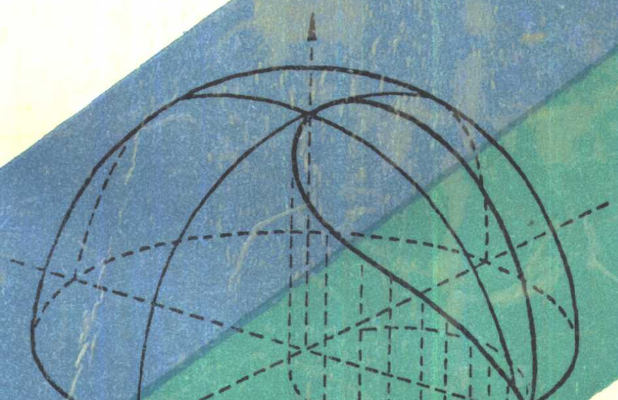
下册

简明高等数学

毛瑞庭　王树禾　编



中国科学技术大学出版社

简明高等数学

下册

毛瑞庭　王树禾　编

中国科学技术大学出版社
1992 合肥

内 容 简 介

本书分上、下两册．系统阐述了一元微积分、多元微积分、空间解析几何、级数和常微分方程的基本概念、基础理论和重要方法及其实际应用．本书论证严谨规范，表达简明流畅，内容深入浅出，例题典型齐全，习题难度恰当．而且每章设有覆盖全章的复习题，书末附有习题答案，同时出版配套的学习指导书《高等数学自学指南》．

本书是按照我国理工科专科高等数学教学大纲和参照安徽省高等数学自学考试大纲，应安徽省教委自学考试指导委员会的约请而编写的．对有志进修理工科专业和参加高等数学自学考试的读者是一本理想的自学教材，亦适用于函大、夜大、职大、电大理工科各专业作课程教材，也可供普通高校理工科师生参考．

（皖）新登字 08 号

简明高等数学

下 册

毛瑞庭　王树禾　编

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路 96号，邮编 230026）

安徽省金寨县印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本：850×1168/32　印张：12.5　字数：324 千

1992年 4 月第 1 版　1992年 4 月第 1 次印刷

印数：1—18000 册

ISBN7-312-00337-0/O.110　定价：5.70 元

目　录

第七章　空间解析几何与向量代数

解析几何用代数的方法来研究几何问题．为此就必须在几何图形与代数方程之间建立起对应关系。在平面解析几何当中，我们曾经通过坐标法把平面上的点与一对有序数组对应，然后再把平面上的图形与方程对应，从而就可以用代数的方法来研究几何问题。空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的。因此也需要把空间图形与代数方程之间建立起对应关系。

空间解析几何的知识是学习多元函数微积分的基础。在研究空间解析几何时，向量代数是一个有力的工具。

本章首先建立空间直角坐标系，介绍向量代数，并以向量为工具讨论空间的平面和直线，最后介绍一些特殊的空间曲面和空间曲线。

§7.1　空间直角坐标系

1　空间点的直角坐标

为了沟通空间几何图形（如曲线，曲面）与代数方程，就必须在空间引进坐标，使空间的点与有序数组相互对应，为此我们引入空间直角坐标系。

过空间一个定点 O，作三条两两相互垂直的直线，在这些直线上取定一个相同的长度单位，再在各条直线上，选定一个方向作为正方向，这样的三条直线统称为**坐标轴**，分别称为 x **轴**（**横轴**），y **轴**（**纵轴**）、z **轴**（**竖轴**）。我们还规定这些坐标轴构成右手系统，即若用右手握住 z 轴，且大姆指指向 z 轴的正方向，则其余四指弯曲的方向表示从 x 轴正向沿最小角度转至 y 轴正向的旋转方

向(图 7.1)。如此建立起来的一个空间直角坐标系称为**右手系**，记成 $Oxyz$。定点 O 称为**坐标原点**。三个坐标轴中的任意两个可以确定一个平面，这样确定出的三个两两相互垂直的平面统称为

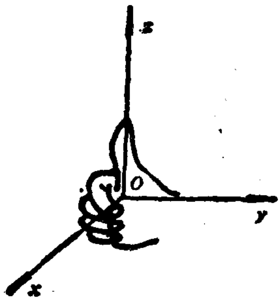


图 7.1

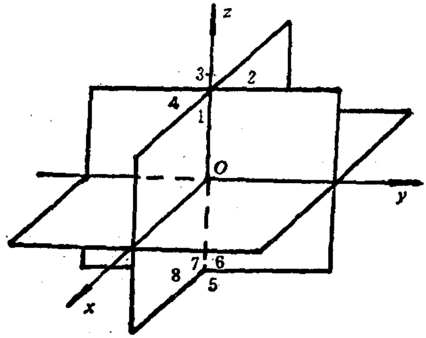


图 7.2

坐标面。由 x 轴及 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 面，由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面分别称为 yOz 面和 zOx 面。三个坐标面把空间分成八个部分，每个部分称为一个卦限。含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限称为**第一卦限**，其它第二、第三、第四卦限，在 xOy 面的上方，依次按逆时针方向确定。第五至第八卦限，在 Oxy 面的下方，在第一卦限之下的是第五卦限，其余的按逆时针方向依次确定。这八个卦限分别用字母 1、2、3、4、5、6、7、8 表示(图 7.2)。

设 P 为空间的任意一点，过 P 分别作垂直于 x 轴、y 轴及 z 轴的三个平面，它们与坐标轴的交点依次为 A、B、C (图 7.3)。设这些交点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x、y、z。于是空间点 P 就唯一的确定了一个有序数组 x, y, z；反之，如果给出一个有序数组 x、y、z，可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 A，在 y 轴上取坐标为 y 的点 B，在 z 轴上取坐标为 z 的点 C。然后过 A、B、C 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面，这三个平面的交点 P，便是由有序数组 x、y、z 所唯一确定的点(图 7.3)。这样，就建立了空间点 P 与

有序数组 x、y、z 之间的一一对应关系。这组数 x、y、z 称为点 P 的坐标，把点 P 记作 $P(x,y,z)$。并依次称 x、y 和 z 为点 P 的横坐标，纵坐标和竖坐标。

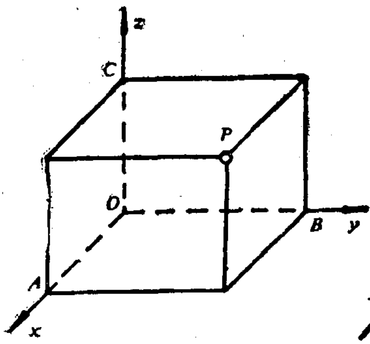


图 7.3

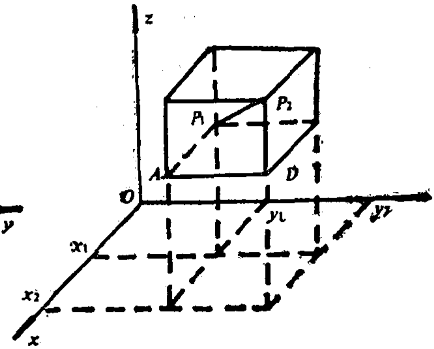


图 7.4

由定义可知，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$，若点 P 在 x 轴上，其坐标为 $(x,0.0)$。同样，对于 y 轴上的点，其坐标为 $(0,y,0)$；对于 z 轴上的点，其坐标为 $(0,0,z)$。若点 P 在平面 xOy 上，其坐标为 $(x,y,0)$；同样，对于平面 zOx 上的点，其坐标为 $(x,0,z)$；对于平面 yOz 上的点，其坐标为 $(0,y,z)$。

2　空间两点的距离

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间的两点，为了用两点的坐标来表达它们之间的距离 d。可过 P_1，P_2 各作三个与坐标轴垂直的平面。这六个平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体（图 7.4）。这个长方体的三条棱长分别为

$$|P_1A| = |x\ -x_1|,\quad |AD| = |y_2-y_1|,\quad |DP_2| = |z_2-z_1|.$$

由于 $\triangle P_1DP_2$ 是直角三角形，因此

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2 &= |P_1A|^2+|AO|^2+|OP_2|^2\\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\end{aligned}$$

所以

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是**空间两点间的距离公式**。

特殊地，点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1 求点 $P_1(1,0,-1)$ 与 $P_2(4,3,-1)$ 之间的距离。

解 $|P_1P_2|=\sqrt{(4-1)^2+(3-0)^2+(-1+1)^2}=3\sqrt{2}$。

例 2 求 z 轴上一点，使与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 的距离相等。

解 设所求的点为 $M(0,0,z)$，则由两点间的距离公式可得

$$|AM|=\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{66-14z+z^2},$$

$$|BM|=\sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2+(z+2)^2}=\sqrt{38+4z+z^2}.$$

由题设 $|AM|=|BM|$，所以

$$66-14z+z^2=38+4z+z^2.$$

解之得 $z=\dfrac{14}{9}$，故所求的点为 $M\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$。

例 3 求证以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形。

证 因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$

$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$

$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

所以 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$，即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形，**证毕**。

习 题 7.1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$A(1,-2,3)$；$B(2,3,-5)$；$C(1,-3,-4)$；$D(-2,-4,1)$。

2. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置。

$A(3,4,0)$; $B(0,4,3)$; $C(3,0,0)$; $D(0,0,4)$。

3．求点(a,b,c)关于(1)各坐标面 (2) 各坐标轴 (3) 坐标原点的对称点的坐标。

4．自点$P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作各坐标轴和坐标面的垂线，写出垂足的坐标。

5．过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作平行于z轴的直线和平行于xOy面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

6．求点$M(4,-3,5)$到各坐标轴的距离。

7．在yOz面上，求与三个已知点$A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$和$C(0,5,1)$等距离的点。

8．试证明以三点$M_1(4,1,9)$、$M_2(10,-1,6)$、$M_3(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形。

§7.2 向 量 代 数

1 向量的概念

在研究力学与物理时，经常遇到这样一些量，仅知道它们数值的大小是不够的，要完全表示它们，还必须同时指出它们的方向，例如位移，速度，力等等。这种既有大小又有方向的量称为**向量**。在数学上往往用一条有方向的线段来表示向量。有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。以A为起点，B为终点的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{AB}$（图7.5）。有时也用小写的粗体字母表示向量，例如向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{i}$…等。

如果两个向量的大小相等、方向相同，就称这两个向量是相等的。如图7.5中，$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{A'B'}$是相等的向量，记作

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}.$$

从两个向量相等的定义可知，一个向量平行移动后，仍为与原来向量相等的向量，所以向量的起点可以放置在空间的任意点。这种可以平行移动至任意起点的向量称为**自由向量**.必须指出，在

实际问题中，除自由向量外，还有非自由向量。例如力它有三要素——大小、方向、着力点，因此力向量的起点是不能自由移动的，因以力是非自由向量。

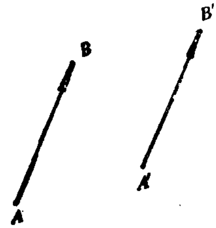


图 7.5

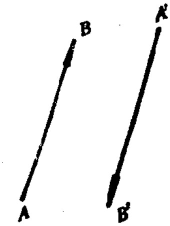


图 7.6

今后，如果没有特别说明，我们只考虑自由向量。

如果两向量的大小相等，方向相反，则称此两个向量为**相反向量**。如图 7.6 中，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 就是相反向量，记作 $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$。因此又称 $\overrightarrow{A'B'}$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 的**负向量**。

向量的大小又称为**向量的模**。向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模用 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示。模为 1 的向量称为**单位向量**，模为零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$。显然零向量的起点与它的终点是重合的，所以没有确定的方向。我们规定，一切零向量都相等。

2 向量的加减法，向量与数的乘法

1）向量的加减法

根据力学实验的结果，两个力的合力满足平行四边形的合成法则。我们把这种力的合成法则加以抽象，就得到向量的加法定义。

定义 7.1 设给定具有共同起点 O 的两个向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$，则以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形的对角线向量 $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$（图 7.7）就称为这两个向量的和，记作

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB},$$

或简写成

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种用平行四边形的对角线向量来规定两个向量的和的方法称为向量加法的**平行四边形法则**。

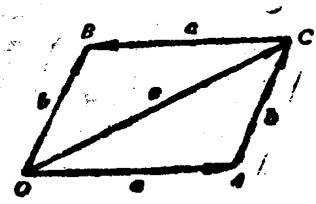


图 7.7

从图 7.7 可知 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，故得

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}.$$

由此可推出两向量相加的另一法则——**三角形法则**：

作向量 $\overrightarrow{OA}$，以向量 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 为起点作向量 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$，则以 O 为起点，C 为终点的封口向量 $\overrightarrow{OC}$ 就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和。

任意向量 $\boldsymbol{a}$ 与零向量 $\boldsymbol{o}$ 的和仍为向量 $\boldsymbol{a}$。即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}.$$

向量的加法满足下列运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

证 (1) 按向量相加的三角形法则，由图 7.7 可知

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}.$$

因此，向量的加法满足交换律。

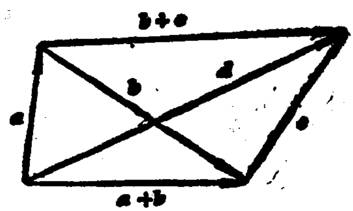


图 7.8

(2) 从图 7.8 不难看出

$$\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},$$

因此，向量加法满足结合律，**证毕**。

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和是向量 $\boldsymbol{c}$，则称向量 $\boldsymbol{b}$ 为向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差，记作

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}.$$

从图 7.7 可知

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{a}),$$

于是得到向量的减法法则：若要从向量 $\boldsymbol{c}$ 减去向量 $\boldsymbol{a}$，只须把 $\boldsymbol{a}$ 的负向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到 $\boldsymbol{c}$ 上去。

2）向量与数的乘法

定义 7.2 设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和数 λ，则其乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 表示这样一个向量，它的模等于向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，而方向当 λ 大于零时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 λ 小于零时与 $\boldsymbol{a}$ 相反（图 7.9）。

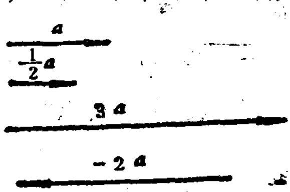


图 7.9

由定义可知，当 λ 为零时 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=0$，所以 $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$。即零与任何向量相乘，其积为零向量。

又因

$$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a},$$

即 -1 与任何向量相乘，其积为该向量的负向量。

利用向量与数的乘积，向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ,$$

其中 $\boldsymbol{a}^\circ$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同向的**单位向量**。由此得到

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

即一个不为零的向量除以它的模是一同向的单位向量。

向量与数的乘积具有下列运算规律：

（1）**结合律** $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$。

（2）**分配律** $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

证 （1）若 λ,μ 中有一个为 0，等式显然成立。不妨假设 λ，μ 全不为零。再对 λ，μ 的不同符号分别来讨论。这里，我们仅对 $\lambda>0$，$\mu<0$ 的情况加以证明。由于 $|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|=|\mu||\lambda\boldsymbol{a}|$，因此 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$，$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 具有相同的模，而且这三个向量都与 $\boldsymbol{a}$ 具有相反的方向。因此，这三个向量

相等。

(2) 分配律的第一个等式显然成立。为证明分配律的第二个等式，不妨假设 $\lambda>0$，($\lambda<0$ 可类似证明）作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。得一三角形 OAB，再作向量 $\lambda\boldsymbol{a}$，$\lambda\boldsymbol{b}$ 的和 $\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 得另一三角形 $O'A'B'$（图 7.10）。因为这两个三角形的边 $O'A'$，$A'B'$ 与边 OA，AB 分别相互平行且成比例，所以这两个三角形是相似的，从而得到向量 $\overrightarrow{O'B'}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 是同向平行的，且模的比值等于 λ，即 $\overrightarrow{O'B'}=\lambda\overrightarrow{OB}$。但 $\overrightarrow{O'B'}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。从而有 $\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，证毕。

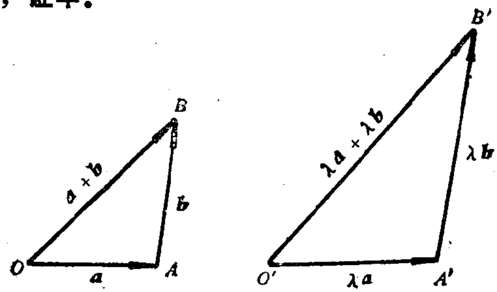


图 7.10

若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互平行，称此**两向量共线**。这时必存在数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，只要取 $\lambda=\pm\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$ 即可；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时取 + 号。当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时取 − 号。反之，若 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 必是平行的，因而它们是共线的，于是得到如下断言：

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在实数 λ 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$。

3 向量的坐标与分解

向量的几何表示虽然形象直观，但用来进行具体的运算却是十分不方便的。下面将要引入向量的坐标表示，并把向量间的运算化成坐标间的相应运算。从而可以更方便地研究向量和它的性质。

1) 向量的坐标