辛弹性力学

Symplectic Elasticity

姚伟岸　钟万勰　著

4

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

辛弹性力学

Symplectic Elasticity

姚伟岸　钟万勰　著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

别开生面、统一的方法论是本书的一大特色。它一反弹性力学以传统的半逆法为主的求解思路，通过引入对偶变量，在辛几何空间里采用富有理性的方法进行求解，这也是辛体系与传统方法论的本质区别。本书重点讲述了平面各向同性、层合板、各向异性问题以及薄板弯曲问题的分离变量及辛本征函数展开的直接解析解法，克服了传统解法的难点，给出了一些传统方法难于求解问题的解析解。辛体系不仅可用于弹性力学，也可用于工程力学的多个方面及数学物理方法中，其实许多其他学科，如控制、振动、波传播等也都可以采用同一套理论体系。一套横贯的方法论是很有利的，这对于教学也有很大的好处。

本书适于高年级本科生、研究生、高等学校教师及数学力学工作者，可用作高年级本科及研究生教材。

图书在版编目（CIP）数据

辛弹性力学/姚伟岸，钟万勰著．—北京：高等教育出版社，2002．4

研究生、本科生教材

ISBN 7-04-010475-X

Ⅰ．辛．．．Ⅱ．①姚．．．②钟．．．Ⅲ．弹性力学-高等学校-教材 Ⅳ．0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 092981 号

辛弹性力学

姚伟岸　钟万勰　著

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
购书热线	010-64054588	**传　　真**	010-64014048
免费咨询	800-810-0598	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
经　　销	新华书店北京发行所		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市建筑工业印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2002 年 4 月第 1 版
印　　张	14.75	**印　　次**	2002 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	260 000	**定　　价**	22.90 元

前　　言

在各类数学物理线性偏微分方程中，弹性力学方程是最复杂的问题之一，其求解一直是其发展的一个“瓶颈”。以铁木辛柯的《弹性力学》来看，其求解占了大半部篇幅，而方法则以半逆法为主。采用半逆法的原因在于方程组的复杂性。历来的解析求解方法都是在一类变量的范围之内进行的，其求解总是用各种方法对未知函数予以消元，得到一个高阶偏微分方程再对一个未知函数来求解。从数学体系的角度看，一类变量的求解属拉格朗日体系的方法，因此必然导致高阶偏微分方程，以至于分离变量及本征函数展开法等有效的数学物理方法未能对此实施，结果是半逆法求解这个环节长期未能突破。

根据结构力学与最优控制理论的模拟理论，将由原变量和其对偶变量组成的辛空间引入到弹性力学，从而使分离变量及辛本征函数展开的直接解析解法得以实施，形成了弹性力学问题的辛求解体系，这也是本书贯彻始终的别开生面、统一的方法论。辛求解体系是通过理性的推导逐步进行下去的，它改变了以往弹性力学求解中大量运用半逆法的传统，给出了一个富有理性的求解方法。这样，就可以求得许多以往半逆凑合法无法求解或难于求解的问题。例如我们已求解了各种边界的板弯曲问题、层合板及各向异性问题，对平面弹性体及弹性柱体圣维南问题就可给出新的一套基本方程，求出其解析解；而过去因端部条件方面的困难，只能用圣维南原理予以覆盖的部分，现在也可以予以求解。

由于弹性力学的辛求解体系与传统的半逆解法存在本质的差别，其富有理性的求解方法完全可以直接推广到更复杂问题上去，可望求出更多问题的解析解，扩大解析求解范围。辛体系的求解过程是完全相同的，仅是其代数推导将随着问题的复杂程度要逐渐繁琐一点。事实上，利用现有的数学推导软件也可以克服这一困难。

辛求解体系与偏微分方程的传统求解思路正相反。传统的求解思路是努力消元，尽可能减少未知量的数量，而不惜方程的阶次的升高。高阶次的微分方

程不利于有限元等数值方法的求解，也将为数值求解带来一些难点问题。而在辛体系下，虽然未知量增加了，但阶次降低了，低阶微分方程有利于数值求解，而未知量的增加并不会带来大的影响。也就是说，辛体系与数值方法的结合，将能更充分地体现出辛体系的优点，充分发挥计算机的优势，去求解工程问题。

本书的宗旨是向读者较为系统地介绍弹性力学辛求解体系的方法论。首先，通过对弹性力学各基本问题的讨论，详细介绍如何从弹性力学的基本方程或经典变分原理出发，引入原变量的对偶变量，从而建立其哈密顿形式的混合能变分原理及哈密顿对偶方程组，形成求解辛体系。其次，辛体系总是通过分离变量法导出横方向的本征问题，即辛本征问题，从而形成本征函数展开的求解方法，其中对特殊本征值的本征函数向量及其约当型本征函数向量的分析求解，就可以将许多有特定物理意义的解找出来。本书从整体上来看，用的是同一种求解风格，便于读者掌握辛体系的方法论，并且也便于通过对比，看出与经典半逆法的不同之处。

本书主要讲述的是解析法，这是推出新的求解体系的必要一步。本书所选择介绍的内容都是弹性力学中最基本的课题，如铁木辛柯梁、平面弹性问题、层合板以及板弯曲问题等。这里应当强调说明一点的是，辛体系的方法论对柱体等三维问题也同样是适用的，对这类复杂的课题本书就不展开介绍了。

本书的特点是概念新而对数学的需求并不深。至于因为体系的更迭而要用到的辛数学的一些相关内容，本书也预先在第 1 章加以详细的介绍。这些内容并不超出大学微积分、矩阵代数的内容即使略过这部分内容，也能理解和掌握好弹性力学的辛求解体系。本书的相关内容已多次在研究生和高年级本科生的课程中讲授，不仅使学生们掌握了一种新的求解方法论，而且大大开阔了他们的学术视野，收到了良好的效果。

本书的研究成果是在国家自然科学基金重点项目“工程力学中的哈密顿体系”以及国家“211”工程建设项目“工程科学计算”的资助下完成的。浙江大学丁皓江教授对书稿进行了详细审阅并提出了许多宝贵意见。在本书的完成过程中还得到了高强同学的热情帮助，他绘制了所有的插图。隋永枫同学协助完成了大量的校对工作。作者在此对他们致以衷心的感谢。

由于著者水平有限，书中的不妥之处在所难免，希望广大读者予以批评指正。

作者

二〇〇一年十月

主要符号说明

$\boldsymbol{f}_n$	外法线为 $\boldsymbol{n}$ 截面上的面力矢量
f_{nx}，f_{ny}，f_{nz}	面力矢量 $\boldsymbol{f}_n$ 的直角坐标分量
k	剪切修正系数
l，m，n	外法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦
$\boldsymbol{n}$	截面的外法线方向
$\boldsymbol{p}$	原变量的对偶变量(广义动量)
$\boldsymbol{q}$	原变量(广义位移)
q	梁、板横向分布荷载的集度
$\boldsymbol{u}$	位移矢量
u	直角坐标 x 方向的位移
u_ρ，u_φ	位移矢量的极坐标分量
v	直角坐标 y 方向的位移
v_c	应变余能密度
v_ε	应变能密度
$\boldsymbol{v}$	辛几何空间的全状态向量
w	直角坐标 z 方向的位移，板、梁的挠度
x，y，z	直角坐标
A	横截面面积
$\boldsymbol{C}$	材料的刚度系数矩阵
D	板的抗弯刚度
E	拉伸弹性(杨氏)模量
E_c	支座位移余能
E_w	外力势能
E_p	总势能

E_{pc}	总余能
$\boldsymbol{F}$	单位体积的体力矢量
$\boldsymbol{F}_n$	外法线为 $\boldsymbol{n}$ 的斜截面上的单位面积力
F_{nx}，F_{ny}，F_{nz}	单位面积力 $\boldsymbol{F}_n$ 的直角坐标分量
F_S，F_{Sx}，F_{Sy}	梁、板横截面上的横向剪力
F_{Vx}，F_{Vy}	板横截面上的总的分布剪力
F_x，F_y，F_z	单位体积体力矢量 $\boldsymbol{F}$ 的直角坐标分量
G	切变模量
$\mathscr{H}$	哈密顿(密度)函数
$\boldsymbol{H}$	哈密顿矩阵
I	横截面的惯性矩
$\boldsymbol{I}_n$，$\boldsymbol{I}$	单位矩阵
$\boldsymbol{J}_{2n}$，$\boldsymbol{J}$	单位辛矩阵
$\mathscr{L}$	拉格朗日函数
$\boldsymbol{M}$	板的弯矩向量
M_x，M_y，M_{xy}	梁、板横截面上的弯矩、扭矩
$\boldsymbol{S}$	材料的柔度系数矩阵
V	弹性体的区域
V_c	应变余能
V_ε	应变能
W	外力功
γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{xz}	直角坐标系中的切应变分量
$\gamma_{\rho\varphi}$	极坐标系中的切应变分量
δ	变分符号
$\boldsymbol{\varepsilon}$	应变分量的向量形式
ε_1，ε_2，ε_3	主应变
ε_x，ε_y，ε_z	直角坐标系中的线应变分量
ε_ρ，ε_φ	极坐标系中的线应变分量
θ	截面的转角，体应变
$\boldsymbol{\kappa}$	板的曲率向量
κ，κ_x，κ_y，κ_{xy}	曲率
λ	拉梅常数，本征值
μ	哈密顿矩阵的本征值

ν	泊松比
ρ	材料的密度，极坐标系的极半径
$\boldsymbol{\sigma}$	应力分量的向量形式
σ_1，σ_2，σ_3	主应力
σ，σ_x，σ_y，σ_z	直角坐标系中的正应力分量
σ_ρ，σ_φ	极坐标系中的正应力分量
τ，τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{xz}	直角坐标系中的切应力分量
$\tau_{\rho\varphi}$	极坐标系中的切应力分量
ϕ_x，ϕ_y	板弯曲的弯矩函数
φ	极坐标系的极角
φ_{f}	艾里应力函数
$\boldsymbol{\psi}$	哈密顿矩阵的本征函数向量
ω	圆频率
Γ	区域 V 的边界
Γ_u	给定位移边界
Γ_σ	给力边界

责任编辑 梁建超
封面设计 王　睢
责任绘图 黄建英
版式设计 史新薇
责任校对 夏　晔
责任印制 张小强

目　录

绪　论

数学力学在很长一段历史时期曾是科学的带头学科，几个世纪的发展百花纷呈，成就辉煌。力学作为工程的基础学科有力地推动了诸如航空航天、机械、土木、化工、能源、材料等各方面的飞跃，应用力学同时也受到了工程应用的多方面促进，从而发展了许多理论与方法。从应用数学的角度看，只要将其基本微分方程建立起来，问题就已表达清楚，余下的就是如何去求解；然而经常见到的情况是，基本方程虽已建立但求解却非常困难。

在各类数学物理线性偏微分方程中，弹性力学方程是最复杂的问题之一。弹性力学的基本方程体系早在19世纪初便已臻完善，然而其求解虽费了一个多世纪，还远不能说已臻完善了，求解一直是其发展的一个“瓶颈”。弹性力学严格求解的困难促进了一些应用理论的发展，如结构力学、薄壁结构、板壳理论，再加上结构动力与稳定性、土力学、流体力学等问题，这些构成了应用力学的一个体系。这些应用理论虽使方程得以简化，但解析求解仍有很大困难。数学家与力学家通力合作，既丰富了数理方法又发展了应用力学。这个时代的代表著作有柯朗与希尔伯特的《数学物理方法》，以及铁木辛柯(Timoshenko)的一套教材《弹性力学》、《弹性稳定理论》、《板与壳学》、《工程振动问题》、《高等材料力学》，等等。这一整套解析求解体系形成了该领域的经典求解体系，涵盖了当年的高度成就，也影响并指引着随后的进展。

进入20世纪50年代，随着计算机及高级语言的问世，有限元法首先在应用力学中出现，迅速改变了局面。在应用力学体系的理论基础上，以强大的计算能力为后盾，对于用线性方程描述的结构力学、固体力学等很快就发展出通用灵活的有限元数值方法，并系统化为大规模有限元程序系统，解算了数以万计未知数的线性代数方程组，成为工程师手中强大的分析工具，确立了计算力学的地位。有限元法在应用于结构分析中成功的基础上迅即扩展到了力学、工程与科学计算的各个方面，取得了极大的成功。

有限元分析的成功并未减低解析方法的意义，其原因是：首先，有限元法

是一类数值近似，其理论基础脱离不了解析法；其次，有许多问题，例如断裂力学的裂尖奇点元、无限域的元等，其本性是解析的；此外，再如壳体问题的边缘效应、复合材料的自由边界及其边缘奇点分析等带有明显的局部效应的课题，采用有限元数值计算有刚性问题，因此解析法仍有极大的意义。

以铁木辛柯的《弹性力学》教材来看，其求解占了大半部篇幅，而方法则以半逆法为主。半逆法是圣维南于 1855—1856 年提出来的，它解决了弹性柱体的扭转与弯曲问题的某些解，从此成为弹性力学的经典解法，一直影响至今。半逆法即某种凑合法，它依赖于具体问题而缺乏一般性。半逆法往往只能找到某些解而不能证明已找到其全部解。使读者感到难于措手之点是怎么凑合才能使手中问题得以求解呢？

采用半逆法的原因在于方程组的复杂性。历来的解析求解方法都是在一类变量的范围之内进行的，或者是应力函数（力法），或者是位移法（只有扁壳理论用了混合法），其求解总是用各种方法对未知函数予以消元，得到一个高阶偏微分方程再对一个未知函数来求解。从数学体系的角度看，一类变量的求解属拉格朗日（Larange）体系的方法，因此必然导致高阶偏微分方程，以至于分离变量及本征函数展开法等有效的数学物理方法未能对此实施，结果是半逆法求解这个环节长期未能突破。

至此就有一个疑问，非要采用这种传统的消元方法不可吗？事实上，这种传统方法不是惟一的，采用对偶理论及状态辛空间就是其回答。

其实，回顾我们自己学习的应用力学，就可以发现一些问题。经典分析力学是力学最根本的体系，拉格朗日方程、最小作用量原理、哈密顿（Hamilton）正则方程、正则变换、哈密顿－雅可比（Hamilton-Jacobi）理论，等等，是非常优美的理论体系，并且也是统计力学、电动力学、量子力学等基本学科的基础，反而在应用力学课程中体现得还不够充分。因为弹性力学、结构力学、流体力学、振动与稳定等课程与其关联不多。控制理论虽然源于力学却已很少在应用力学课程中讲授了，例如以往弹性力学著作就与分析力学看不出有多少密切关系。这些课程的理论体系与方法各有一套。

控制论在计算技术的冲击下，出现了现代控制论。现代控制论并不只是在原有经典控制论的理论体系上加以延伸而已，而是使控制论的基本理论体系也发生了根本性的更迭，达到了新的境界。由现代控制论奠基的状态空间法的起点至少也应当回溯到哈密顿正则方程体系。哈密顿正则方程体系也正是对偶变量、对偶方程的体系。

控制论已按其自身的发展规律，发生了体系换代，粗略想来在理论体系上离开应用力学更远了；然而情况并非如此，现已证明，现代控制论的数学问题与结构力学问题是一一对应、相互模拟的。从数学角度看，模拟关系是建立在

对偶变量和哈密顿体系理论基础上的，这意味着力学可以从控制论方面借鉴到其成功的经验。其实，应用数学的教学、科研也在走向对偶体系。基于以上的观察，应用力学也应当自觉地、系统地将对偶变量体系运用于其各个学科分支。

当代科技的信息化发展，体现在智能化材料、智能化结构、精确制导武器，等等，充分表现出控制、遥感的多方面渗透。结构的控制也正日益受到关注。在应用力学教学中不应忽视这种发展趋势。现在世界正在走向 smart（灵巧），而力学如不与控制理论相连接，又如何成为 smart。美国已感到结构与控制工程师在设计中互相分离，不利于整体的合理设计，正在呼唤“控制－结构整体设计”。其实许多其他学科，如振动、波传播等也都可以采用辛求解体系。采用同一套理论体系更易于促进力学与现代控制等不同学科领域的相互渗透与结合，对于教学体系也有很大的益处。

从拉格朗日体系向哈密顿体系的过渡，其意义在于从传统的欧几里得型的几何形态进入到辛几何型的形态之中，突破了传统观念，从而使对偶的混合变量方法进入到力学的广大领域。辛体系还可以进入数学物理方法，并由此辐射到有关领域去。将这套方法论在弹性力学这门专业基础课中介绍给学生，对于他们将来攀登高峰无疑是很有益的。

第1章 预备知识

本章是为了使本书的理论体系更具完整性和系统性而增添的。首先，对本书所涉及的一些数学基本概念和基本性质作一简要的介绍，主要包括欧几里得空间、辛空间以及勒让德变换等。其次，对与本书内容密切相关的分析力学哈密顿原理与哈密顿正则方程，以及互等定理等作一简要的回顾。读者完全可以跳过本章，直接从第 2 章开始阅读。

§1.1 线性空间

线性空间是线性代数最基本的概念之一，它广泛应用于现代数学的许多领域，也是许多物理模型广泛存在的一种数学结构。有关线性空间的基本概念和基本性质在众多的教材中都有详细的论述及证明[1~3]，因此本节仅对与本书相关的内容作一扼要的叙述，而略去有关论证。

定义 1.1 设在实数域 R 上的线性空间 V 中有 n 个线性无关向量(广义向量)$(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n)$，且 V 中任何一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可由其线性组合表出

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n \tag{1.1.1}$$

则称$(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n)$为 V 的一组**基**，简记为$(\boldsymbol{\alpha}_i)$，$(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基$(\boldsymbol{\alpha}_i)$下的**坐标**。这时，就称 V 为 n 维**线性空间**。

上述的定义同时表明，对一个 n 维抽象的线性空间，通过一组基就可将问题完全用实数域 R 上的普通 n 维向量来描述。其实线性空间的许多性质和运算也都是通过一组基而最终转化为普通向量和矩阵的性质和运算。在普通 n 维向量空间中讨论，当然便于理解和运用，后面的介绍将很好地体现出这一点。

n 维线性空间的基当然不是惟一的，一个向量在不同基下的坐标也是不同的。

设$(\boldsymbol{\alpha}_i)$与$(\boldsymbol{\beta}_j)$是 V 中两组基，它们之间的关系是

$$(\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n)A \tag{1.1.2}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

称为由基$(\boldsymbol{\alpha}_i)$到基$(\boldsymbol{\beta}_j)$的**变换矩阵**，它一定是非奇异矩阵。若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基$(\boldsymbol{\alpha}_i)$与$(\boldsymbol{\beta}_j)$下的坐标分别为$(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^{\mathrm{T}}$与$(y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)^{\mathrm{T}}$，显然有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad 或 \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.1.4}$$

所谓一个基到另一个基的变换在普通向量空间就是坐标变换。

在线性空间中，线性空间 V 到其自身的映射通常称为 V 的一个变换，而其中线性变换是最基本和最简单的一种变换。

定义 1.2 实数域 R 上的线性空间 V 的一个变换$\widetilde{A}$ 称为**线性变换**，如果对于 V 中任意的向量$\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{\eta}$ 和任意实数 k，都有

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) = \widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\xi}) + \widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\eta}) \tag{1.1.5}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(k\boldsymbol{\xi}) = k\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\xi}) \tag{1.1.6}$$

以后简记 $\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\xi})$为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\xi}$。

设$(\boldsymbol{\alpha}_i)$是线性空间 V 的一组基，则基向量在线性变换$\widetilde{A}$下的象$(\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\alpha}_i)$可以被基$(\boldsymbol{\alpha}_i)$线性表出：

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\alpha}_1 &= a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\alpha}_2 &= a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\alpha}_n &= a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n \end{aligned}\right\} \tag{1.1.7}$$

用矩阵来表示就是

$$(\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A} \tag{1.1.8}$$

其中