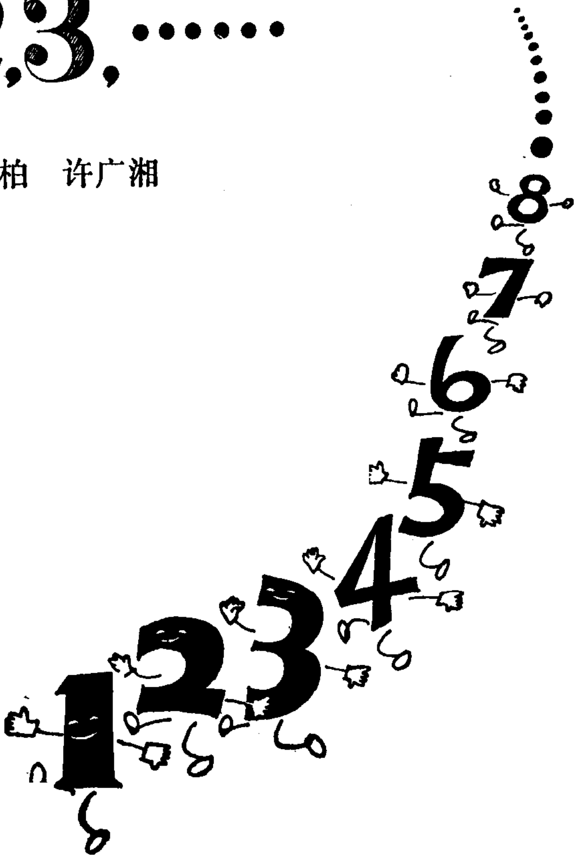
1,2,3,……

谈祥柏　许广湘



上 海 教 育 出 版 社

内 容 提 要

我们天天和数打交道。你可知道自然数，特别是质数的许多有趣的性质和故事？这本书就是讲这些知识的。除此之外，它还将生动而通俗地告诉你许多有关速算、代数、几何、数论、数学游戏等知识。希望通过阅读本书，将会激发你对学习数学的兴趣。

1,2,3,……

谈祥柏　许广湘

上海教育出版社出版

（上海永福路123号）

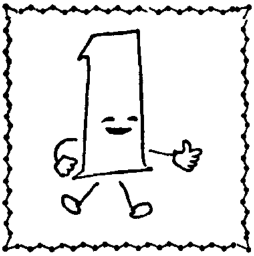
新华书店上海发行所发行　上海日历印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 3.75　字数 57,000

1980 年 3 月第 1 版　1980 年 3 月第 1 次印刷

印数1-100,000 本

统一书号：7150·2245　　定价：0.27 元

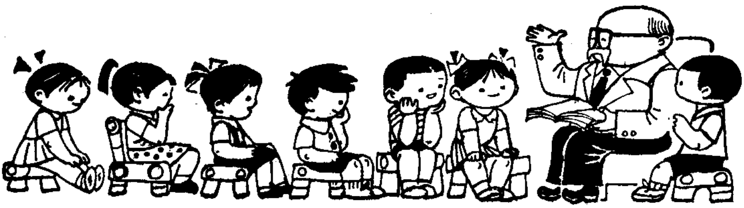


一天，小嘉、小笕、小澄、小储等一群孩子放学回家，做好了作业，围着数学老人，要他讲故事。

数学老人打开一本大辞典，指着第一页第一行的“一”字说：“你们看，它对‘一’的解释是‘数之始也’，意思就是数目或计数的开始。确实，1 是自然数中最小的一个数，在它上面逐次加 1，依次可以得到全部自然数。”

“记得老师曾经说过，1 是个‘单数’，也叫‘奇数’，是不是？”小嘉马上插嘴。他是个天真活泼、顽皮好玩，不大肯动脑筋的孩子。

数学老人用鼓励的口气回答：“不错。它有几个别的自然数所没有的性质：(1)1 只有一个约数，就是它本身。(2)1 可以除尽所有的自然数，所以它是一切自然数的约数。(3)1 的所有约数之和，仍等于 1；但是其他自然数的约数（包括这个数本身）的和，都大于这个



数，例如2的约数是1和2，而$1+2=3$，大于2。(4)1的倒数还是1本身。

现代数学把自然数分成三类：

(1) 只有一个约数的数，即1；

(2) 只有两个约数(1和该数本身)的数，叫质数，也叫素数；

(3) 有两个以上约数的数，叫做合数。”

数学老人滔滔不绝地讲下去：“古时候，印度人把很大的数叫做‘恒河沙’和‘那由他’。在俄文中，一些很大的数叫做‘不可思议’，‘说不出’。那时候，人们仿佛觉得存在着一个最大的自然数。小嘉，你认为这种想法对不对？”小嘉想了想，回答道：“不对！假定这个最大的自然数是N，那么只要在它上面加上个1，岂不比N还大？”

老爷爷夸奖了小嘉，又问了一个问题：

$1+1+1+1+\cdots\cdots$(项数无穷)

能有多大？小朋友都认真思考起来。突然，一向思考敏捷，学习勤奋的小澄答道：“这些数字的和虽然增加起来非常之慢，好象十足的‘牛步化’，可是由于项数是无穷多的，因此，到后来，它要比任何一个已知的很大的数(例如一万万万万亿)更大。”

老爷爷连连点头称是，他进一步告诉同学：“以

后你们会知道，这样的一列数，在数学上叫它‘发散的’。”

接着，数学老人给同学们看了下面的几个数字宝塔：

$$
\begin{aligned}
&1 &&= 1^2\\
&1+3 &&= 2^2\\
&1+3+5 &&= 3^2\\
&1+3+5+7 &&= 4^2\\
&1+3+5+7+9 &&= 5^2\\
&1+3+5+7+9+11 &&= 6^2\\
&1+3+5+7+9+11+13 &&= 7^2\\
&1+3+5+7+9+11+13+15 &&= 8^2\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&1 &&= 1^3\\
&3+5 &&= 2^3\\
&7+9+11 &&= 3^3\\
&13+15+17+19 &&= 4^3\\
&21+23+25+27+29 &&= 5^3\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1^2 &= 1\\
11^2 &= 121\\
111^2 &= 12321\\
1111^2 &= 1234321\\
11111^2 &= 123454321\\
111111^2 &= 12345654321\\
1111111^2 &= 1234567654321\\
11111111^2 &= 123456787654321\\
111111111^2 &= 12345678987654321
\end{aligned}
$$

同学们看了，不禁心中大喜，触发了继续学习的浓厚兴趣。数学老人看到同学们已经动心了，便奉赠给大家两句关于1的格言：

滴水能穿石，因为它目标始终如一。

一万个0抵不上一个1，一万次空想抵不上一次实干。

小嘉和同学们万万想不到，自然数的第一个成员就已经这么有趣了，便急急忙忙地把这本《1，2，3，……》看了下去。……

2与1不一样，是个“双数”，因此又名偶数。在古文里，“偶”字就有“成双作对”的意思。

2只有两个约数，即1和2本身，因此它是一个质数，而且是质数世界中最小的一个质数。又因为2是偶数，所以它是一个偶质数，并且是质数世界中唯一的一个偶质数。因为其他大于2的偶数，除了有1和该数本身两个约数外，至少还有一个约数2，所以这样的数就是合数。

“2”在日常生活中经常要碰到。如货币有2分、2

角和 2 元。人们数物件也习惯一对一对地数。

数学老人对同学说:“近年来，由于二进制数在电子计算机上的应用，‘2’的作用也就变得更大了。

我们平常用的十进制数，共有 0～9 十个数码，逢十进一。任何一个十进制数，总可以写成下面的形式，例如

$$43569=4\times10^4+3\times10^3+5\times10^2+6\times10^1+9\times10^0.$$

二进制数只用两个数码：0 和 1，逢二进一。因此，

$$1_{(二)}=1_{(十)}^{*},\quad 10_{(二)}=2_{(十)},\quad 11_{(二)}=3_{(十)},$$
$$100_{(二)}=4_{(十)},\quad 101_{(二)}=5_{(十)},\quad 110_{(二)}=6_{(十)},$$
$$111_{(二)}=7_{(十)},\quad 1000_{(二)}=8_{(十)},\quad \cdots\cdots$$

于是，一个二进制数可以这样化成十进制数，例如

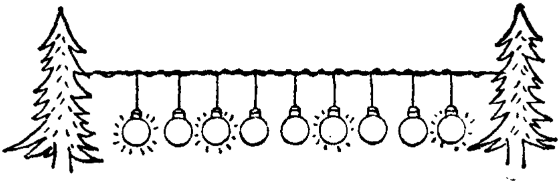
$$10101_{(二)}=1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0=21_{(十)}.$$

在联欢会上，你们可以做一些认识二进制数的游戏。例如在树上挂出一串灯，并规定，灯亮表示 1，灯暗表示 0。那末灯不同的亮暗，就可以表示一个二进制数。”

---

* 下角码(二)表示二进制数，(十)表示十进制数。

数学老人随手画出下面一串灯："它表示一个怎样的二进制数？化成十进制数是多少？"



小澄立刻在纸上计算如下：

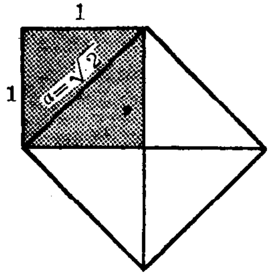
$$101001001_{(二)}=2^8+2^6+2^3+2^0$$
$$=256+64+8+1=329_{(十)}.$$

数学老人赞许地点点头说："如果有几位小朋友排成一行，举手的表示'1'，不举手的表示'0'，那末同样也可以用来表示一个二进制数。

由于二进制数只要两个数码，因此具有两种状态——例如闭路与通路——的电子元件，就能用来表示一个二进制数。用这些元件组成一定的线路，就可以用来进行各种运算了。这也就是目前电子计算机一般都采用二进制数的主要原因。正由于电子计算机所起的作用越来越大，因此有不少人主张，小学里也应该学一点二进制数的知识。"

数学老人的话头又转到了图形方面。他出了下面一道题，要小嘉做：画一个正方形，使它的面积等于已

知正方形面积的两倍。在画图的时候只能使用圆规和直尺(直尺上没有任何刻度)*。这可把小嘉给难住了，想了好一阵也没有办法。老爷爷看看其他同学也都面有难色，一时解不出来。于是他就叫小嘉在已知的正方形中引一条对角线，然后以这条对角线为一边作正方形，这个正方形的面积，就是原来正方形面积的两倍了(见图)。



"现在我可以证明给你们看。假设原来正方形的一边之长是1个单位，那末它的面积是1个平方单位，对角线的长是$\sqrt{2}$个单位(根据勾股定理，$a=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$)，因此新的正方形面积，就是$a^2=(\sqrt{2})^2=2$(平方单位)。

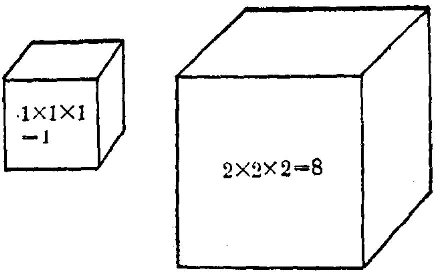
还有一个更直观的证法。从图上可以看出，原来的正方形，是由两块大小相等的等腰直角三角形拼起来的，而新的正方形，却是由四块与前面同样大小的等腰直角三角形拼起来的。这不是一眼就可以看出来，后者的面积正好是前者的两倍吗？这种用拼补图形来

---

* 这种只能用圆规和直尺的作图，叫做"尺规作图"。在初等几何里一般规定只能用尺规作图。

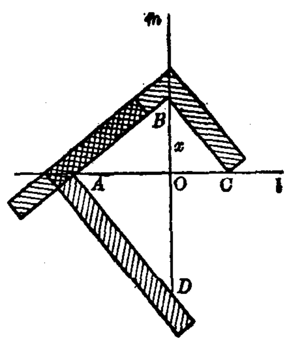
证明的方法，我国古代叫做‘演段’法，在数学发展史上是有它一定地位的。”

“同学们，你们喜欢听故事，干脆今天就再多讲一个吧。公元前四百多年，据说在古希腊的雅典流行了很厉害的伤寒病，雅典人为了想消除这个灾难，便向太阳神阿波罗(希腊神话里的神，你们不是常常听说什么阿波罗登月火箭吗，所指的也就是这个阿波罗)祈祷。太阳神指示：如果要消灾延寿，必须把我殿前的立方体香案的体积正好扩大一倍。雅典人一听很高兴，他们认为这个要求是很容易办到的，于是就把旧香案的各条棱都放大一倍，做了一个新的立方体香案。不料太阳神大为震怒。原来新香案的体积并不等于旧香案的两倍，而是等于八倍了。那末究竟应该怎样做呢？这可把他们难住了，只好去请教当时负有盛誉的第一流学者——柏拉图。



当然，这仅仅是一个神话故事，雅典人也并没有因此而死光。但故事中的那个问题，却是几何中有名的‘立方倍积问题’，是几何三大难题之一。后人证明，这个问题用‘尺规作图’是不可能的。如不只用尺规呢？

请看下图。作两条互相垂直的直线 l 和 m，从它们的交点 O 起，在 l 上截取线段 $OC=1$，在 m 上截取线段 $OD=2$。现在可用两根木工师傅的角尺相对叠合起来，使得两个直角顶 A,B 分别落在直线 l 和 m 上，而两条直角边分别通过 D 点和 C 点。可以证明，线段 OB 就是要求的立方体的棱长。



以上解法据说是柏拉图本人想出来的。”

号称“百手巨人”的阿基米德

数学老人话题一转:“你们都知道，圆的周长与直径之比是个常数，叫圆周率，用希腊字母 π 来表示。大数学家阿基米德在公元前三世纪就算出 π 的值在 $\frac{223}{71}$ 和 $\frac{22}{7}$ 之间。公元三世纪，我国数学家刘徽，通过圆内接正多边形的计算，求出 π 的近似值为 3.14。公元五世纪，南朝祖冲之算出 π 的近似值在 3.1415926 和 3.1415927 之间，这在当时世界上是最好的结果。这个划时代的纪录几乎保持了一千年之久。祖冲之还采用了两个分数来表示 π 的近似值，即约率（比较简便些的）$\frac{22}{7}$，密率（比较精密些的）$\frac{355}{113}$。欧洲人奥托求得密率，已是 1573 年的事了。因此国外有人曾

我国著名的数学家、天文学家、物理学家祖冲之

建议，将密率$\frac{355}{113}$称为‘祖率’，以纪念祖冲之的这一伟大贡献。

你们可能不会想到，数学家韦达在1579年首先发现了一个极其有趣的式子，用无穷乘积来表示π：

$$\pi=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots}$$

在式子里，全是1和2，你们说怪也不怪？”

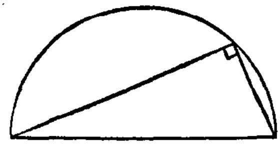
3只有两个约数：3和1，所以它是质数。因为3是奇数，所以它是一个奇质数，而且是质数世界中最小的一个奇质数。奇质数也叫做非偶质数。

2和3是相邻的两数，并且都是质数，因此它们是一个邻接质数对，同时也是质数世界中唯一的一个邻接质数对。因为在自然数中，任何两个相邻的数中总有一个是偶数，而大于2的偶数都是合数，所以任何这样的两个数，都不可能是邻接质数对。

3也是个常用词，有泛指的意义，例如古书中就有

“三人行必有我师焉”的说法。在古代，3又往往表示“很多”，例如3个人字叠加在一起就成了“众”字。

三角形是一个极为简单的几何图形，自古以来，它就是人们最喜爱的研究对象。据传说，古希腊的数学家泰勒斯，由于发现了半圆的内接三角形（一边是圆的直径，另一个顶点在半圆周上）一定是直角三角形（见图）而狂喜过度，竟至杀了一只牝牛来庆祝。

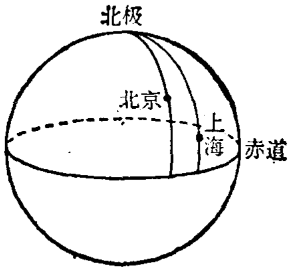


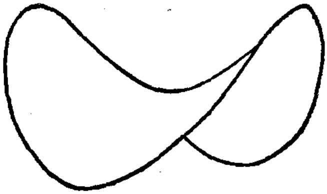
我国很古老的一本数学书《周髀算经》里，就记载了“勾三股四弦五”这个著名的几何事实，即“直角三角形斜边的平方，等于两条直角边的平方和”，我们就叫它“勾股定理”，希腊人则把它叫做“毕达哥拉斯定理”。据说，古代印度人就根据“3，4，5”这组数来作出直角，木工师傅等都用到它。

如果你在一张平坦的纸头上画一个三角形，那么，正如你早已知道的那样，这个三角形三个内角的和等于两直角（即180°）。你可以把这张纸头弯成圆柱形，

圆锥形等等，但是，画在这张纸上的那个三角形的三个内角之和，必定永远保持为两直角。

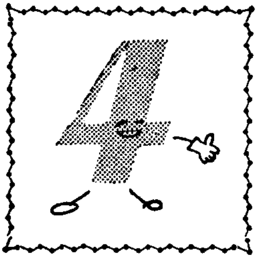
这种面的几何性质，不随着上述形变而改变，因此，经过形变后所得到的各种面，尽管在一般人的概念中是弯曲的，事实上是和平面一样平坦的。但是，要是不把一张纸头撕破，你就休想把它密合贴切地贴在球面上或马鞍形曲面上。不仅如此，如果你在球面上画一个三角形(所谓“球面三角形”)，就会发现，它的三个内角之和是大于两个直角的。这种例子举不胜举。譬如说，可以作一个球面三角形，它的一条边是经过上海的经线，另一边是经过北京的经线(它们相交于北极)，第三条边则是两条经线之间的赤道。这时，夹三角形底边的那两个角都是直角，再加上上面一个顶角的度数，所以这样的三角形三个内角之和，就一定大于两直角了。





同球面的情形相反，在马鞍形面上，你将会惊讶地发现，三角形三个内角之和是小于两直角的。

研究这些问题的几何学叫做曲面的“内蕴几何学”，不但很有趣，而且和近代物理也有密切关系。



数学老人对同学说：“看！4是自然数列中第二个完全平方数*。它一共有三个约数，即1，2和4。所以它不是质数，而是合数。它的约数的个数是个奇数。除了4之外，其他完全平方数约数的个数也是奇数，例如64是8的平方数，它共有七个约数：1，2，4，8，16，32，64。但是你们要看到，如果是非平方数的合数，那么它们约数的个数是偶数。

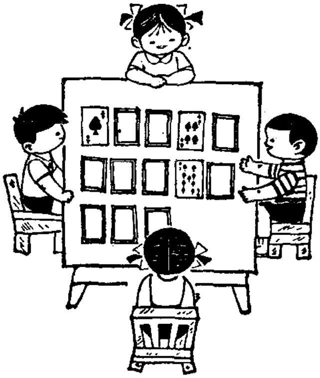
现在我请你们来做一个游戏，要用到一副扑克牌。”

数学老人叫小朋友在一副扑克牌中抽出一套黑桃(鸡心、方块或草头自然也可以)来，按 $A(1), 2, 3, \cdots\cdots J(11), Q(12), K(13)$ 的次序排好，正面统统向上。接

---

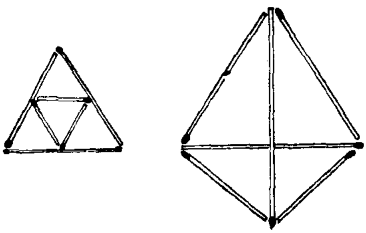
* 指开平方正好能开得尽的数。

着，每隔一张牌翻个身；然后，每隔二张牌翻个身；每隔三张牌翻个身；……到后来，桌子上看到的情况是：只有爱司、四点和九点三张牌是面朝上的，其他的牌都是背面朝天的。老爷爷问："这个现象是纯属偶然的吗？你们能加以解释吗？"



小澄略略一想，便回答道："这是和平方数的性质完全能联系得起来的。1只有唯一的一个约数，就是它本身，这张牌没有动过；4,9各有三个约数，这两张牌翻动了二次，因此仍旧正面朝上。其他各数约数的个数是偶数，因此都是背面朝上了。"老爷爷连连称是，接着又出题了：

"有六根火柴，要搭成四个完全相同的正三角形，该怎样搭？"



小嘉一听，这个题目又和数字4有密切关系，不觉大喜。可是他想了又想，毫无头绪。回过头来一看小澄，不