

# 應用泛函分析

JEAN-PIERRE AUBIN 原著

國立編譯館 主編

賴漢卿 譯



大中國圖書公司印行

# 應用泛函分析

原著：Jean-Pierre Aubin

譯者：賴 漢 卿

主譯者：國 立 編 譯 館

大中國圖書公司印行

版權所有  
翻印必究

# 應用泛函分析

譯者：賴 漢 卿  
著作權：國 立 編 譯 館  
所有人：薛 永 成  
發行人：薛 永 成  
出版者：大 中 國 圖 書 公 司  
印刷者

台北市重慶南路一段66號  
電 話：3 3 1 1 4 3 3  
郵政劃撥：0002619-7號

登記證：局版台業字第0653號

中華民國七十四年九月初版

基本定價：六元五角

編號：212

# 前 言

---

本書的目的是提供泛函分析中之諸重要的結果，並探討許多應用如：

1. 在橢圓型及拋物型偏微分方程式中之邊界值問題。
2. 數值分析。
3. 凸分析及非線性分析。
4. 最佳化理論。
5. 對局論及一般在經濟上之平衡條件，以及
6. 系統理論。

為考慮上述諸方面之應用，並保持適當而合理的篇幅限制，我們決定整個工作都在 Hilbert 空間的架構下來進行。這就給我們能以最簡單的形式來證明許多結果，但其價值當然也屬一般性的。特別如弱位相從不用於本書，但荷布則在 Sobolev 空間的架構上介紹。

由這種趨向，我們希望能供讀者之方便，而能以抽象化處理更具體性的問題，同時能引導在應用數學方面的興趣。

本書是試想做為 100 小時課的教本提供給巴黎大學在決策，數學方面的第四、五年級學生的學習課程。

為了易於瞭解本課程材料、度量空間的位相性質是一個很好的知識。應用抽象分析 (Applied Abstract Analysis) 在課本中以 [AAA] 表示，除了第十五章 Brouwer 的固定點定理外，這是一本包含所有用在本書結果之書。雖然如此，開始的符號在第一章前半，本書可自含。

為使盡可能早致力於各種應用方面之材料，在本書中都標有 (\*) 的記號，當第一次讀本書的讀者，如果只要吸取基本概念，可省略付有 (\*) 記號的部分。

類似的，對於較不是本質的結果，而是較偏向研究或可當做練習做出的問題，也都記有 (\*) 記號。

本書主要的結果都蒐集在書末，以示明那些結果可算為本質的。

索引 (述語標示) 是為讀者易於找到所定義之款項在本書的什麼位置。

為應用已建立的結果，預備了兩百個練習題，並具有最常用的性質。

我願表示對 Carole Labrousse 的感謝，感謝她對這第二本書給與最優美的翻譯。

同時也由衷感激 Bernard Cornet 與 Jean-Michel Lasry 的合作以及收集這些練習題。第十五章在非線性分析大部分是 Bernard Cornet 所有的。

**Jean-Pierre Aubin**

**1980 年 3 月於法國巴黎**



# 簡 介

---

## 給與讀者的引介

下面各章的內容綜合如下：因大部分款項在本簡介都沒有嚴格的定義，而以服務性的簡述做爲引導至其一般的內容。

本書可分成叁個部分：第一部分包含第一到五章，提供線性泛函分析的基本抽象結果。在敘說一些基本的結果後，我們在第一章攻讀射影理論，這是特指在 Hilbert 空間的基本結果。第二章涉及凸性集合的分割定理。我們即刻給與一些應用，如 Von Neumann 的大中取小定理， $n$  人對局的 Pareto 最佳化的特徵。對偶性及連續線性算子的轉置則在第三章處理，Lax-Milgram 及 Lions-Stampacchia 等在變分的方程式與不等式之定理都在此被證明。連續線性算子的基本性質在第四章學習。最後到第五章則攻讀 Hilbert 空間的構成方法。在第五章第 4 節，我們還建立構成 Sobolev 空間的一般方法。

第二部分爲第六、七、八、九章，在此我們學到 Hilbert 空間的具體例子（如二次可和函數以及函數及荷布的 Sobolev 空間），還有在分析中的基本算子（微分算子、褶積算子以及 Fonrier 變換）。第

八章則涉及一些函數的近似法。

最後一部分的內容是離異的。第十章介紹給讀者的是凸性分析，最佳化理論之實質的基本結果。事實上本章可以讀了第十三章後再修習。第十一、十二章是攻讀緊緻算子的基礎譜論，以及 Hilbert-Schmidt 算子，如同摘要地研習 Hilbert 張量積。第十三章與十四章涉及研究橢圓型及拋物型微分方程式的邊界值問題（包含橢圓型之單側邊界值問題）。我們特別指出最佳化理論（第十章，第 5 節）與邊界值問題之間存在著變分學簡介的一架構。我們也證明 Pontryagin 原理在控制問題的最佳控制由微分方程式來決定的特徵。算子的微分方程式的處理繼續於線性系統的內向表現中作一扼要的介紹。在一小節中我們介紹橢圓型問題的近似解方法以及引導到數值分析的構成。

最後第十五章是非線性分析的一簡介。我們證明了幾個定理在對應（即多值映射）之臨界點的存在性與固定點的存在性，如同變分的以及擬變分的不等式之解的存在性基本定理，此種技巧最近在應用數學的發展，如力學、經濟、庫存管理的近似處理，以及一般推衝控制等扮演了一重要的規則。本書以處理非協力  $n$  人對局論為終結，且驗證價格平衡在 Walras 經濟模式上的存在。

# 目 錄

## 第一章 射影定理

1-1	Hilbert 空間的定義	2
1-2	回顧連續線性與雙線性算子	9
1-3	由稠密子集的連續線性與雙線性算子的擴張	14
1-4	最優近似定理	17
1-5	直交射影	21
1-6	閉子空間，商空間與 Hilbert 空間的有限積	28
1-7	可列分 Hilbert 空間的直交基底	29

## 第二章 擴張與分隔的定理

2-1	連續綫性與雙綫性算子的擴張	36
2-2	一稠密性判定	38



2-3	分隔定理	39
2-4	有限維空間的分隔定理	40
2-5	支撐函數	41
*2-6	凸性最佳化的對偶定理	45
*2-7	Von Neumann 的大中取小定理	52
2-8	Pareto 最佳化的特徵	60

### 第三章 對偶空間與轉置算子

3-1	— Hilbert 空間的對偶	67
3-2	— Hilbert 空間對偶的認同	71
3-3	算子的轉置	74
3-4	單射（嵌射）算子的轉置	76
3-5	有限積及商空間的對偶，以及閉、稠密子空間、有限積空間的對偶	79
3-6	Lax-Milgram 的定理	84
*3-7	變分的不等式	86
*3-8	$n$ 人二次對局的非協力平衡點	88

### 第四章 Banach 定理與 Banach-Steinhaus 定理

4-1	算子的有界集合之性質	94
4-2	歷遍平均定理	101
4-3	Banach 定理	105
4-4	閉值域定理	110
4-5	左可逆算子的特徵	112
4-6	右可逆算子的特徵	115
*4-7	在線性制限下的二次規劃	121

## 第五章 Hilbert空間的構成

5-1	初始的內積	129
5-2	終了的內積	132
5-3	一軸(轉)空間的正規子空間	133
5-4	算子族的閉族之極小與極大領域	135
*5-5	無界算子與其伴隨算子	140
*5-6	含在一 Hilbert 空間內之前 Hilbert 空間的完備化	143
*5-7	Hausdorff 完備化	144
*5-8	Hilbert 空間的 Hilbert 和	146
*5-9	內插空間	150
*5-10	函數所成 Hilbert 空間的再生核	152

## 第六章 $L^2$ 空間與褶積算子

6-1	二乘方可積函數空間 $L^2(\Omega)$	159
6-2	權數空間 $L^2(\Omega, a)$	162
6-3	空間 $H^s$	164
6-4	$\mathcal{C}_0(\mathbf{R}^n)$ 函數與 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 函數的褶積	167
6-5	褶積算子	172
6-6	以褶積近似	174
*6-7	例題·特徵函數的褶積冪	176
*6-8	例題·多項式的褶積, Appell 多項式	181

## 第七章 單變數函數的Sobolev空間

7-1	空間 $H_0^m(\Omega)$ 與其對偶空間 $H^{-m}(\Omega)$	189
7-2	荷布的定義	190

7-3	荷布的微分	192
7-4	$H_0^m(\Omega)$ 與 $H_0^m(\mathbf{R})$ 之間的關係	197
7-5	Sobolev 空間 $H^m(\Omega)$	200
7-6	$H^m(\Omega)$ 與 $H^m(\mathbf{R})$ 之間的關係	205
*7-7	$H^m(\Omega)$ 之對偶的特徵	209
7-8	縱跡定理	211
7-9	荷布的褶積	213

## 第八章 在函數空間的一些近似方法

8-1	直交多項式的近似法	218
8-2	Legendre, Laguerre, 及 Hermite 多項式	221
8-3	Fourier 級數	225
8-4	以階梯函數的近似法	228
8-5	以片段多項式函數的近似	231
8-6	在 Sobolev 空間中之近似	237

## 第九章 多變數函數的 Sobolev 空間與 Fourier 變換

9-1	Sobolev 空間 $H_0^m(\Omega)$ , $H^m(\Omega)$ 與 $H^{-m}(\Omega)$	244
9-2	無限次可微與急速下降 (遽降) 函數的 Fourier 變換	247
9-3	Sobolev 空間的 Fourier 變換	256
9-4	空間 $H^m(\mathbf{R}_+^n)$ 的縱跡定理	260
9-5	對於空間 $H^m(\Omega)$ 的縱跡定理	271
9-6	緊緻定理	275

## 第十章 凸性分析基礎

10-1	共軛函數	280
------	------	-----

10-2 梯 度	285
10-3 劣微分	289
10-4 對一極小化問題的極值條件	299
*10-5 一極小化問題的 Hamilton 算子與 Lagrange 算子	305

## 第十一章 基礎譜論

11-1 緊緻算子	312
11-2 Riesz-Fredholm 的理論	316
11-3 從一 Hilbert 空間到另一空間的緊緻算子之特徵	320
11-4 Fredholm 不變式	323
*11-5 應用；中間空間的構成	326
*11-6 應用；最優近似法	329
*11-7 用一緊緻算子攝動的同構映射	335

## 第十二章 Hilbert-Schmidt 算子與張量積

12-1 Hilbert-Schmidt 算子的 Hilbert 空間	343
12-2 基本的同構定理	352
12-3 Hilbert 張量積	354
12-4 連續線性算子的張量積	360
12-5 以 $\ell^2$ 作 Hilbert 張量積	366
12-6 以 $L^2$ 作 Hilbert 張量積	367
12-7 以 Sobolev 空間 $H^m$ 作張量積	370

## 第十三章 邊界值問題

13-1 一算子的形式伴隨與 Green 的公式	379
13-2 對雙線性形的 Green 公式	391
13-3 抽象邊界值問題的變分	398

13-4	邊界值問題之例子	407
13-5	Neumann 問題的近似解	415
13-6	形式伴隨的限制與擴張	422
13-7	單面性邊界值問題	427
13-8	變分學的介紹	431
13-9	最佳控制的簡介	437

## 第十四章 微分算子的方程式與算子半羣

14-1	算子的半群	445
14-2	半群之無限小生成元的圈定	453
14-3	微分一算子的方程式	459
14-4	拋物型方程式的邊界值問題	464
14-5	系統理論：內向與外向的表現	466

## 第十五章 非線性分析簡介

15-1	上半域連續對應	478
15-2	一對應之臨界點的存在定理	481
15-3	關於一對應的固定點定理	489
15-4	正規錐與切錐的性質	492
15-5	變分性不等式	497
15-6	擬變分性不等式	500
*15-7	在 $n$ 個人對局的非協力平衡點	503
*15-8	Walras 不等式	505
*15-9	關於對應的 Perron- Frobenius 定理	508

## 附錄 選出的重要結果

第一節	一般性質	513
-----	------	-----

第二節	連續線性算子的性質	515
第三節	分隔定理與極性	517
第四節	Hilbert 空間的構成	519
第五節	緊緻算子	521
第六節	半群算子	523
第七節	Green 的公式	524
第八節	凸性分析與最佳化	526
第九節	非線性分析	530
第十節	大中取小不等式	533
第十一節	Sobolev 空間、褶積，及 Fourier 變換	534

## 練習題

第一章	539
第二章	545
第四章	546
第五章	547
第六章	548
第七章	549
第十章	550
第十一章	554
第十三章	558
第十四章	559
第十五章	562

## 索 引

# 第 1 章

## 射 影 定 理

開始我們再提 Hilbert 空間的定義：隨著我們示明任意有限維空間（這些空間的單位球體恰都是緊緻）都成為 Hilbert 空間。又空間  $\ell^2$  表示二次可和數列之全體時，它也是一 Hilbert 空間。Hilbert 空間的其他例子將給在第六章（平方可和函數之空間）及第七、九章（Sobolev 空間）。

我們在第 2 節也再談連續線性及雙線性算子。

第 3 節攻研由線性及雙線性算子的稠密性之擴張定理，這個定理在本書中常被應用到。

Hilbert 空間的特殊性質都依射影定理來建立；在第 4 節我們示明在 Hilbert 空間一閉凸子集合  $M$  上的最好近似射影算子的存在，也就是說：一映射  $t$ ，對於每一個  $x$ ，隨伴  $M$  的元素中之一最好近似  $\in M$ 。

第 5 節我們研究這些射影算子的性質，於此  $M$  取做一個錐與一向量空間。特別當  $M$  為一閉子空間時，其最好近似射影算子是一具有範數 1 的連續線性算子。我們稱之為直交射影（算子）（Orthogonal

Projector)。

繼續在第 6 節示明一 Hilbert 空間  $V$  的每個閉子空間  $M$ ，每個商空間  $V/M$ ，及每個有限積 Hilbert 空間，都構成一 Hilbert 空間。

在本章最後的第 7 節，示明將一 Hilbert 空間的每一個基底，如何去建立成爲直交單範基底，並研究這些基底的諸性質。

## 1-1 Hilbert 空間的定義

### ——定義 1——

令  $V$  爲一實向量空間，在  $V \times V$  上之一映射

$$\{ x, y \} \in V \times V \rightarrow ((x, y)) \in R$$

被稱爲一個半內積 (Seminner Product) 是這個映射滿足下列諸條件：

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad ((\sum_{i=1}^n \lambda^i x_i, y)) \\ \quad \quad = \sum_{i=1}^n \lambda^i ((x_i, y)) \quad (\text{關於 } x \text{ 線性}) \\ \text{(ii)} \quad ((x, \sum_{i=1}^n \mu^i y_i)) \\ \quad \quad = \sum_{j=1}^m \mu^j ((x, y_j)) \quad (\text{關於 } y \text{ 線性}) \\ \text{(iii)} \quad ((x, y)) = ((y, x)) \quad (\text{對稱}) \\ \text{(iv)} \quad ((x, x)) \geq 0 \quad \forall x \in V \quad (\text{正性}) \end{array} \right.$$

一向量空間  $V$  具有一個半內積  $((,))$ ，寫成  $\{ V, ((,)) \}$  稱爲一不可分割的前 Hilbert 空間 (Nonseparated Prehilbert Space)。一內積 (Inner Product) 是一個對稱雙線性形滿足。

$$(2) \quad \forall x \neq 0, ((x, x)) > 0 \quad (\text{正定})$$

且此時之配對  $\{ V, ((,)) \}$  就稱爲一前 Hilbert 空間 (Prehilbert Space)。





**註 1:**

條件(1)(ii)可捨去，因它是由(1)(i)與(1)(iii)可導出來，條件(2)顯然蘊涵(1)(iv)。 ■

一內積定義一範數，因而賦予一距離函數定義在  $V$  上。為要證明此結果，我們需要 Cauchy-Schwarz 不等式。

**——命題 1 (Cauchy-Schwarz 不等式)——**

若  $((x, y))$  為一個半內積，則

$$(3) \quad |((x, y))| \leq \sqrt{((x, x))} \sqrt{((y, y))}, \\ \forall x, y \in V \quad \blacktriangle$$

**證 明:**

首先假設  $((y, y)) > 0$ ，展開  $((y, y))((x + \lambda y, x + \lambda y)) \geq 0$ ，我們得

$$((y, y))((x, x)) + \lambda^2((y, y))^2 + 2\lambda \\ ((y, y))((x, x)) \geq 0$$

$\lambda$  代以  $-((x, y))/((y, y))$  我們便得所要的不等式。同樣結果也適用於  $((x, x)) > 0$ 。今若  $((x, x)) = ((y, y)) = 0$ ， $((x + \lambda y, x + \lambda y))$  的展開乃導至  $2\lambda((x, y)) \geq 0$ 。取  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ ，則導出  $((x, y)) = 0$ 。 ■

這個不等式的第一結論是  $\sqrt{((x, x))}$  為一個半範數 (Semi-norm)。

**——命題 2——**

若  $((x, y))$  為一個半內積，則  $\|x\| = \sqrt{((x, x))}$  是一個半範數。如果  $((x, y))$  是一個內積，則  $\|x\|$  是一個範數。

**證 明:**

此證明隨  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  而得，此不等式來自Cauchy-