有 C^∞ 函数构成的，简记为 $\mathscr{F}(M)$ 或 $\mathscr{F}$，这时我们称 $\mathrm{D}_V X$ 对 V 是 $\mathscr{F}$ **线性的**．

注记 4．性质 (C1) 有这样的推论：如果 V 和 W 是 M 上的向量场，使得对某 $x \in M$，$V(x) = W(x)$，那么

$$(\mathrm{D}_V X)(x) = (\mathrm{D}_W X)(x).$$

习题 2． 证明上述结论．

因注记 4，对于任意 $v \in M_x$，我们可定义 $\mathrm{D}_v X$ 如下：任取 M 上向量场 V，使 $V(x) = v$，则令 $\mathrm{D}_v X \equiv (\mathrm{D}_V X)(x)$，这时的 $\mathrm{D}_v X \in M_x$．