應用泛函分析

JEAN-PIERRE AUBIN 原著

國立編譯館 主編

賴漢卿 譯

大中國圖書公司印行

應用泛函分析

原　著：Jean-Pierre Aubin

譯　者：賴　漢　卿

主譯者：國　立　編　譯　館

大中國圖書公司印行

應用泛函分析

譯　者：賴　漢　卿
著作權所有人：國　立　編　譯　館
發行人：薛　永　成
出版者印刷者：大中國圖書公司
台北市重慶南路一段66號
電　話：3311433
郵政劃撥：0002619-7號

登記證：局版台業字第0653號

中華民國七十四年九月初版

基本定價：六元五角

編號：212

前　言

本書的目的是提供泛函分析中之諸重要的結果，並探討許多應用如：

1. 在橢圓型及拋物型偏微分方程式中之邊界值問題。
2. 數值分析。
3. 凸分析及非線性分析。
4. 最佳化理論。
5. 對局論及一般在經濟上之平衡條件，以及
6. 系統理論。

為考慮上述諸方面之應用，並保持適當而合理的篇幅限制，我們決定整個工作都在 Hilbert 空間的架構下來進行。這就給我們能以最簡單的形式來證明許多結果，但其價值當然也屬一般性的。特別如弱位相從不用於本書，但荷布則在 Sobolev 空間的架構上介紹。

由這種趨向，我們希望能供讀者之方便，而能以抽象化處理更具體性的問題，同時能引導在應用數學方面的興趣。

本書是試想做爲~~100小時課的教本~~提供給巴黎大學在決策，數學方面的第四、五年級學生的學習課程。

爲了易於瞭解本課程材料、度量空間的位相性質是一個很好的知識。~~應用抽象~~分析（Applied Abstract Analysis）在課本中以〔AAA〕表示，除了第十五章 Brouwer 的固定點定理外，這是一本包含所有用在本書結果之書。雖然如此，開始的符號在第一章前半，本書可自含。

爲使盡可能早致力於各種應用方面之材料，在本書中都標有（＊）的記號，當第一次讀本書的讀者，如果只要吸取基本概念，可省略付有（＊）記號的部分。

類似的，對於較不是本質的結果，而是較偏向研究或可當做練習做出的問題，也都記有（＊）記號。

本書主要的結果都蒐集在書末，以示明那些結果可算爲本質的。

索引（述語標示）是爲讀者易於找到所定義之款項在本書的什麼位置。

爲應用已建立的結果，預備了兩百個練習題，並具有最常用的性質。

我願表示對 Carole Labrousse 的感謝，感謝她對這第二本書給與最優美的翻譯。

同時也由衷感激 Bernard Cornet 與 Jean-Michel Lasry 的合作以及收集這些練習題。第十五章在非線性分析大部分是 Bernard Cornet 所有的。

Jean-Pierre Aubin

1980 年 3 月於法國巴黎

簡　介

給與讀者的引介

下面各章的內容綜合如下：因大部分款項在本簡介都沒有嚴格的定義，而以服務性的簡述做爲引導至其一般的內容。

本書可分成叁個部分：第一部分包含第一到五章，提供線性泛函分析的基本抽象結果。在敍說一些基本的結果後，我們在第一章攻讀射影理論，這是特指在 Hilbert 空間的基本結果。第二章涉及凸性集合的分割定理。我們即刻給與一些應用，如 Von Neumann 的大中取小定理，n 人對局的 Pareto 最佳化的特徵。對偶性及連續線性算子的轉置則在第三章處理，Lax-Milgram 及 Lions-Stampacchia 等在變分的方程式與不等式之定理都在此被證明。連續線性算子的基本性質在第四章學習。最後到第五章則攻讀 Hilbert 空間的構成方法。在第五章第 4 節，我們還建立構成 Sobolev空間的一般方法。

第二部分爲第六、七、八、九章，在此我們學到 Hilbert 空間的具體例子（如二次可和函數以及函數及荷布的 Sobolev空間），還有在分析中的基本算子（微分算子、褶積算子以及 Fonrier變換）。第

八章則涉及一些函數的近似法。

最後一部分的內容是離異的。第十章介紹給讀者的是凸性分析，最佳化理論之實質的基本結果。事實上本章可以讀了第十三章後再修習。第十一、十二章是攻讀緊緻算子的基礎譜論，以及Hilbert-Schmidt 算子，如同摘要地研習 Hilbert 張量積。第十三章與十四章涉及研究橢圓型及拋物型微分方程式的邊界值問題（包含橢圓型之單側邊界值問題）。我們特別指出最佳化理論（第十章，第 5 節）與邊界值問題之間存在著變分學簡介的一架構。我們也證明 Pontryagin 原理在控制問題的最佳控制由微分方程式來決定的特徵。算子的微分方程式的處理繼續於線性系統的內向表現中作一扼要的介紹。在一小節中我們介紹橢圓型問題的近似解方法以及引導到數值分析的構成。

最後第十五章是非線性分析的一簡介。我們證明了幾個定理在對應（即多值映射）之臨界點的存在性與固定點的存在性，如同變分的以及擬變分的不等式之解的存在性基本定理，此種技巧最近在應用數學的發展，如力學、經濟、庫存管理的近似處理，以及一般推衡控制等扮演了一重要的規則。本書以處理非協力 n 人對局論爲終結，且驗證價格平衡在 Walras 經濟模式上的存在。

目　錄

第一章　射影定理

第二章　擴張與分隔的定理

第三章 對偶空間與轉置算子

第四章 Banach定理與Banach-Steinhaus定理

第五章 Hilbert空間的構成

第六章 L^2空間與摺積算子

第七章 單變數函數的Sobolev空間

第八章 在函數空間的一些近似方法

第九章 多變數函數的Sobolev空間與Fourier變換

第十章 凸性分析基礎

第十一章　基礎譜論

第十二章　Hilbert-Schmidt 算子與張量積

第十三章　邊界值問題

第十四章 微分算子的方程式與算子半羣

第十五章 非線性分析簡介

附錄 選出的重要結果

練習題

索　引

第1章

射影定理

開始我們再提Hilbert 空間的定義：隨著我們示明任意有限維空間（這些空間的單位球體恰都是緊緻）都成爲Hilbert空間。又空間ℓ^2表示二次可和數列之全體時，它也是一Hilbert 空間。Hilbert空間的其他例子將給在第六章(平方可和函數之空間)及第七、九章(Sobolev空間)。

我們在第 2 節也再談連續線性及雙線性算子。

第 3 節攻研由線性及雙線性算子的稠密性之擴張定理，這個定理在本書中常被應用到。

Hilbert 空間的特殊性質都依射影定理來建立；在第 4 節我們示明在Hilbert 空間一閉凸子集合M上的最好近似射影算子的存在，也就是說：一映射 t ，對於每一個 x ，隨伴M的元素中之一最好近似$\in M$ 。

第 5 節我們研究這些射影算子的性質，於此M取做一個錐與一向量空間。特別當M爲一閉子空間時，其最好近似射影算子是一具有範數 1 的連續線性算子。我們稱之爲**直交射影**（算子）（Orthogonal

Projector)。

繼續在第 6 節示明一Hilbert空間V的每個閉子空間M，每個商空間 V/M，及每個有限積Hilbert 空間，都構成一Hilbert 空間。

在本章最後的第 7 節，示明將一Hilbert空間的每一個基底，如何去建立成爲直交單範基底，並硏究這些基底的諸性質。

1-1 Hilbert空間的定義

定義 1

令V爲一實向量空間，在$V \times V$上之一映射

$$\{x, y\} \in V \times V \to ((x, y)) \in R$$

被稱爲一個**半內積**(Semimnner Product)是這個映射滿足下列諸條件：

$$(1)\begin{cases} \text{(i)} & \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i x_i, y\right)\right) \\ & = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i ((x_i, y)) \quad (\text{關於 } x \text{ 線性}) \\ \text{(ii)} & \left(\left(x, \sum_{i=1}^{n} \mu^i y_i\right)\right) \\ & = \sum_{j=1}^{m} \mu^j ((x, y_j)) \quad (\text{關於 } y \text{ 線性}) \\ \text{(iii)} & ((x, y)) = ((y, x)) \quad (\text{對稱}) \\ \text{(iv)} & ((x, n)) \geq 0 \quad \forall x \in V \quad (\text{正性}) \end{cases}$$

一向量空間V具有一個半內積((,))，寫成$\{V, ((,))\}$稱爲一**不可分割的前Hilbert空間**(*N*onseparated Prehilbert Space)。一內積(Inner Product)是一個對稱雙線性形滿足。

(2) $\forall x \neq 0, ((x, x)) > 0$ (正定)

且此時之配對$\{V, ((,))\}$就稱爲一前Hilbert 空間(Prehilbert Space)。 ▲

註　1：

條件(1)(ii)可捨去，因它是由(1)(i)與(1)(iii)可導出來，條件(2)顯然蘊涵(1)(iv)。 ■

一內積定義一範數，因而賦予一距離函數定義在V上。爲要證明此結果，我們需要Caucby-Schwarz不等式。

——命題 1　(Caucby-Schwarz 不等式)——

若$((x,y))$爲一個半內積，則

(3)　$|((x,y))| \leq \sqrt{((x,x))}\sqrt{((y,y))}$,

$\forall x, y \in V$ ▲

證　明：

首先假設$((y,y))>0$，展開$((y,y))((x+\lambda y, x+\lambda y))\geq 0$，我們得

$$((y,y))((x,x))+\lambda^2((y,y))^2+2\lambda((y,y))((x,x))\geq 0$$

λ代以$-((x,y))/((y,y))$我們便得所要的不等式。同樣結果也適用於$((x,x))>0$。今若$((x,x))=((y,y))=0$，$((x+\lambda y, x+\lambda y))$的展開乃導至$2\lambda((x,y))\geq 0$。取$\lambda=\pm\frac{1}{2}$，則導出$((x,y))=0$。 ■

這個不等式的第一結論是$\sqrt{((x,x))}$爲一個半範數(Semi-norm)。

——命題 2——

若$((x,y))$爲一個半內積，則$\|x\|=\sqrt{((x,x))}$是一個半範數。如果$((x,y))$是一個內積，則$\|x\|$是一個範數。

證　明：

此證明隨$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$而得，此不等式來自Cauchy-