目　　　录

第一章　数的基础知识……………………………………………… 1

§1.　自然数与数学归纳法………………………………… 2
§2.　奎数的奎除性……………………………………………11
§3.　最大公约……………………………………………17
§4.　质因数分解定理……………………………………23
§5.　复数……………………………………………27
§6.　数环与数域……………………………………………46

第二章　行列式……………………………………………51

§1.　二阶行列式……………………………………………52
§2.　排列的奇偶性……………………………………………60
§3.　n 阶行列式的定义……………………………………65
§4.　行列式的性质……………………………………………74
§5.　行列式按一行（列）的巳开…………………………84
§6.　拉普拉斯(*Laploce*)定理，行列式乘法…………………99
§7.　克莱姆(*Cramer*)法则……………………………… 104

第三章　一般线性方程组……………………………………… 110

§1.　矩阵的初等变换与消去法…………………………… 110
§2.　矩阵的秩数……………………………………………… 124
§3.　一般线性方程组的相容性判别法…………………… 131
§4.　n 维向另空间与子空间………………………………… 139
§5.　基底、维数与齐次线性方程组的基础解系………… 149

第四章　一元多项式…………………………………………………… 160

§1.　一元多项式的定义及运算………………………………… 160
§2.　整除的概念和带余除法……………………………………… 163
§3.　最大公因式…………………………………………………… 169
§4.　多项式的因式分解…………………………………………… 177
§5.　重因式………………………………………………………… 182
§6.　多项式的根…………………………………………………… 189
§7.　复系数多项式的根式解……………………………………… 197
§8.　实系数多项式根的圈定……………………………………… 202
§9.　有理系数多项式的可约性和有理根………………………… 214
§10.　部分分式……………………………………………………… 223

第五章　多元多项式…………………………………………………… 229

§1.　多元多项式的定义及运动…………………………………… 229
§2.　对称多项式…………………………………………………… 235
§3.　结式　消元法　判别式……………………………………… 241

第六章　集合与映射 ………………………………………………… 252

§1.　集合…………………………………………………………… 254
§2.　映射…………………………………………………………… 259
§3.　代数运算……………………………………………………… 264
§4.　分类…………………………………………………………… 275

第一章　数的基础知识

从小学到中学关于数的知识，是从自然数开始的，以后又学了分数、有理数和实数，本章将在过去的基础上，把已学过的数的知识简单地加以复习和整理，然后作一些补充．介绍数学归纳法、整数的整除性理论和复数及其运算性质．

我们知道，数起源于数东西．一个一个地去数：因而产生了自然数；1,2,3,…．自然数也叫正整数．

只有自然数远远不能满足客观上的需要．人们在生活和生产实践中，常常需要把若干个东西平均分开，这时自然数就不够用了．因而产生了分数．进一步，为了表示具有相反意义的量而产生了负数．

自然数，正分数，0，负整数和负分数统称为有理数．对于有理数来说，任意二有理数的和、差、积、商（分母不为0）仍然是有理数，也就是说，加、减、乘、除四种运算在有理数范围内是可以施行的．通常，我们把这一性质叙述为，所有有理数对于四则运算是封闭的．

随着生产的发展和人们认识的不断深入，和自然数，分数一样，对于客观上不断提出的新问题，有理数也远远不能满足需要．从几何方面来说，有许多线段的长度不能用有理数表示出来，例如边为单位长的正方形的对角线的长度，就不能用有理数表示．从代数方面来说，就是连 $x^2=2$ 这样简单的二次方程都没有有理根．所以为了解决客观上这些实际问题的需要，产生了无理数．有理数和无理数统称为实数．所有实数对于四则运算也是封闭的．

对于客观上不断地提出的新问题，同样实数也未能满足需要，又产生了复数．关于复数将在本章专门进行讨论．

§1　自然数与数学归纳法

本节主要介绍在数学证明中，常用而且非常重要的证明方法——数学归纳法.

为以后讨论方便起见，引入集合的概念. 关于集合还要在第六章作更深入的讨论.

集合，我们把它作为不定义的概念. 把所讨论的对象的总体叫做**集合**. 而组成此集合的每个对象，叫做集合的**元素**.

通常用字母：$M, N, \cdots$表示集合，集合中的元素用小写字母表示. 当x是集合M中的元素时，则记作：

$$x \in M \quad 或 M \ni x$$

读作x属于M. 若y不是集合M的元素，则记作

$$y \bar{\in} M \quad 或 \quad M \bar{\ni} y$$

读作y不属于M.

下百看几个例子

例 1

1）　所有自然数是一个集合，叫做自然数集.

2）　所有整数是一个集合，叫做整数集.

3）　所有有理数是一个集合，叫做有理数集.

4）　所有实数是一个集合，叫做实数集.

例 2　m是自然数，使$-m \leqslant x \leqslant m$的所有整数$x$构成一集合，属于此集合的元素是不小于$-m$而不大于$m$的整数.

例 3　$\{1,2,4,5\}$也是一个集合.

设M是若干个数所构成的集合，如果$l \in M$，而且对于M中的每一元素x（我们采用记号$\forall x \in M$），有：

$$l \leqslant x$$

则l称作M的**最小数**.

例如

集合$\{1,3,5,7,8\}$的最小数是1.

集合$\{-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$的最小数是$-3$.
在数集,$\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$没有最小数.

对于有限个数所组成的数集来说，显然一定有最小数. 但是，由无限个数所组成的数集来说就不一定，有的数集有最小数，有的数集没有最小数.

如果数集M是由自然数组成的，就能肯定一定有最小数. 一般地，有

定理1（最小数原理）由若干个自然数所构成的集合M，必有最小数.

证明

在M中任取元素m，由于m是自然数，所以在自然数集中，小于m的自然数只有

$1,2,3,\cdots,m-1$.

因此，在M中不大于m的自然数最多有m个，设这些不大于m的自然数是：

$$x_1,x_2,\cdots,x_r \qquad x_i\leqslant m \qquad x_i\in M. \tag{1}$$

显然在$x_1,x_2,\cdots,x_r$这组数中有最小的，设它是x_1，我们来说明x_1是M最小数.

首先，$x_1\in M$.

其次$\forall x\in M$，x可能是（1）中的某一个，这时显然有$x_1\leqslant x$. 若x不是（1）中的数时，那么由（1）的构成x必大于m. 所以$x_1\leqslant x$. 定理得证.

根据自然数的上述性质，介绍数学归纳法，

先看一个例子.

例4　自然数集：$1,2,3,4,5,\cdots$中前n个奇数之和：$f(n)=1+3+5+\cdots+(2n-1)$

当$n=1$时　$f(1)=1=1^2$

$n=2$时　$f(2)=1+3=4=2^2$

$n=3$时　$f(3)=1+3+5=9=3^2$

$n=4$时　$f(4)=1+3+5+7=16=4^2$

$n=5$ 时　$f(5)=1+3+5+7+9=25=5^2$

归纳上面的结果，很自然会得出下面的想法：自然数集中前 n 个奇数之和等于 n^2：

$$f(n)=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \qquad (2)$$

由于自然数有无限多个，而对无限多个自然数逐个都作验证是不可能的，所以要说明上述结论对任意自然数 n 都成立，就不能象上面那样采取逐个验证的方法，必须加以证明．这样，就需要一种通过“有限”的步骤，证明对“无限”多个自然数结论都成立的方法．数学归纳法就是这样一种数学证明方法，它有两种形式．

定理 2（第一数学归纳法原理）

$P(n)$ 是与自然数 n 有关的命题。如果

（1）命题 $P(n)$ 在 $n=n_0$ 时成立（此处 n_0 是一确定的自然数，多数情况下 n_0 为 1）．

（2）假设 $P(n)$ 在 $n=k\geqslant n_0$ 时成立，能证出：$P(n)$ 在 $n=k+1$ 时也成立。

则可断言命题 $P(n)$ 对于所有 $\geqslant n_0$ 的自然数都成立．

利用第一数学归纳法，如果对上面的（2）式能作到：

（1）$f(n)$　在 $n=1$ 时成立：$f(1)=1^2$（此处 $n_0=1$）

（2）假设 $f(n)$ 在 $n=k\geqslant 1$ 时成立：$f(k)=k^2$，能证出：$f(k+1)=(k+1)^2$

则由第一数学归纳法原理，就可断言：前 n 个奇数之和等于 n^2 这一结论对于所有 $\geqslant 1$ 的自然数，即对所有自然数都成立．

下面我们具体作一下看．

（1）在 $n=1$ 时，$f(1)=1=1^2$，即 $f(n)=n^2$ 在 $n=1$ 时成立．

（2）假设 $f(n)$ 在 $n=k$ 时成立，即

$f(k)=1+3+\cdots+(2k-1)=k^2$

去推证 $n=k+1$ 时 $f(k+1)=(k+1)^2$ 成立，即须证明：

$$f(k+1)=1+3+\cdots+[2(k+1)-1]-1=(k+1)^2$$

因为，
$$\begin{aligned}f(k+1)&=1+3+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]\\&=[1+3+\cdots+(2k-1)]+[2(k+1)-1]\end{aligned}$$

上式中的第一个括号是

$$1+3+\cdots+(2k-1)=f(k)$$

由（2）中的假设，$f(k)=k^2$，所以

$$\begin{aligned}f(k+1)&=k^2+[2(k+1)-1)]\\&=k^2+2k+2-1=k^2+2k+1\\&=(k+1)^2\end{aligned}$$

上式表明，$f(n)$ 在 $n=k+1$时也成立.

于是，由第一数学归纳法原理. 例 4 的结论对于所有自然数都成立.

定理 2 的证明.

用反证法，假定在满足（1),(2) 的前提下，$P(n)$ 对于所有 $n\geqslant n_0$的自然数不都成立，即$P(n)$ 对某些$\geqslant n_0$ 的自然数不成立. 令M是所有使 $P(n)$ 不成立的自然数所构成的集合.（M显然有性质：若 $m\in M$，则 $P(n)$在 $n=m$时不成立，反之 $P(n)$ 在 $n=m_1$ 时成立，则 $m_1\bar{\in} M$）.

由于M是若干个自然数所构成的集合（M不会是空的），所以由最小数原理（定理 1），M有最小数 l：$l\in M$，$\forall x\in M$，总有 $x\geqslant l$.

这时可看出 l 有性质：

1) $l>n_0$（因为由（1）$P(n)$ 在 $n=n_0$ 时成立）

从而 $l-1\geqslant n_0$

2) $P(n)$ 在 $n=l-1$ 时成立.

这是因为，若 $P(n)$ 在 $n=l-1$时不成立，则有：$l-1\in M$，

而 $l-1<l$，与 l 是M的最小数相矛盾.

这样一来，我们得出：$P(n)$ 在$n=l-1(\geqslant n_0)$ 时成立，由（2）则有 $P(n)$ 在 $n=l$ 时成立. 所以 $l\bar{\in} M$,这与 l 是M的最小数相矛盾.于是定理 2 得证.

例 5 用第一数学归纳法证明：对任意自然数

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}. \tag{3}$$

证明. 此式是一与自然数有关的命题.

(1) 当$n=1$时，(3) 式左边$=1$，右边$=\frac{(1+1)\times 1}{2}=1$，所以，当$n=1$时式成立.

(2) 假设（3）式在$n=k$时成立，即

$$1+2+\cdots+k=\frac{(1+k)k}{2}$$

推证在$n=k+1$时 (3) 式成立，即要证：$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{[1+(k+1)](k+1)}{2}=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$成立.

因为，

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=(1+2+\cdots+k)+(k+1) \tag{4}$$

对 $1+2+\cdots+k$ 应用（2）中假设：

$$1+2+\cdots+k=\frac{(1+k)k}{2}$$

代入（4）式，则有：

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(1+k)k}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{(1+k)k+2(k+1)}{2}=\frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

上式表明，（3）式在$n=k+1$时，成立.

于是由第一数学归纳法原理，（3）式对所有$\geqslant 1$的自然数都成立，即对任意自然数都成立.

例 6 证明：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ （5）

对所有自然数都成立.

证明. 用第一数学归纳法.

(1) 当$n=1$时，(5) 式左边$=1^3=1$，右边$=\left(\frac{1\times(1+1)}{2}\right)^2=1^2=1$

所以，在$n=1$时（5）式成立.（此处$n_0=1$）

(2) 假设在$n=k$时(5)式成立，即有：

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 \quad (6)$$

去证明：$n=k+1$时，(5)式成立.

当$n=k+1$时，(5)式左边为：

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=(1^3+2^3+\cdots+k^3)+(k+1)^3$

由(2)中假设有(6)式成立，代入上式右边第一个括号中，则有

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3 \quad =\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2+[k^2+4(k+1)]}{4}=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left[\frac{(k+1)(1+2)}{2}\right]^2$$

上式表明，当$n=k+1$时，(5)式成立. 所以(5)式对所有自然数都成立.

以后为叙述方便，我们称归纳法原理中条件(2)中的假设为归纳假设，当完成了条件(1)和(2)的证明后，“根据归纳法原理”的字样可略去，直接得出结论即可.

例 7 用数学归纳法证明二项式定理：

$$(x+y)^n=c_n^0x^n+c_n^1x^{n-1}y+c_n^2x^{n-2}y^2+\cdots+c_n^{n-1}xy^{n-1}+c_n^ny^n \quad (7)$$

证明：

当$n=1$时，(7)式左边$=x+y$，右边$=c_1^0x^1+c_1^1y^1=x+y$ 公式(7)成立.

(2) 归纳假定$n=k$时(7)式成立，即有

$$(x+y)^k=c_k^0x^k+c_k^1x^{k-1}y+c_k^2x^{k-2}y^2+\cdots+c_k^{k-1}xy^{k-1}+c_k^ky^k$$

去证明$n=k+1$时(7)式成立.

因为，$(x+y)^{k+1}=(x+y)^k(x+y)$

由归纳假定 $\quad =(c_k^0x^k+c_k^1x^{k-1}y+c_k^2x^{k-2}y+$

$$+\cdots+C_k^{k-1}xy^{k-1}+C_k^ky^k)\times(x+y)$$

$$=(C_k^0x^{k+1}+C_k^1x^ky+C_k^2x^{k-1}y^2+\cdots+C_k^{k-1}x^2y^{k-1}+C_k^kxy^k)+$$

$$+(C_k^0x^ky+C_k^1x^{k-1}y^2+\cdots+C_k^{k-2}x^2y^{k-1}+C_k^{k-1}xy^k+C_k^ky^{k+1})$$

$$=C_k^0x^{k+1}+(C_k^0+C_k^1)x^ky+(C_k^1+C_k^2)x^{k-1}y^2+\cdots+(C_k^{k-2}+$$

$$+C_k^{k-1}+)x^2y^{k-1}+(C_k^{k-1}+C_k^k)xy^k+C_k^ky^{k+1}$$

因为

$C_k^0=C_{k+1}^0$, $C_k^{r-1}+C_k^r=C_{k+1}^r$, $C_k^k=C_{k+1}^{k+1}$,

所以有：

$(x+y)^{k+1}=C_{k+1}^0x^{k+1}+C_{k+1}^1x^ky+\cdots+C_{k+1}^kxy^k+C_{k+1}^{k+1}y^{k+1}$

即当$n=k+1$时（7）式成立．所以（7）式对所有自然数都成立．

对于某些与自然数有关的命题证明，需要采用数学归纳法的另一种形式——第二数学归纳法．

定理 3 （第二数学归纳法原理）

$P(n)$ 是与自然数有关的命题，如果

（1） $P(n)$在$n=n_0$时成立（n_0是确定的自然数，常取为 1 ）

（2） 假设$P(n)$对于所有$\leqslant k(\geqslant n_0)$ 的自然数成立，能证明$P(n)$在$n=k+1$时成立。

则命题 $P(n)$ 对所有$\geqslant k_0$ 的自然数都成立．

第二数学归纳法与第一数学归纳法的内容是类似的，所差的只是归纳假定，在第二数学归纳法中是要求对所有$\leqslant k$ 命题$P(n)$ 成立．

证明

用反证法，假定在满足（1），（2）的前提下，$P(n)$对于所有$n\geqslant n_0$的自然数不都成立，即$P(n)$ 对某些$\geqslant n_0$ 的自然数不成立．令M是所有使$P(n)$不成立的自然数所构成的集合．由定理 1 M有最小数l，则$P(n)$ 对于所有$\leqslant l-1$ 的自然数都成立，由（2）则 $P(n)$ 在$n=(l-1)+1=l$ 时成立．与$P(n)$ 在$n=l$ 时不成立相矛盾，所以$P(n)$ 在满足（1）、（2）的前提下，对于所有$\geqslant n_0$ 的自然数都成立．

例 8 用第二数学归纳法证明：任忈$\geqslant 8$ 自然数可表为：

$n=3\lambda+5\mu$，其中λ，μ为非负奎数．

证明

在本例中，取 $n_0=8$.

(1) 当 $n=8$ 时，则有

$$n=3\times 1+5\times 1$$

故命题成立.

(2) 假定对于所有 $\leqslant k(\geqslant 8)$ 的自然数命题成立：去证对 $k+1$ 命题成立. 考虑 $(k+1)-3$

若 $(k+1)-3\geqslant 8$，因为 $(k+1)-3=k-2<k$，

所以由归纳假定有：

$(k+1)-3=3\lambda+5\mu$，其中 λ，μ 为非负整数，

从而有

$k+1=3(\lambda+1)+5\mu=3\lambda_1+5\mu$，其中 $\lambda_1=\lambda+1$，

所以当 $(k+1)-3\geqslant 8$ 时命题对 $k+1$ 成立.

若 $k+1-3<8$，则由 $k\geqslant 8$ 得：$k+1=9$ 或 $k+1=10$.

当 $k+1=9$ 时有 $9=3\times 3+5\times 0$

$k=10$ 时有 $10=3\times 0+5\times 2$

所以 $(k+1)-3<8$ 时，命题对 $k+1$ 成立. 因此命题对所有 $\geqslant 8$ 的自然数都成立.

在使用数学归纳法作证明时，必须注意定理 2 和定理 3 中的（1）和（2）两个步骤. 缺少任何一个都是不行的. 下面通过一个例子来说明这一点. 计算 $f(n)=(n^2-5n+5)^2$ 的值：

$$f(1)=(1^2-5\times 1+5)^2=1$$

$$f(2)=(2^2-5\times 2+5)^2=1$$

$$f(3)=(3^2-5\times 3+5)^2=1$$

$$f(4)=(4^2-5\times 4+5)^2=1$$

如果从此就作出："n 是任意自然数时，$f(n(=(n^2-5n+5)^2$ 的值都等于 1" 的结论，就是错误的，因为 $f(5)=(5^2-5\times 5+5)^2=5^2=25\neq 1$.

产生错误是因为没有验证（2）是否成立.

不验证（1）也会导出错误的结论.

例如在本节例 4 中已知

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

如果不验证（1）只验证（2）将得出下百的错误结论：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2+1.$$

假定在$n=k$时上式成立，去证明$n=k+1$时上式成立.

因为在$n=k+1$时，

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]\\&=[1+3+5+\cdots+(2k-1)]+[2(k+1)-1]\\&=(k^2+1)+2k+1\ \text{(由归纳假定)}\\&=(k+1)^2+1\end{aligned}$$

即在$n=k+1$时

$$1+3+5+\cdots+[2(k+1)-1]=(k+1)^2+1.$$

由此得出：$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2+1$ 对所有自然数都成立，就是一个错误的结论.

所以用数学归纳法作证明，(1),(2) 两个条件必须都作验证，一般来说，（1）是递推的基础，（2）是递推的依据，缺少任何一个都是不行的. 要掌握数学归纳法必须反复应用它去证明一些问题才行.

习　　题

用第一数学归纳法证明.

1. $a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-1}=\dfrac{a_1-a_1r^n}{1-r}$　　$(r\neq 1)$

2. 等差级数$a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$

3. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$

4. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2}$

5. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$

6. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

7. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

8. 凸 n 边形的内角和等于 $(n-2)\pi$

9. $2^n>n$

10. $2^n>n^2$ $(n\geqslant 5)$

11. $(1+a)^n>1+na$ 其中 $a>-1$ 且 $a\neq 0$，$n>1$ 的自然数

12. $|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

13. $|a_1a_2\cdots a_n|=|a_1||a_2|\cdots|a_n|$

14. $a(b_1+b_2+\cdots+b_n)=ab_1+ab_2+\cdots+ab_n$

用第二数学归纳法证明：

15. 证明：n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，在一定次序下，各种打括号所作出的和（或乘积）都相等：

$$((a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots)a_n=((a_1+(a_2+a_3))+\cdots)$$
$$=(a_1+(a_2+(a_3+a_4))+\cdots+)=\cdots$$
$$((a_1a_2)a_3)\cdots)a_n)=(\cdots(a_1(a_2a_3))\cdots)a_n=\cdots$$

16. 证明：n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，按任意次序所作的和（或积）都相等.

7. 设 $a_1=3$，$a_2=7$，$\cdots$，$a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$ $(n=3,4,\cdots)$ 证明：$a_n=2^{n+1}-1$，对所有自然数都成立.

§2　整数的整除性

我们知道，

自然数：$1,2,3,\cdots$

0

负整数：$-1,-2,-3,\cdots$

统称为整数.

在整数范围内，任意二整数的和，差，积仍是整数. 也就是说，整数

集关于加、减、乘三种运算封闭.

但是整数除整数就不一定得整数. 例如$\frac{3}{2}$就不是整数. 那么，在什么情况下，一整数整除另一整数呢？这个问题就是整数的整除性问题. 本节和下一节将讨论整数的整除性及其有关的问题.

本节，我们用$a,b,c,\cdots$或$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$等字母代表整数.

定义1　设a和d是整数，如果存在一 整 数q，使得，$a=dq$成立时，则说d整除a（或称为a被d整除记作$d|a$. d叫做a的约数，a叫做d的倍数. 若d不能整除a时，记作：$d\nmid a$.

例如，

$1|a$（a为任意整数），$5|35$，$2|-24$，$-3|a$，$8\nmid 5$.

下面来讨论整除的性质.

定理1

1）**若$a|b$，$b|c$，则$a|c$，**

2）**若$a|b,c$ 则 $a|b\pm c$，**

2）′ **若$d|a_1,a_2,\cdots,a_n$，则$d/a_1+a_2+\cdots+a_n$**

3）**若$a|b$则$a|kb$**

4）**若a,b皆不为0，则 $a|b,b|a$ 必要而且只要：$a=\pm b$（或$b=\pm a$）.**

5）**若 $a|b$ 则 $ka|kb$（$k\neq 0$）.**

上述五个性质的证明方法是完全类似的. 此处只对1）和4）作证明，其余各性质的证明，作为习题.

证明

1）只须在$a|b$，$b|c$的前提下，证明存在整数q，使$c=aq$成立即得：$a|c$.

由题设：$a|b,b|c$，则存在q_1和q_2使：

$$b=aq_1,\quad c=bq_2$$

把第一式代入第二式，得：

$$c=bq_2=(aq_1)q_2=a(q_1q_2)$$

因q_1,q_2都是整数，故q_1q_2也是整数. 因此 取$q=q_1q_2$即得：$c=aq$. 1）得证.

4).

由题设 $a|b$, $b|a$, 则存在整数 q_1 和 q_2 使得：

$$b=aq_1, \quad a=bq_2$$

将第一式代入第二式，则有

$$a=bq_2=(aq_1)q_2=a(q_1q_2)$$

因为 $a\neq0$, 所以由上式有：

$$q_1q_2=1$$

而 q_1 和 q_2 都是整数，所以 q_1 和 q_2 都只能为 ±1，因此，当 $a|b$, $b|a$ 时，必须：$b=\pm a$（或 $a=\pm b$）. 必要性得证，而充分性是显然的.

事实上，当 $b=\pm a$ 时，有：$a|b$, $b|a$.

定理 2 $a\neq0$，**如果** $b|a$，**则** $|b|\leqslant|a|$. **即 a 的约数的绝对值不大于 a 的绝对值.**

证明

当 $b|a$ 时，则有 $a=bq$.

由绝对值性质有：

$$|a|=|bq|=|b||q|$$

因为 $a\neq0$，所以，$|a|\geqslant|b|$，定理得证.

由此定理 可以看出，任意非 0 的整数 a，它的约数只有有限个.（因绝对值不大于 $|a|$ 的整数，不会有无限多个）

定理 3 **如果在等式**

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_m \tag{1}$$

中，有 $n+m-1$ 个整数都能被 d 整除时，则所余的一整数也被 d 整除.

证明.

为明显起见，假定(1)式中除 a_1 外，其余各数皆能被 d 整除：$d|a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_m$. 把 (1) 式左边的各数除 a_1，外都移到右边，则有

$$\begin{aligned} a_1&=b_1+b_2+\cdots+b_m-a_2-\cdots-a_n \\ &=b_1+b_2+\cdots+b_m+(-a_1)+(-a_2)+\cdots+(-a_n) \end{aligned}$$

因为，$d|a_2, a_3, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_m$. 所以

$$d|(-a_2),\ (-a_3),\ \cdots,\ (-a_n),\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m.$$

则由定理1中的2)′，即得$d|a_1$．定理得证．

例1 若一垄数的各个数码的和能被9(或3)垄除时，则此垄数是9（或3）的倍数．

证明．

令 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0$是一个$n+1$位垄数（要注意它不是乘积，如32015）

则

$$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$$

$$=a_n(9+1)^n+a_{n-1}(9+1)^{n-1}+\cdots+a_2(9+1)^2+a_1(9+1)a_0$$

$$=a_n(9A+1)+a_{n-1}(9B+1)+\cdots+a_2(9C+1)+a_1(9D+1)+a_0$$

$$=9a_nA+9a_{n-1}B+\cdots+9a_2C+9a_1D)+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0)$$

$$=9m+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)$$

上式表明，任一垄数都可表为9的倍数与它的各个数码取和的和：

$$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0=9m+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)$$

由上式可知，当$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0$是9（或3）的倍数时，则由定理3可知，9(或3)$|a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0$，即$a_na_{-1}\cdots a_2a_1a_0$是9（或3）的倍数．

例2 证明正垄数能被8(或125)垄除，必要而且只要此数的末三位数被8（或125）垄除．

证明．

令 $a=a_n\cdots a_2a_1a_0$（不是乘积）

则 $a=(a_n\cdots a_3)\times1000+a_2a_1a_0$

$$=(a_n\cdots a_3)\times125\times8+(a_2a_1a_0)$$

由上式应用定理3可知，a被8(或125)垄除必要而且只要：8垄除末三位数：$a_2a_1a_0$．

定理4 若$a,b(\neq0)$为任意二垄数，则有且仅有二垄数q，r使．

$$a=bq+r,\quad 0\leqslant r<|b| \tag{2}$$

这个定理叫做带余除法基本定理

证明

定理 4 的内容包含两个方面，一是有两个整数 q，r 使（2）式成立，即存在性，另一方面是，适合（2）式的整数 q 和 r 只有一组，即唯一性．

先证存在性．

因为，b 是不为 0 的整数．所以 $b>0$ 或 $b<0$．

1） 当 $b>0$ 时，则 b 的倍数按大小列出时是：

$\cdots,-3b,-2b,-b,0,b,2b,3b,\cdots$

2） 当 $b<0$ 时，则 b 的倍数按大小列出时，是

$\cdots,3b,2b,b,0,-b,-2b,-3b,\cdots$.

对任一整数 a 来说，在上面两个数列中，只有两种可能性：

Ⅰ． a 等于 b 的一个倍数：$a=bq$，这時 $r=0$．

Ⅱ． a 在 b 的一个倍数 qb 和次一个 b 的较大的倍数之间：

$$qb<a<(q+1)b \qquad (b>0)$$

或

$$qb<a<(q-1)b \qquad (b<0)$$

所以有：

$$\left.\begin{array}{l}0<a-bq=r<b=|b|\\ 0<a-bq=r<|b|\end{array}\right\}\text{即}\quad a=bq+r,0<r<|b|.$$

综合上述，所以总有．

$a=bq+r$，$0\leqslant r<|b|$．存在性得证．

下面证明唯一性．

假设还有 q_1 和 r_1 也使

$$a=bq+r_1 \quad 0\leqslant r_1<|b| \quad \text{成立.} \tag{3}$$

去证：$q_1=q$，$r_1=r$．

（2） 式与（3）式相减得：

$$0=b(q-q_1)+(r-r_1)$$

即 $b(q-q_1)=r_1-r$．

对上式两端取绝对值，则有