# 高等数学概观

李心灿
徐　兵

知识出版社

《大学基础课导引》丛书

# 高等数学概观

李心灿　徐　兵

知识出版社

《大学基础课导引》丛书

高等数学概观

李心灿　徐　兵　编

知识出版社出版

（北京阜成门北大街17号）

新华书店总店北京发行所发行　朝阳新华印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32　印张 8.875　字数 207 千字

1989年3月第1版　1989年3月第1次印刷

印数：1—3,200

ISBN 7-5015-0112-2/G·10

定　价：2.90 元

# 内 容 简 介

本书简洁地描绘了高等数学概貌，梗概地介绍高等数学有关概念、性质、产生的历史背景及发展史况。注意有关概念、性质的几何解释、物理解释。注意强调概念的要素，指出学习中应该注意的问题。并围绕着基本概念与性质提出一定数目的思考题。为读者提供了一个历史的、科学的以及文化的高等数学的框架。

本书可作为高等院校学生及各类数学爱好者们学习高等数学的参考书，也可以作为欲了解高等数学概观的读者的入门读物。

## 作 者 简 介

李心灿，四川省自贡市人，1934年出生，1956年毕业于四川大学数学系，毕业后一直在北京航空学院从事教学和科研工作。现任北京航空学院数学教授、数学物理系主任，国家教委“工科应用数学教材委员会”委员。

他编著或与别人合著、合译的著作有：《曲线·曲面·光顺》，《设计与制造用的计算几何学》，《计算机辅助几何设计》，《常微分方程组及运动稳定性》，《高等数学简明教程》，《大众数学》，《数学与猜想》，《数坛英豪》等。他先后被评为航空工业部先进工作者、优秀教师，北京市特等劳动模范，全国优秀教育工作者、获“全国五一劳动奖章”，并被航空工业部批准为有突出贡献的科技专家。

徐　兵，河北省唐山市人，1943年生，1965年毕业于南开大学数学力学系，而后一直在北京航空学院数学教研室从事教学与科研工作。现为北京航空学院数学副教授、高等数学教研室副主任。

几年来曾先后与别人合作于国防工业出版社、北京航空学院出版社、知识出版社、辽宁科学技术出版社、科学普及出版社出版：《数学规划与优化设计》，《应用动态规划》，《高等数学是非300例分析》，《线性代数与复变函数学习指导》，《高等数学学习导引》等著作，合译有《大众数学》。

# 前　言

英国著名哲学家培根说过：“数学是科学的大门和钥匙”。高等数学——解析几何和微积分，是人类思维的伟大成果之一，也是整个数学结构的基础，“它已成为高等教育的一种特别有效的工具”，是目前国内外很多高等院校的一门重要基础课程。

在多年的高等数学教学中，我们发现有不少数目的学生学完高等数学课之后有“只见树木不见林”的现象。他们常常产生错觉，以为高等数学就是从定义到定理，以致于他们淹没于成串的定义和定理之中。讲不清高等数学的特点是什么？讲不清微积分的本质是什么？他们缺乏对高等数学整体性的宏观了解，更不了解这门科学乃是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶。可以想象，对于自学高等数学的人也必定会存在同样的问题。

我们觉得，要想对一门科学有正确的概念，并且真正懂得这门科学的力量，必须对这门科学的历史、整体性和本质有概观的了

解。一门科学的历史，必定可以为人们提供学科整体课程的概貌，它不仅有益于我们将本课程各部分内容相互联系起来，而且有助于我们将本课程与数学思想的主干联系起来。法国近代著名数学家庞加莱还说过："如果我们想要预见数学的未来，适当的途径是研究这门科学的历史和现代"。

本书力图简洁地描绘高等数学概貌。梗概地介绍高等数学有关概念、性质、产生的历史背景及发展史况，尽力注意有关概念、性质的几何解说、物理解说。注意强调概念的要素，指出学习中应该注意的问题，并围绕着基本概念与性质提出一定数目的思考题，以期引起读者的反思。本书力图给想对高等数学有概观了解的读者提供一个历史的、科学的以及文化的基本框架。而没有过多地去追求理论上的严谨、完整和内容方面的包罗万象。

本书可作为高等院校学生及数学爱好者们学习高等数学的参考书。也可以作为欲了解高等数学概观的读者的入门读物。

计慕然副教授、张福渊副教授、赵庸副教授、王日爽副教授对本书的初稿作了修饰和润色，并提出了一些很好的建议；梅冰清同志为本书绘制了全部插图。在此特致谢意。

限于我们的水平，难免有不当和错误之处，恳请读者批评指正。

作　者

一九八七年夏于北京航空学院

# 目　录

# 第一章 概 论

科学与技术的伟大成就深刻地影响着人们的生活。人们越来越清楚地认识到数学在今日科学中的重要性。越来越多的人领悟到没有数学，就不可能产生现今的一系列科学成就。现在人们对数学的需求日渐增长。数学方法不仅已广泛用于工程技术领域之中，而且已扩展于解决医学、动物学、植物学、地理学、地质学、管理科学以及各种边缘科学乃至人文学或语言学等问题。实际上，许多学科都在悄悄地或先或后地经历着一场数学化的进程。现在，已经没有哪个领域能够抵御得住数学理论或方法的渗透。而高等数学又是整个数学结构的基础，是现今高等院校的基础课。因此，宏观地了解数学，特别是了解高等数学的概貌，无疑地，这对各阶层的人们都是有所裨益的。

从最一般的观点来看，数学的历史可以分为四个基本的、在性质上不同的阶段。当然，精确划分这些阶段是不可能的。因为每一个相继的阶段的本质特征都是逐渐形成的，而且在每一个“前期”内，都孕育乃至萌发了“后期”的内容；而每一个“后期”：又都是其“前期”内容的持续发展阶段。不过这些阶段的区别和它们之间的过度都能明显地表示出来。

第一个阶段：数学萌芽时期。这个时期从远古时代起，终止于公元前五世纪。这个时期，人类在长期的生产实践中积累了许多数学知识，逐渐形成了数的概念，产生了数的运算方法。由于田亩度量和天文观测的需要，引起了几何学的初步发展。但这些

知识都是片断的、零碎的。这个时期是算术，几何形成的时期，但它们还没有分开，彼此紧密地交织在一起。也没有形成严格、完整的体系，更重要的是缺乏逻辑性，基本上看不到命题的证明、演绎推理和公理化系统。

第二阶段：常量数学时期，即“初等数学”时期。这个时期开始于公元前六、七世纪，终止于十七世纪中叶，延续了近两千年。在这个时期，数学已由具体的、实验的阶段过度到抽象的阶段，并逐渐形成一门独立的、演绎的科学。在这个时期里，算术、初等几何、初等代数、三角学等都已成为独立的分支。这个时期的基本成果，已构成现在中学课程的主要内容。

第三阶段：变量数学时期，即“高等数学”时期。这个时期以十七世纪中叶笛卡儿的解析几何的诞生为起点，终止于十九世纪中叶。这个时期和前一时期的区别在于，前一时期是用静止的方法研究客观世界的个别要素，而这一时期是用运动和变化的观点来探究事物变化和发展的规律。在这个时期里，变量与函数的概念进入了数学，随后产生了微积分。这个时期虽然也出现了概率论和射影几何等新的数学分支，但似乎都被微积分过分强烈的光辉掩盖了它们的光彩。这个时期的基本成果是解析几何、微积分，微分方程等，它们是现今高等院校中的基础课程。

第四阶段：现代数学时期。这个时期始于十九世纪中叶。这个时期是以代数、几何、分析中的深刻变化为特征。在此时期出现了几何原则上的新发展，改变了对几何的本来理解，扩大了几何的应用对象与范围。出现了非欧几里得几何。出现了所研究的空间其维数无限的一般思想。代数中对于所研究的“量”也进行了扩展，群、环、体以及抽象代数，即希尔伯特空间等的研究工作不断深入。可以说这是根本的、本质的推广，以致于对代数的理解也发生了变化。分析中也产生了新理论、新方向，如函数逼

近论、实变函数论、复变函数论、泛函分析、微分方程定性理论、积分方程论相继出现，使分析学发展进入了一个新阶段。在这个时期里，数学研究的对象被推广，这相应地引起了量的关系和空间形式在概念本身的重大突破。如产生于上个世纪末，现在已经得到广泛发展的新学科——数理逻辑，可以作为数学对象越出量的关系和空间形式这些初始意义的范例。数理逻辑考察的对象是数学结论的结构，换句话说，它研究的那些命题可以用限定的方法从给定的前提中推导出来。正象数学所具有的特性一样，数理逻辑研究的对象是完全舍弃其具体内容，以公式代替命题，以运用这个公式的规则代替论断的规则。前提和结论之间的关系，公理和定理之间的关系不再归结为空间形式或普通意义下的量的关系，这些可以归结为概念外延的关系。这些必竟还属于标准分析的范畴。而今，非标准分析，即一种超越了以往常规的形式逻辑，正为人们引起注意。

本书所讲的高等数学，包括空间解析几何、微积分学和微分方程初步，是我国高等院校对上述内容的统称。这部分内容是随着十七世纪及十八世纪科学技术的进步而产生、发展起来的。

数学的“初等”与“高等”之分是完全依照惯例形成的。我们不可能说出一个决定性的准则，以便依据它来判定某些数学事实或定理当属于“初等数学”还是属于“高等数学”。更何况现在的初等数学教学中也越来越多地包括了触及高等数学思想的问题。但是，我们可以指出习惯上称为“初等数学”的这门中学课程所固有的两个特征：

初等数学的第一个特征在于其所研究的对象是不变的量或不变的图形。初等数学中的典型问题是，给定一个代数方程，要求找出满足该方程的常数（方程的根）；用初等代数中的法则，把所给代数式变换为它式；算出某些几何常量（例如长度、面积及

体积等）的值。或作出一定的点、线及图形，使其具有所需的属性。三角法中所讲的，是三角函数随着角或弧而变化的情形，但这种讲法纯粹是描述性的，就是说，不是根据某种一般原理来讲的。因而这种讲法不能作为导出三角函数属性的根据。初等三角法中的基本问题，带有与几何、代数问题相同的性质：研究三角式子的简单变换法，以及用三角函数来计算几何图形中的元素。

初等数学的第二个特征表现在其研究方法上。初等代数与几何，是各自依照互不相关的独立路径构筑起来的。初等代数法与初等几何中的综合法，在本质上是没有联系的。在初等数学范围内没有统一的原理，使我们能用几何来阐述所有的代数问题，即不能把所有几何问题用代数术语陈述出来；也不能通过计算用代数方法来解决所有的几何问题。

恩格斯指出：“社会一旦有技术上的需要，则这种需要就会比十所大学更能把科学推向前进。”十六世纪，由于航海、采矿、修筑、开凿运河及天文等方面的实践需要，使得力学的各个分支发展起来，对于运动的研究成了当时自然科学的中心问题。对于运动的研究、对于各种变化过程和各种变化着的量之间的依赖关系的研究，引起了许多新的数学问题，这些问题和以往的数学问题有着原则性的区别。要解决它们，初等数学已不够用了，需要创立全新的概念与方法，创立出以研究现象中各个量之间的变化关系的新数学。变量与函数的新概念应时而生，导致了初等数学阶段向高等数学阶段的过度。而后又出现了微积分学，它与初等数学不同，它是由依从关系中去研究变量的。

在研究方法上，高等数学与初等数学相反，它是在代数法与几何法密切结合的基础上发展起来的。这种结合首先出现在法国著名数学家、哲学家笛卡儿（Descartes 1596～1650 年）所创建的解析几何学中。笛卡儿把变量引进了数学，创建了坐标的概

念。有了坐标的概念，我们一方面能用代数式子的运算顺利地证明几何定理，另一方面由于几何观念的显明性，使我们又能建立新的解析定理，提出新的论点。笛卡儿的解析几何是数学史上一项划时代的变革，恩格斯曾给予高度的评价："数学中的转折点是笛卡儿变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法也进入了数学，有了变数，微分和积分也就成为必要的了……"。"微积分的产生不仅是数学发展史上的重大事件，也是人类发展史上的关于思维的伟大成果之一。"正如恩格斯所指出的："在一切理论成果中，未必有什么象十七世纪下半叶微积分的发明那样，被看作人类精神的最高胜利了。"

与微积分学创立有关的科学技术问题，从数学角度归纳起来有四类：

第一类是已知变速运动的路程为时间的函数，求瞬时速度和加速度。

第二类是求已知曲线的切线。

第三类是求给定函数的最大值与最小值。

第四类是求给定曲线长、求已知平面曲线围成的面积、已知曲面围成的体积，求现实物体的重心。已知变速运动物体的速度、加速度，求物体运动的路程与时间的关系。

实际上第一类、第二类问题为微分学的基本内容，属于求函数的导数问题。第三类问题为导数的应用，也是微分学的主要内容。而第四类问题属于积分学的中心问题。

有必要指出，绝少有哪一门数学分支是某一两个人工作的结果。解析几何的创立，虽然法国数学家、哲学家笛卡儿和法国数学家费马（Fermat，1601～1665年）有很大的功绩，但在他们之前，已有许多人作了不少工作。例如，坐标的思想就起源于远古的希腊，解析几何是十六世纪和十七世纪几股数学思潮汇集起来

的产物。微积分的创立，更远非只是英国数学家、物理学家牛顿(Newton 1642～1727年）和德国数学家、哲学家莱布尼茨(Leibniz 1646～1716年）两人的工作，实际上经历了一条漫长而曲折的道路，它是许多人一种撼人心灵的智力奋斗的结晶。这种奋斗经历了两千多年之久，它深深扎根于人类活动的许多领域，并且，只要人们认识自己和认识自然的努力一日不止，这种奋斗就将继续不已。牛顿和莱布尼茨的最大功绩，是将微积分中两个中心问题联系起来了，即将切线问题与求积问题联系起来了。而且他们解决问题的方法不是特殊的，而是带有较大的普遍性。另外牛顿和莱布尼茨独立地发明的运算方法也是普遍可用的，本质上和现在微积分中所用的方法是一样的。正是由于这种方法才对后来导数和积分概念的逻辑发展成为必要。所以人们把牛顿和莱布尼茨看成微积分的发明者。但是这并没有认为或意味着作为今天这门学科基础的定义和概念仅仅是他们两人的工作。事实上，这些定义和概念是在这个方向上又经历了两个世纪和经过许多数学家的进一步努力才逐步完善起来的。十八世纪在科学和数学问题中，应用了微积分所取得的辉煌成就，使人们把注意力首先放在运算而无暇顾及所依据的理论是否可靠，基础是否扎实，这就出现了谬误越来越多的混乱局面。所以在这个阶段，对于这门学科的逻辑基础仍然缺乏清晰的观念。到了十九世纪，人们力图为微积分的有关概念寻找一个令人满意的基础，这种坚持不懈的努力，带来了一种更富于批判的精神。到了十九世纪中叶，由于用了精确的数学术语，微积分基础观念才得到了澄清，从而使它建立在巩固的逻辑基础之上，并能在自然科学与技术领域中成为精确表述自然规律与解决有关问题的有力方法。

微积分学是数学中的重要部分，它也具有数学的一般特点：高度的抽象性、独特的“公式语言”、应用的广泛性、结论的确