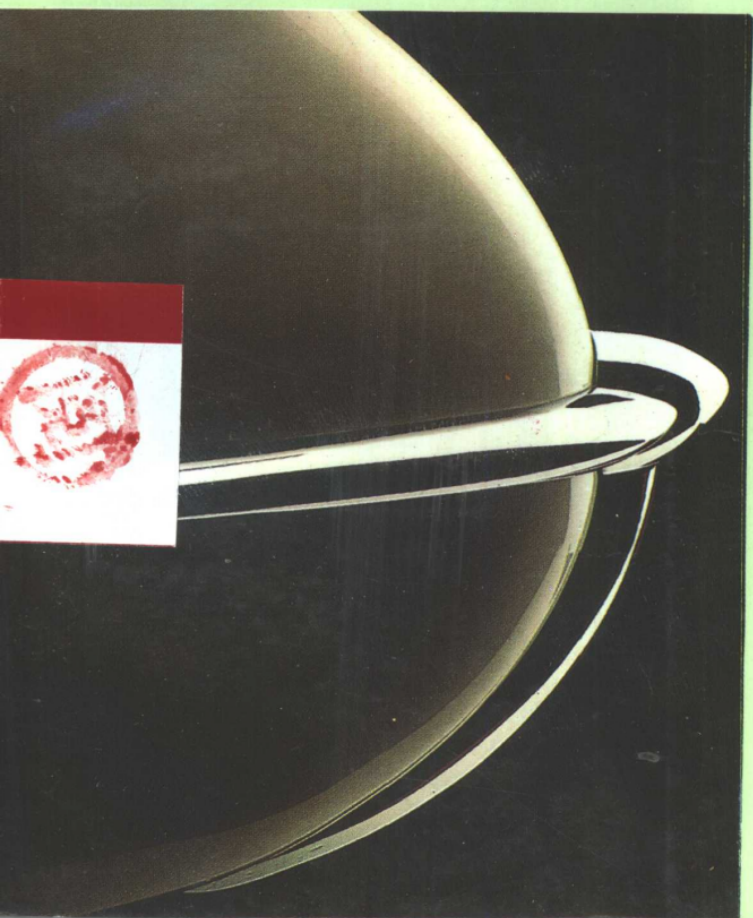


# 浅论点集拓扑、 曲面和微分拓扑

A BRIEF INTRODUCTION TO POINT SET TOPOLOGY  
SURFACES AND DIFFERENTIAL TOPOLOGY

走向数学丛书

杨忠道 著





中国数学会传播委员会推荐读物

责任编辑：孟实华 装帧设计：邱湘军

## 内容提要

微分拓扑学是当代数学的光辉篇章之一，本书向读者介绍这门高深的数学。着重在说明大意，不拘泥于严格证明，使读者能借助例子去领会其内容，这是一本风格独特的数学书。

书中介绍了流形的剖分、滑化问题、庞加莱猜测、米等，都是微分拓扑所揭示的现象。作为准备，作者简介了欧氏空间、点集拓扑的基本流形的概念，具体构造了充曲线、长角的球面等著名例对维数最低的流形——1维流形和面作了系统的研究和分类。这些内容本身也都是重要的数学知识。

读者对象主要是具有微积分基本知识的数学爱好者。

ISBN 7-5355-1583-5



9 787535 515834 >

ISBN7-5355-1583-5/G·1578

定价：7.50元

00153180

00153180

0189.3

08

走向数学丛书

# 浅论点集拓扑、 曲面和微分拓扑

---

杨忠道 著

湖南教育出版社

浅论点集拓扑、曲面和微分拓扑  
**A Brief Introduction to point set topology,  
Surfaces and differential topology**

杨忠道 著

Chang Tao Yang

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷二厂印刷

787×1092毫米 32开 印张：4.25 字数：90000

1993年4月第1版 1998年11月第2次印刷

印数：1501—3500

ISBN 7—5355—1583—5/G·1578

定价：7.50元

本书若有印刷、装订错误，可向承印厂调换

0 132940

21

数学天元基金

本丛书得到国家自然科学基金委员会  
数学天元基金的资助

---

## 《走向数学》丛书编委会

顾问：王 元 丁石孙

主编：冯克勤

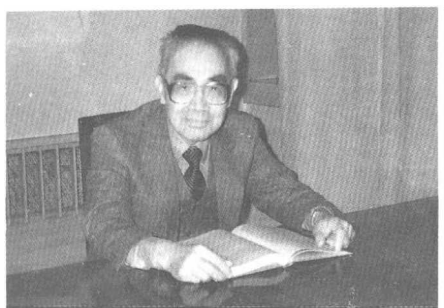
编委：李 忠 史树中 唐守文

黎景辉 孟实华

“走向数学”丛书

陳省身題





## 作者简介

杨忠道，男，1923年生于浙江省苍南县（老平阳县的一部分），美籍华人教授。1946年毕业于浙江大学数学系，1948年进中央研究院数学所，向陈省身教授学习代数拓扑，1950年赴美留学，1952年获数学博士学位，1956年任宾夕法尼亚大学数学系副教授，1958年升为副教授，1961年升为正教授，一直到1991年退休。在职期间，曾任数学系研究部主任四年，系主任五年，1968年被选为中央研究院院士，现职是南开数学研究所副所长。

主要的研究方面是代数拓扑的应用。初期的工作是用在几何方面，中期的工作是用在变换群方面，而且多半是和美国蒙哥马利教授合作的（蒙哥马利教授是资深的数学家，曾任美国数学会会长及世界数学会会长），后期的工作是进行布拉施克猜测的研究。



献 给  
中国现代数学两位最早  
而又最著成效的播种人

姜立夫教授 (1890—1978)

苏步青教授 (1902— )

姜老和苏老是著者的小同乡,都是浙江省老平阳县人(1982年后,老平阳县被分为平阳和苍南两县)。因受姜老和苏老的启发,著者入浙江大学从苏老学习现代数学,毕业后之所以能够起始做科研和教学工作,是苏老一手带出来的。著者和姜老相处的日子较短,但受他的影响却很深。1950年赴美留学,事后才知道是姜老预先计划好的,经他人的手去完成。

杨忠道

HGSP/02

# 前 言

王 元

从力学、物理学、天文学直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学。一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三、四年有数学课。可见数学之重要与其应用之广泛。

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏。我以为要克服这个鸿沟，还是有可能的。近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握。我想，如果知道讨论的对象的具体背景，则有可能掌握其实质。显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到。若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了解。这就促使我们设想出一套“走向数学”小丛书，其中每本小册子尽量

用深入浅出的语言来讲述数学的某一问题或方面,使工程技术人员,非数学专业的大学生,甚至具有中学数学水平的人,亦能懂得书中全部或部分含义与内容。这对提高我国人民的数学修养与水平,可能会起些作用。显然要将一门数学深入浅出地讲出来,决非易事。首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解。从整体上说,我国的数学水平还不高,能否较好地完成这一任务还难说。但我了解很多数学家的积极性很高,他们愿意为“走向数学”撰稿。这很值得高兴与欢迎。

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社支持,得以出版这套“走向数学”丛书,谨致以感谢。

# 绪 言

首先我们请每一位读者在阅读这本书之前，先读完这绪言。

这是一本通俗的数学书，目的是将近代数学中的微分拓扑，简略地介绍给对数学有兴趣的读者们。对象不仅仅限于受过数学训练的读数学专业的大学本科生。

正因为读者不一定受过数学的训练，在这本书中我们所采取的写法，很不同于一般数学书。一般来说，我们只谈大意，着重于说明，希望读者能够用直觉去体会书中的内容。虽然我们给一些证明，但是这些证明大都相当简略，不像一般数学书那样一定要求严格，其目的只是用来帮助读者体会所说的概念，所以读者在第一次阅读本书时，即使不去注意证明也无妨。到第三和第四两部分，牵涉到的数学比较高深，所以我们只能轻描淡写，说明一些事实而往往不给任何的证明。如果读者能够多多少少知道所说的内容是什么，那就很好了。

我们尽量将这本书写得通俗化，但是我们还是要求读者有能力处理平面上和空间中的几何图形及引起的几何概念与拓扑概念，也有能力运用微积分。如果读者不是读数学专业的大学本科生，但在这两方面有能力，那么只要自己肯花时间去思考

和体会，领会到这本书一半以上的内容，应该是可能的。

对读数学专业的大学本科生，这本书并非毫无价值。不过要注意到，为了顾及一般读者们的数学程度，本书的内容只谈大意，给了一个架子，实质性的份量少了一些，对所提及的概念，无法作较全面的讨论，而且对绝大多数的成果不给证明。不过了解了大意之后，将来再读较深的书本时，很可能有旧识的感觉，不致于像初逢时那样陌生了。

在这里还有一点是值得提的。在第三和第四部分中若干成果的证明须依靠代数拓扑。读数学专业的大学本科生不一定有机会读到代数拓扑。即使读了一门代数拓扑的课，恐怕还不足以证明这些成果。所以想完全了解这本书的内容，对读数学专业的研究生，也是不无困难的。正因为如此，我们希望读者不要对自己太苛求，只要以自己数学的水平，能了解多少就是多少，只有中学毕业水平的读者应该如此，读数学专业的读者亦应该如此。

这本书从起草到完稿只有半年时间，其中不免有许多粗糙而值得改良的地方。不过值得改良的地方分两种，一种是本身不正确，那是非改写不可了，另一种是本身尚过得去，可是可以改写得更好些。对前一种我们是非做不可，对后一种不做亦无害处。若因此引起读者的思索，反而有益于读者了。

著者希望这本书有机会再版，所以希望认真的读者来信，尽量批评，尽量建议。使著者能将其中重要的建议收在再版中，供以后读者们参考。

这本书分四个部分。现在我们先谈谈每部份的纲要。

第一部分是基础。在第1节中我们列出实数集 $\mathbb{R}$ 的性质，使以后处理实数时有所依据。同时使在第20节提到复数集 $\mathbb{C}$ 和四元数集 $\mathbb{H}$ 时，读者可以自己去看，它们满足 $\mathbb{R}$ 中哪些性

质。

在第2节中我们介绍 $n$ 维欧氏空间 $R^n$ ，在 $n \leq 3$ 时， $R^n$ 中的结论可以用图形来表示。可是在 $n > 3$ 时，图形表示已不再可能，于是我们不得不依赖证明。总而言之，为了解 $R^n$ ，我们用图形，用证明，也用联想，希望读者好好利用自己的直觉去体会。

第二部分是点集拓扑。和普通点集拓扑的书本不一样，我们不讨论一般的拓扑空间，只谈这本书中以后将用到的那些拓扑空间。所以在这部分中所谈的拓扑空间限于欧氏空间的子空间。

对已经学过点集拓扑的读者，像记流水账一样介绍开集、闭集、闭包、连通集，紧集，同伦型等等拓扑概念并没有什么。可是对初次见到点集拓扑的读者，一定看得头昏脑胀。不过不必担心，先读下去再说。这些概念要用在第三和第四部分。到用时再回头看第二次尚不晚。

为准备介绍流形，我们问维数是否是一个拓扑概念，并且点出问题的困难度。

第三部分是拓扑流形。从这里开始，能给证明的地方愈来愈少，只能略说一部分概念。所以希望读者多多注意实例，如连通1维流形和曲面。

我们之所以介绍亚历山大有角球面，是因为那是在 $R^3$ 中一个出人意料的球面。在数学中出人意料的现象时有出现。在第5节中所说的由 $R$ 到 $R^n$ 的一个满的映射是一个例子，在第20节中所作的7维怪球面又是一个例子。正因为如此，一些好像不困难的数学问题实际上是困难得很。所以直觉在数学上的用处是用来产生构想和猜测，不能够用来做数学证明。

在第13节中我们谈着色问题及四色猜测的证明，目的是

使读者们知道,在这方面到目前有些什么成果。一直到今天,还有不少只懂很少数学的人花时间去找四色猜测的证明,志向是没有什么可批评的。不过在投入时间和精力之前,应该搞清楚一百多年来在这方面发展的情形。如海底捞针等事是否值得一做,多想想就明白了。

第四部分是微分拓扑,研讨的对象是光滑流形。需用第二和第三两部分和微积分,所以我们能够做的只是先介绍偏微分,再定义欧氏空间的光滑流形,然后给一些容易体会的例子。

我们并没有介绍微分拓扑中一个基本的概念——一个光滑流形的切纤维丛。原因是切纤维丛的主要用处是在理论方面,而我们却避免理论。在第四部分中我们谈如何去作光滑流形,特别是光滑曲面。此外我们介绍庞加莱猜测和7维怪球面。一些著名的成果,是近三四十年来才得到的,虽然是很高深的数学,可是稍懂一点微分拓扑的人,也可以多多少少知道这些成果是在说什么。

最后著者借这个机会谢谢这套丛书的主编冯克勤教授,顾问丁石孙教授和责任编辑孟实华女士,依赖他们的信任和坚持,著者才能够勉强赶出这本书的写作,又曾伟博士花了很多时间读本书的初稿,并且提供了不少宝贵的意见,在这里也一并致谢。

# 目 录

前言 (王元)	1
绪言 (杨忠道)	3
<hr/>	
第一章 基础	1
§ 1 实数	1
§ 2 $n$ 维欧氏空间	15
第二章 点集拓扑	21
§ 3 欧氏空间的点集拓扑	21
§ 4 基本拓扑概念	27
§ 5 几个不容易由直觉体会到的现象	34
§ 6 维数是一个拓扑概念吗	40
第三章 拓扑流形	43
§ 7 $n$ 维拓扑流形	43
§ 8 1 维流形	47
§ 9 加强约当曲线定理	53
§ 10 紧的可剖分空间与欧拉示性数	61
§ 11 切开和粘合	65



§ 12	曲面 .....	70
§ 13	着色问题和四色猜测 .....	85
<b>第四章</b>	<b>微分拓扑</b> .....	<b>88</b>
§ 14	微积分 .....	88
§ 15	光滑流形、光滑同胚 .....	92
§ 16	光滑化问题 .....	94
§ 17	光滑流形的粘合及连接和 .....	98
§ 18	光滑与不光滑之间的差距 .....	101
§ 19	庞加莱猜测 .....	102
§ 20	7 维怪球面 .....	105

---

<b>附录</b>	<b>直观集论</b> .....	<b>112</b>
-----------	-------------------	------------