

目 录

前 言	1
第一章 断裂力学概论	1
一、断裂力学是怎样发展起来的	1
二、断裂力学内容简介	5
三、断裂力学的工程应用	10
第二章 二维弹性问题的复变函数解法	13
一、用复变函数表示平面问题的应力函数	13
1. Muskhelishvili 应力函数	13
2. 用 Muskhelishvili 应力函数表示的应力分量 and 位移分量	16
3. Westergaard 应力函数	19
二、用 Muskhelishvili 应力函数求解平面裂纹问题	20
1. 具有椭圆内孔的无限板的应力函数	21
2. I 型加载下的经典裂纹问题	22
3. 具有中心穿透裂纹的无限板单向均匀受拉问题	27
4. II 型加载下的经典裂纹问题	29
三、III 型加载下的经典裂纹问题	30
第三章 线弹性断裂理论	34
一、线弹性断裂判据	34
1. 应力强度因子 K_I 和按 K_I 建立的断裂判据	34
2. 线弹性断裂力学在非完全弹性体中应用的推广	37
3. 线弹性断裂力学的适用范围——塑性区尺寸的限制	43
二、能量平衡理论和能量判据	45
1. 裂纹扩展力与能量判据	45
2. G_I 与 K_I 的关系	48
3. G_I 的力学标定法——柔度标定法	50
三、阻力曲线	52
四、复合型断裂判据及其工程应用	54
1. 最大周向应力理论 (σ_s 准则)	55
2. 应变能密度因子理论 (S 准则)	58
3. 最大应变能释放率理论 (G 准则)	63

4. 复合型断裂的工程判据.....	64
第四章 几种常见裂纹模型的应力强度因子.....	68
一、无限板上穿透裂纹的应力强度因子.....	68
1. 由复应力函数直接计算应力强度因子.....	69
2. 利用保角变换来求解应力强度因子.....	76
二、几种常见的有限板裂纹模型的应力强度因子.....	81
1. 用近似简化法求有限板裂纹模型的应力强度因子.....	81
2. 用边界配位法求解有限板单侧裂纹的应力强度因子.....	84
三、内部椭圆裂纹和表面半椭圆裂纹的应力强度因子.....	88
1. 无限体内的椭圆片状裂纹的应力强度因子.....	89
2. 表面半椭圆片状裂纹的应力强度因子.....	92
3. 1/4 椭圆片状角裂纹问题.....	98
第五章 弹性断裂力学.....	100
一、COD 法.....	101
1. COD 定义.....	101
2. COD 判据与临界 COD.....	102
二、两种典型裂纹模型的 COD 计算公式.....	104
1. D-M 模型与 BCS 公式.....	104
2. Wells 公式.....	112
三、J 积分法.....	113
1. J 积分的定义及其守恒性.....	114
2. J 积分判据及其有效性分析.....	117
四、J 积分的形变功率定义.....	119
五、J 积分判据在工程中的实用性及其限制.....	125
六、两类典型弹性断裂问题的 J 积分.....	126
1. D-M 模型的 J 积分表达式.....	126
2. 位于屈服区内的小裂纹的 J 积分表达式.....	127
第六章 断裂韧性测试原理.....	131
一、 K_{Ic} 的测试原理.....	131
1. K_{Ic} 测试方法简述.....	131
2. 条件载荷 P_c 的确定.....	133
3. 试样尺寸要求和 K_{Ic} 的有效性判断.....	135
二、COD 的测试原理.....	138
1. 三点弯曲试样的 COD 计算公式.....	138
2. COD 阻力曲线的测制.....	140
3. 金相剖面法.....	141

三、 J_{Ic} 的测试原理	141
第七章 裂纹的动态扩展与止裂	145
一、高速加载下的动态断裂和动载断裂韧性	145
二、裂纹的动态扩展和动态断裂韧性	149
三、裂纹在动态扩展中的分叉现象	152
四、裂纹动态扩展中的止裂现象与止裂韧性	155
第八章 裂纹的疲劳扩展和疲劳寿命计算	159
一、疲劳裂纹的发生和发展	159
二、裂纹在弹性区内的扩展规律	161
三、影响疲劳裂纹扩展的因素	165
四、恒幅循环下疲劳裂纹扩展寿命的计算	171
五、变幅循环下疲劳裂纹扩展寿命的计算	174
六、应变疲劳条件下的裂纹扩展速率	175
第九章 应力腐蚀开裂与腐蚀疲劳	177
一、应力腐蚀临界应力强度因子	177
二、应力腐蚀裂纹扩展速率与寿命计算	179
三、影响应力腐蚀开裂的因素	182
四、 K_{ISCC} 和 $\frac{da}{dt}$ 的测试原理	184
五、腐蚀疲劳	187
第十章 断裂力学的工程应用	192
一、断裂力学的工程应用实例	192
1. 发电机转子的缺陷安全分析	192
2. 汽轮机叶轮的裂纹容限分析	195
3. 柴油机曲轴的断裂强度分析	199
二、断裂力学在压力容器和管道中的应用	203
1. 应力与应变计算	203
2. 缺陷的当量处理	205
3. 断裂判据	207
三、I IW 标准简介	210
四、CEGB 双判据法简介	215
附录 I. 复变函数的基本知识	220
附录 II. 弹性力学平面问题的基本方程式	223

第一章 断裂力学概论

断裂力学作为一门真正的学科, 还只是近十几年的事。如果从 1957 年 G.R. Irwin 提出应力强度因子概念算起, 也还不到三十年。但是它的发展异常迅速, 是目前固体力学中最活跃的一个分支, 对于诸如金属物理、冶金学、材料科学以及航空、机械、建筑和地震工程等各工程技术部门都产生了重大的影响, 显示出它巨大的生命力, 并已被广泛地用来解决各种工程实际问题。在国内外都有不少应用断裂力学颇为成功的例子, 有不少国家和部门甚至已根据断裂力学来制订设计准则和验收规范了。例如美国的 B-1 轰炸机就是应用断裂力学来进行设计的; 此外如英国北海油田的采油平台支架和美国阿拉斯加的输气管线的缺陷容限评定等, 都是断裂力学在工程应用上的典型范例。至于断裂力学在压力容器中的应用, 特别是在核容器中的应用, 相对来说要更加成熟一些。当然, 由于断裂力学还是一门新兴学科, 历史还短, 因此在理论分析和实验技术上都还不完善, 应用实践方面的经验尤感不足, 有待于进一步丰富和提高。

一、断裂力学是怎样发展起来的

1. 传统设计思想所面临的挑战

传统的设计思想以常规强度理论作为基础。首先按照结构的服役条件, 在选材时对材料的塑性指标(δ , ψ)和韧性指标(α_k)提出一定的要求。然后, 根据常规强度理论进行定量的强度计算, 即要求构件的计算应力满足

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma],$$

其中 $[\sigma]$ 为许用应力, 其值可按 $[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$ 或 $[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$ 来选取, σ_s 和 σ_b 分别为材料的屈服极限与强度极限, n_s 与 n_b 分别为按屈服极限与强度极限取用的安全系数。

近半个世纪以来, 特别是第二次世界大战以后, 随着设备和结构的大型化、设计应力的提高、高强度和超高强度材料($\sigma_s \geq 1000 \sim 1500 \text{MPa}$)的使用、焊接工艺的普遍采用以及设备与结构使用条件的严酷化(温度、介质、原子辐照、载荷变动等), 常规强度理论发生“失灵”的情况日益增多。按照常规设计思想设计出来的合乎常规强度标准的设备或结构, 会在服役期内甚至试压时发生灾难性的破坏。

例如 1965 年美国 John Thompson 公司的一台氨合成塔, 其内径为 1700mm, 壁厚为 149mm, 外、内径之比为 $k=1.175$, 塔长 19m, 重 1.64t。所用材料为 MnCrMoV 钢, 此种材料的屈服极限为 $\sigma_s=460 \text{MPa}$, 强度极限为 $\sigma_b=582 \text{MPa}$, 设计压力为 36MPa, 水压试验压力为 49MPa。按弹性失效理论与塑性失效理论计算所得的容器屈服压力与爆破压力分别为

$$\left. \begin{aligned} p_c &= \sigma_s \frac{k^2-1}{k^2+1} = 74.1 \text{ MPa} \\ p_c &= \sigma_s \frac{k^2-1}{k^2+1} = 93.7 \text{ MPa} \\ p_c &= \sigma_s \ln k = 74.3 \text{ MPa} \\ p_c &= \sigma_s \ln k = 93.9 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{拉美公式,} \\ \\ \\ \text{塑性公式.} \end{array}$$

以上结果表明, 此容器是完全符合常规强度标准的。但是, 当此容器在试压过程中加压到 35.2MPa 时就突然爆破, 其中有一块重达 2t 的碎片竟飞出数十米之远。事后检查, 发现在焊缝区内埋藏有一长为 10mm 的内部裂纹, 此裂纹就是容器的“爆破源”。加上制造中退火不完全, 材料韧性不足, 因而在试压时就发生爆破。爆破压力非但远低于容器的极限强度, 而且低于屈服强度。此等破坏即属于所谓的低应力脆性破坏。

如此的例子还很多, 下面仅举几起比较著名的低应力脆性破坏事例。

在 1938 年至 1940 年的三年内, 有三座横跨比利时阿尔伯特运河的桥梁相继发生破坏。其中第一座发生于 1938 年 3 月 14 日, 破坏前先是发出类似于枪炮的响声, 随后断成三截坠入河中。三座桥梁的破坏都是在严寒下发生的, 当时的气温约为零下 14°C。此外, 在 1947 年至 1950 年间, 比利时还有 14 座桥梁发生类似的破坏事故。

1943 年至 1947 年间, 在美国的 5000 艘全焊接“自由轮”中, 发生了约 1000 次脆性破坏事故。其中有 238 艘完全破坏, 有的甚至断成两截。究其原因, 一为低温, 一为存在缺陷。

1950 年, 美国北极星导弹上的固体燃料发动机壳体在试发射时发生了爆炸。壳体材料是 D6AC 钢, 其屈服强度为 $\sigma_s = 1400 \text{ MPa}$, 常规强度指标和韧性指标都符合设计标准。爆破时的应力远低于许用应力。事后检查, 发现其破坏是由一个深度为 0.1~1mm 的裂纹引起的。

上述一系列的破坏事故, 给我们提出了这样一个问题, 既然这些设计都是符合传统强度标准的, 那末它们为什么会在没有超限的情况下发生破坏呢? 对于这个问题的认识, 人们曾经历过一个很长的探索过程。从断裂力学观点来看, 这些破坏事故之所以发生, 主要是由于作为设计依据的常规强度理论是把材料一律看成为理想的均匀连续体, 而事实上, 在构件内部总难免存在有气孔、夹渣、切口和未焊透等缺陷。从这个意义上说, 作为常规强度指标是由近于理想连续体的小试样得到的屈服极限 σ_s 和强度极限 σ_b , 与实际构件的破坏并无直接联系。因此, 常规强度准则并不能完全保证构件的安全服役。

断裂力学不同于常规强度理论, 它是以材料总不可避免地存在有裂纹——缺陷这一事实作为前提的。为此, 人们也常把断裂力学称之为裂纹(体)力学。

2. 断裂力学发展简史

其实, 作为断裂力学中的能量理论思想, 早在 1920 年就由 A.A.Griffith 提出来了^[1]。但是由于金属材料的低应力破坏事故在当时并不突出, 因此, 人们对于脆断问题和 Griffith 的能量理论思想的重要性还缺乏应有的认识。直到第二次世界大战期间, 低应力脆断问题才引起工程技术界的充分重视, 其中尤以“自由轮”破坏事故最引人注目。但是在当时还仅仅把脆断的原因归结为材料的韧性不足, 是低温引起材料韧性急剧降低的这一因素。因此, 研究的重点只放在提出一个防脆断的韧性指标上。美国海军研究所的 W.S.Pellini 就是这方面研究的代表, 他曾经提出过一个防脆断的转折温度和断裂分析图方法。

Pellini 等人通过对“自由轮”材料的取样试验,得到了船体不同部位材料的冲击韧性值如下:

开裂区: $100 \sim 160 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{mm}^2$, 最高 $220 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{mm}^2$;

传播区: $160 \sim 240 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{mm}^2$, 最高 $260 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{mm}^2$;

止裂区: $400 \sim 1040 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{mm}^2$ 。

因此他们提出以 $300 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{mm}^2$ 作为材料在最低使用温度下防止脆断的韧性指标。

另一方面,材料的韧性还与温度有关。在某一温度区间内,一些钢种的 C_v (却贝冲击韧性)值会突然降低,如图 1-1 所示。这一现象就称为韧-脆转折,所在温度区间就是韧-脆转折温度。为防止脆断,就要避免构件在韧-脆转折温度以下工作。但是,由于实际裂纹端部的尖锐程度要比用来确定转折温度的 C_v 试样的切口尖得多,因而由 C_v 试样定出的转折温度就显得偏低。于是 Pellini 他们又采用落锤试验或爆破鼓胀试验来定出一个无延性转变温度 NDT(Nil Ductility Temperature),并认为材料在 NDT 下的破坏是完全脆性的。在研究船只破坏中,他们又根据 T.S.Robertson 的止裂试验提出了一个止裂温度 CAT (Crack Arrest Temperature)。当环境温度高于 CAT 时,构件内部即使产生了裂纹也会自行止裂而不再传播延伸。

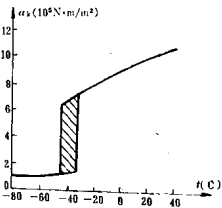


图 1-1 钢的 α_k 值随温度的变化

在上述研究的基础上, Pellini 提出了一个断裂分析图,即所谓 FAD 图(Fracture Analysis Diagram)^[2],如图 1-2 所示,以作为防脆断设计的依据。

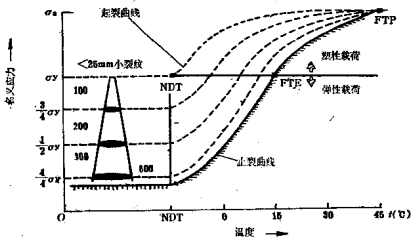


图 1-2 Pellini 的断裂分析图(FAD 图)

转折温度和断裂分析图方法对于防脆断设计作出了一定的贡献,因此曾一度被列入 ASME 规范。但是由于这一方法是纯粹建立在实验基础上的,既缺乏严密的理论基础,也不能作准确的定量计算,而且着眼点也主要是放在温度上,而不是裂纹尺寸上,因此有很大的局限性。再者,止裂温度并不适用于压力容器(因为压力波传播速度与介质有关)。由于

转折温度和断裂分析图法有如上的种种局限性，故在 1972 年重新修订 ASME 规范时又摒弃了这一方法。

与转折温度方法研究的同时，另有一些人把着眼点放在材料的初始缺陷上。他们通过对脆断事故的调查研究后得出结论：低应力脆性断裂都是由裂纹或类裂纹缺陷的传播引起的。由于裂纹的存在，与裂纹直接相联系的局部地区的应力将重新分布。尽管整个截面上的平均应力仍低于材料的屈服极限 σ_s ，但上述局部地区的应力却可能很大。这种局部地区的应力状态就成为裂纹传播、并最终导致构件断裂的控制因素。于是，早年提出的 Griffith 理论又重新引起人们的重视。

当时，Griffith 针对玻璃、陶瓷等脆性材料，从能量观点提出了断裂应力与裂纹尺寸之间的关系为

$$\sigma_s \propto \frac{1}{\sqrt{a}},$$

或

$$\sigma_s \sqrt{a} = \text{常数},$$

其中 σ_s 即为断裂应力， a 为裂纹长度（参图 1-3）。他并且指出，此常数的值就等于 $\sqrt{\frac{2E\Gamma}{\pi}}$ 。

于是，上述关系式便可以进一步改写成

$$\sigma_s \sqrt{a} = \sqrt{\frac{2E\Gamma}{\pi}} \quad (1-1)$$

其中的 E 为材料的弹性模量， Γ 为材料的表面能。

Griffith 理论第一次揭示了断裂应力与裂纹尺寸之间的定量联系，这对于后来的断裂力学发展产生了很大的影响，尽管在当时包括 Griffith 本人在内都还没有意识到这一理论所具有的重要意义。

对于金属材料而言，由于存在塑性，因而在裂纹扩展过程中不可避免地要产生塑性变形并消耗一定量的形变功。所以，将式(1-1)直接用于金属材料就显得不合适。为此 E. Orowan 于 1949 年对此作了修正^[1]，计入了塑性变形的影响。Orowan 提出的修正公式为

$$\sigma_s \sqrt{a} = \sqrt{\frac{2E(\Gamma + U_s)}{\pi}} = \text{常数}, \quad (1-2)$$

式中的 U_s 为裂纹在扩展过程中所消耗的形变功。

Griffith 和 Orowan 的理论就构成了断裂力学中能量理论的基础。

但是，脆性断裂理论的重大突破还应该归功于 G. R. Irwin，他于 1957 年提出了应力强度因子的概念^[4]，随后又在此基础上形成了断裂韧性的概念，并建立起测量材料断裂韧性的实验技术。这样一来，作为断裂力学的最初分支——线弹性断裂力学就开始建立起来。近二十多年来，线弹性断裂力学已广泛地渗透到各个工程领域，并逐步成为结构设计、选材与检验的主要依据之一。特别是在火箭、飞机等宇航、航空工业部门中的应用，取得了更为明显的成功。

由于线弹性断裂力学是建立在线弹性力学基础上的，所以，对于工程中大量使用的诸如中、低强度钢等具有较好塑性的材料并不适合。因为这些材料在裂纹发生扩展前，在裂纹前缘将出现一个较大的塑性区（图 1-7）。此塑性区的尺寸可接近于甚至超过裂纹本身的尺

寸,有时甚至可以达到整体屈服。如果在裂纹扩展前,其前缘的塑性区尺寸已达到或接近于裂纹本身尺寸,那末,在断裂力学中就将其划归为大范围屈服断裂范畴。如果在裂纹扩展前已发生整体屈服了的情况,则就属于全面屈服断裂范畴了。对于这种大范围屈服断裂或全面屈服断裂问题,就再也不能采用线弹性断裂力学来进行分析,而必须代之以弹塑性断裂力学了。弹塑性断裂力学与线弹性断裂力学不同,它以弹塑性力学为基础。和线弹性断裂力学相比,弹塑性断裂力学在理论上要困难得多,也更加不成熟。但是近十多年来,在这方面已开展了大量的研究工作,是当前断裂力学发展中最为活跃的一个新分支。目前用于弹塑性断裂力学研究的最主要方法是 J 积分法与COD法。前者由J.R.Rice^[6]于1968年首先提出^①,后者则于1963年由A.A.Wells所提出^[7]。虽然弹塑性断裂力学还远未成熟,但目前已被广泛地用于中、低强度钢结构的断裂分析中。在压力容器的断裂分析中,弹塑性断裂力学特别是COD法已得到了广泛的应用。这方面的进展以F.M.Burdekin和M.G.Dawes于1971年在伦敦会议上提出的《断裂力学在压力容器工艺上的应用》一文为代表^[7]。

我国的断裂力学研究工作虽然起步较晚,但是在断裂力学学术界和工程技术部门的共同努力下,十多年来在固体力学、材料、冶金、机械和航空等各领域,也已开展了大量的工作,并在某些方面取得了较出色的成绩,为断裂力学的发展作出了应有的贡献。

二、断裂力学内容简介

从前面的简单介绍中可以看出,断裂力学是研究带裂纹材料或结构的强度以及裂纹扩展规律的一门学科。更具体地说,它是运用连续体力学的原理,来研究带有缺陷的均质连续材料制成的工程结构件的强度与断裂条件,建立一套适用于这类构件的理论分析与实验研究的原理和方法,以确保其安全服役。

断裂力学可以分为线弹性断裂力学与弹塑性断裂力学两大部分。本书对两部分的内容都要作详细的讨论。为了使读者在学习全书前对断裂力学有一个初步的轮廓,本节先对这两部分内容作一简单介绍。

1. 线弹性断裂力学

线弹性断裂力学的研究对象是带有裂纹的线弹性体,其基础是线弹性理论。目前用于线弹性断裂力学研究的有以Griffith-Orowan理论为基础的能量理论和Irwin的应力强度因子理论。此处先介绍应力强度因子理论,至于前者将在后文中再作详细讨论。

(1) 三种断裂类型

对于各种复杂的断裂形式,总可以分解成为三种基本断裂类型的组合。这三种基本断裂类型即为I型断裂、II型断裂和III型断裂(或称之为I型加载、II型加载和III型加载)。

I型断裂属于张开型断裂,如图1-3(a)所示。若拉板上有一条垂直于拉力方向而贯穿板厚的裂纹,如图1-3(b)所示,其断裂即属于I型。此外,如图1-3(c)所示的长圆筒形容器或管道壁上的纵向裂纹在内压作用下的破裂亦属于I型断裂。

^①Rice提出的 J 积分与J.D.Eshelby于1956年提出的能量、冲量张量^[8]具有一致的形式。

I型断裂属于滑移型断裂，如图 1-4(a)所示。轮齿或花键根部沿切线方向的裂纹所引起的断裂，即属于 **I**型断裂（图 1-4(b)）。此外，如图 1-4(c)所示的受扭转薄壁圆管上贯穿管壁的环向裂纹，在扭矩作用下的破坏也属于 **I**型断裂。

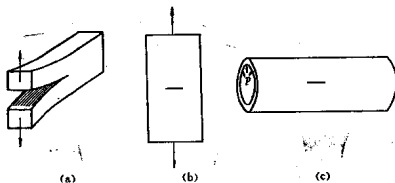


图 1-3 **I**型(张开型)断裂

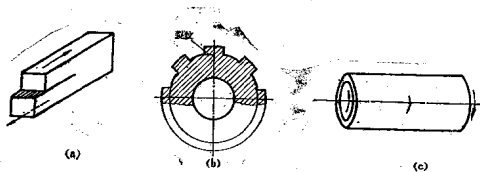


图 1-4 **II**型(剪移型)断裂

III型断裂属于撕裂型断裂，如图 1-5(a)所示。圆轴或圆形式样上的环形切槽或表面环形裂纹（图 1-5(b)），在圆轴受到扭转作用时发生的断裂即属于 **III**型断裂。

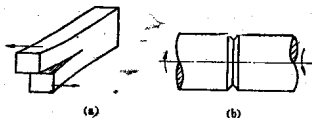


图 1-5 **III**型(撕裂型)断裂

在这三种断裂型式中，以 **I**型断裂最常见、最基本，也最危险，因此研究工作也开展得最多。本书也以讨论 **I**型断裂为主。

(2) 应力强度因子

对于如图 1-6 所示的无限平板，其上具有长为 $2a$ 的穿透性裂纹，当它受到均匀拉力 σ 的作用时（属于 **I**型加载），其裂纹端部区域（ $r \rightarrow 0$ ）的应力分量可以应用弹性理论解得为

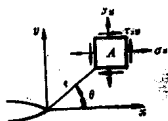
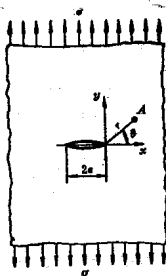


图 1-6 二向均匀受拉下的带中心穿透裂纹的无限板

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma \sqrt{\pi a} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \\ \sigma_y &= \sigma \sqrt{\pi a} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \\ \tau_{xy} &= \sigma \sqrt{\pi a} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

由上述的应力分量表达式可以看出，中括号内的各项只与所研究的点的位置有关，亦即是点的位置坐标函数。而系数 $\sigma \sqrt{\pi a}$ 则与点的位置无关，仅决定于载荷及裂纹尺寸，因此它是裂纹端部区域应力场的一个公共因子。由于这一因子是决定裂纹端部区域应力分量值的公共因素，亦即是决定裂纹端部区域应力场强度的因素，故把它称之为应力强度因子，记为 K_I 。于是有

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (1-4)$$

可见，应力强度因子 K_I 是度量裂纹端部应力场强弱程度的一个参量。 K_I 的单位为 $\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$ 或 $\text{MN/m}^{3/2}$ 。引进符号 K_I 后，(1-3)式便可以改写成

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

对上述应力分量表达式作进一步分析后便可以看出，在裂纹尖端上（即 $r=0$ 处），各应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 都趋于无穷大。这就表明，裂纹尖端是一个奇点。从这个意义上说，应力强度因子 K_I 是裂纹端部应力场的奇异性强度。由于在裂纹尖端存在应力的奇异性，因

此,当带有裂纹的构件受到载荷作用时(不管载荷的值有多大),裂纹端部的应力就会达到很大的值,理论上可达无限大。但根据常规的强度准则,当最大应力达到材料的屈服极限 σ_s 或强度极限 σ_b 时,构件就要破坏。这就表明,若从常规强度观点来看,当构件内部一有裂纹时,其承载能力就将完全丧失。换言之,它就不再具有强度了。显然,这一结论是与实际情况不相符合的。恰恰相反,裂纹尖端的应力奇异性正好说明了在有裂纹的情况下,常规的强度准则已不再适用,即再也不能用应力值的大小来衡量材料的受载程度和极限状态了。那末,在此种情况下又应该用什么样的量来衡量材料的受载程度和极限状态呢?

既然应力强度因子 K_I 是裂纹端部应力场强度的度量, K_I 的表达式(1-4)也表明,随着载荷 σ 的增加, K_I 值也将随之增大。因此可以推断,当载荷 σ 增大到某一临界值时,构件就将发生破坏(裂纹扩展)。此时,应力强度因子 K_I 也达到了某一临界值 K_{Ic} 。这样,对于带裂纹的构件来说,其强度准则就应该是

$$K_I < K_{Ic}$$

✓实验也证实了这一推断的正确性。这就表明:对于带裂纹的构件来说,其受载程度和极限状态再也不能用应力这个量来表征了,而必须代之以应力强度因子。

(3) 材料的断裂韧性

大量实验表明,临界应力强度因子 K_{Ic} 的值既与裂纹体的材料有关,也与其几何形状及尺寸有关。但是,对于同一种材料而言,存在一个 K_{Ic} 的最低值,即 $(K_{Ic})_{min}$,此值是材料的性能常数,即对于不同的材料有不同的但是确定的 $(K_{Ic})_{min}$ 值。又由于此值是反映材料抗断裂能力的一个指标,故就把它称之为材料的断裂韧性,记作 K_{Ic} 。其单位也是 MPa/m 或 $\text{MN}/\text{m}^{3/2}$ 。各种材料的 K_{Ic} 值均可以通过实验测得。

(4) 线弹性断裂判据

如前所述,当裂纹体的应力强度因子 K_I 达到某一临界值 K_{Ic} 时,裂纹即要向前扩展。再对照上节的讨论就不难看出,此临界值的低限就是材料的断裂韧性 K_{Ic} 。因而带裂纹构件的断裂准则就成为

$$K_I = K_{Ic} \quad (1-6)$$

意即当裂纹端部的应力强度因子等于材料的断裂韧性时,裂纹就要开始扩展。此即为I型加载下的线弹性断裂判据。

与I型断裂相仿,对于II型与III型断裂,同样可以通过线弹性理论来进行分析,以求得其裂纹端部的应力强度因子 K_{II} 和 K_{III} 来。此外也同样可以通过实验测得各种材料在II型和III型加载下的断裂韧性 K_{IIc} 和 K_{IIIc} 来,从而得到在II型和III型加载下的断裂判据为

$$\left. \begin{aligned} K_{II} &= K_{IIc} \\ K_{III} &= K_{IIIc} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

不过,在断裂力学研究中并不是按照上述思路来建立在II型加载和III型加载下的断裂判据的,而是希图通过理论分析和实验研究来发现材料在不再加加载型式下发生断裂的基本规律,从而建立起如同材料力学中的强度理论那样的统一的断裂判据来。有关这方面的内容,将在第三章中再作详细讨论。

还必须指出的是,对于不同的几何形状和不同的载荷情况,应力强度因子的表达式也是不一样的。式(1-4)所表示的 K_I 是带有穿透裂纹的无限平板在二向均匀拉伸下的应力强度因子。对于一般情况下的II型加载下的应力强度因子,通常可以引进一个几何形状因子 Y ,

而将其表示成如下的通式:

$$K_I = y\sigma\sqrt{\pi a}, \quad (1-8)$$

其中 y 值取决于裂纹体的几何形状和载荷形式。对于受二向均匀拉伸的带有穿透裂纹的无限平板, 其形状因子 $y=1$ 。至于如何求各种状态下的应力强度因子问题, 则将在第四章中再作详细讨论。

2. 弹塑性断裂力学

前面已经提及, 对于那些在裂纹端部已有一个很大塑性区的大范围屈服断裂问题和全面屈服断裂问题, 线弹性断裂理论已不再适用, 而必须采用弹塑性断裂理论来进行分析了。目前用来研究弹塑性断裂的方法已有不少种, 但是以 COD 法与 J 积分法最为普遍, 本书也只讨论这两种方法。下面对这两种方法先作些简要的介绍, 更详细的分析将在第五章中进行。

(1) COD 法

当裂纹受到垂直于裂纹线方向的拉伸时, 原先贴合在一起的上、下两个裂纹表面就将分离, 从而使裂纹张开。裂纹面在裂纹顶端处的张开位移量就是所谓的 COD。所以, COD 就是裂纹顶端的张开位移量 (Crack Opening Displacement), 通常用符号 δ 来表示, 如图 1-7 所示。

显然, 随着载荷的增加, 裂纹顶端的张开位移量, 即 COD 值也将增大; 反之当载荷降低时, COD 值也随之减小。换言之, 一定的 COD 值将对应于一定的受载状态, 亦即对应于裂纹端部的一定应力、应变场强弱程度。因此, 我们就可以用 COD 值来间接地度量裂纹端部的应力、应变场强度。

对于受单向均匀拉伸的具有中心穿透裂纹的无限板, 当其应力水平 $\sigma/\sigma_s < 1$ 时, 其 COD 值为

$$\delta = \frac{8\sigma_s a}{\pi E} \ln \sec \frac{\pi \sigma}{2 \sigma_s} \quad (1-9)$$

上式就是所谓的 BCS 公式, 由 B.A. Bilby、A.H. Cotrell 和 K.H. Swinden 等人于 1963 年导出^[9]。当应力水平 $\sigma/\sigma_s \geq 1$, 即所谓全面屈服情况下, Wells 由大量的宽板试验数据归纳出如下的公式:

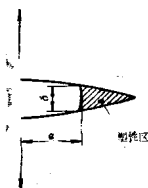


图 1-7 裂纹顶端的张开位移

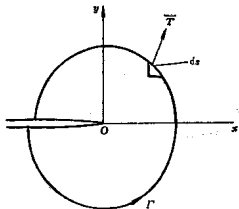


图 1-8 计算 J 积分值的任意积分回路

$$\delta = 2\pi a e, \quad (1-10)$$

式中的 e 为标称应变。上式就是著名的 Wells 公式^[10]。

与线弹性断裂情况一样，对于弹塑性断裂，当所加的载荷达到某一定值时，构件也将达到断裂的临界状态。此时，裂纹顶端的张开位移量 δ 也到达某一临界值，此值就等于材料的断裂韧性。在 COD 法中，材料的断裂韧性用符号 δ_c 来表示。于是，用 COD 表示的断裂判据就为

$$\delta = \delta_c. \quad (1-11)$$

(2) J 积分法

在固体力学中，为了分析缺陷周围的应力和应变场，常常采用一些与积分途径无关的线积分，其中之一就是 J 积分。J 积分的定义为

$$J = \int_{\Gamma} \left[W dy - \bar{T} \frac{du}{dx} ds \right], \quad (1-12)$$

式中的 W 是应变能密度或形变功密度，其值为

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}, \quad (1-13)$$

$\bar{T}$ 为积分回路上任意弧线段所对应的面元 $ds dz$ 上的应力矢量； u 为应力 $\bar{T}$ 作用点的位移矢量； Γ 为由裂纹下自由表面上任一点开始，按逆时针方向环绕裂纹尖端地区，终止于裂纹上自由表面上任一点的任意积分路线。

以后将要证明，J 积分值同样可以作为裂纹端部应力、应变场强度的度量。当此 J 积分值达到某一临界值时，裂纹就将开始扩展。此临界值即是材料的断裂韧性。在 J 积分方法中，断裂韧性用 J_{Ic} 表示。于是断裂判据就成为

$$J = J_{Ic}. \quad (1-14)$$

三、断裂力学的工程应用

断裂力学作为一门学科，虽然其历史还很短，理论和方法也还很不完善，但是它在工程结构设计、合理选择材料和工艺、发展新材料和新工艺、分析断裂事故、进行裂纹容限计算、估算构件的剩余强度和剩余寿命，以及确定检验周期和制订无损探伤标准等方面，都在发挥着愈来愈大的作用。下面仅举几个简例来说明断裂力学在工程上的应用。

例 1 有一高强度容器，设计许用应力为 $[\sigma] = 1400 \text{ MPa}$ ，探伤只能发现深度大于 1mm 的表面裂纹。现有两个钢种可供选择，其中甲钢种的 $\sigma_s = 2100 \text{ MPa}$ ， $K_{Ic} = 50 \text{ MPa}/\sqrt{\text{m}}$ ，乙钢种的 $\sigma_s = 1700 \text{ MPa}$ ， $K_{Ic} = 84 \text{ MPa}/\sqrt{\text{m}}$ 。试分析应该选用哪一种钢种合适。

根据常规强度理论，两个钢种的强度安全系数分别为

甲钢：

$$n = \frac{\sigma_s}{[\sigma]} = \frac{2100}{1400} = 1.5,$$

乙钢：



$$n = \frac{\sigma_s}{[\sigma]} = \frac{1700}{1400} = 1.21。$$

按常规强度理论，显然甲钢种的强度储备大于乙钢种。

下面再来分析两个钢种的抗脆断能力。材料的断裂应力可根据线弹性断裂判据 (1-6) 和应力强度因子表达式 (1-8) 来进行计算。由式 (1-6) 和 (1-8) 可得断裂应力的计算式为

$$\sigma_c = \frac{1}{y} \cdot \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}}。 \quad (1-15)$$

由有关图表可以查得在有浅表面裂纹的情况下，两个钢种的几何形状因子分别为

$$y_{\text{甲}} = \frac{1.1}{\sqrt{1.32}} = 0.96,$$

$$y_{\text{乙}} = \frac{1.1}{\sqrt{1.26}} = 0.98。$$

形状因子的差异是由于考虑了对塑性区的修正之故（有关塑性区修正方面的更详细讨论将在第四章中介绍）。将上面得到的形状因子值代入式 (1-15)，即可得到两种钢材的断裂应力分别为

甲钢种：

$$\sigma_c = \frac{1}{y_{\text{甲}}} \cdot \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}} = \frac{1}{0.96} \times \frac{50}{\sqrt{\pi \times 10^{-3}}} = 930 \text{ MPa}，$$

乙钢种：

$$\sigma_c = \frac{1}{y_{\text{乙}}} \cdot \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}} = \frac{1}{0.98} \times \frac{84}{\sqrt{\pi \times 10^{-3}}} = 1530 \text{ MPa}。$$

可见，甲钢种的断裂应力不仅比乙钢种低，且低于许用应力 $[\sigma]$ 。这就表明，若选用甲钢种作为容器材料的话，就可能在低于设计压力下发生低应力脆断。若选用乙钢种，则就不会发生低应力脆断。

从以上分析可知，尽管乙钢种的强度较甲钢种低，但是，考虑到甲钢种的抗脆断能力严重不足，而乙钢种则还有抗脆断储备，即

$$n_s = \frac{\sigma_s}{[\sigma]} = \frac{1530}{1400} = 1.1，$$

因而从断裂力学观点看，以选取乙钢种作为容器材料为宜。

例 2 某高压容器所用的材料是 40SiMnCrNiMoV 钢，其机械性能为 $\sigma_s = 1960 \text{ MPa}$ ， $\sigma_b = 2100 \sim 2200 \text{ MPa}$ ， $K_{Ic} = 52 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ 。选用的设计安全系数为 $n = \frac{\sigma_s}{[\sigma]} = 2.2$ 。在第一批试制的 10 台容器中，有 7 台于水压试验时破裂，其断裂应力均低于材料的屈服极限 σ_s 。事后检查发现容器内壁存在深为 2mm、长为 7mm 的表面裂纹。经计算，在爆破压力下，此种表面裂纹的应力强度因子为 $K_I = 53 \sim 56 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ 。由于 $K_I > K_{Ic}$ ，故在试压时发生低应力脆断。

容器制成后，在水压试验前也曾作过无损探伤。检验的灵敏度可以达到检测出深为 0.2mm、长为 2mm 以上的表面裂纹。这样小的裂纹尺寸在水压试验压力下本来是不会破裂的。然而由于水压试验所用的介质为含有 0.2% 重铬酸钾的水溶液，上述容器材料在这种介

质中的抗应力腐蚀性能较差，因而在水压试验中由于应力腐蚀而使裂纹迅速增大到足以脆裂的尺寸。

改进的措施是适当调整合金元素成份，并改变热处理工艺，使材料的 K_{Ic} 由原来的 $52\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ 提高到 $75\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ，抗应力腐蚀的性能也同时有所提高。但是其 σ_c 则由 1960MPa 降至 1400MPa 。经过这样调整后，虽然因材料的强度有所降低，因而使强度储备由原来的 2.2 降至 1.57 。但是由于材料的断裂韧性 K_{Ic} 和抗应力腐蚀性能大幅度地提高。从而使裂纹容限大大提高。这样一来，材料的强度才得以充分发挥，容器也就变得更加安全了。所有试验容器都通过了水压试验考核，实际爆破应力也提高到了 $\sigma_c=1700\text{MPa}$ 。

由以上两个例子可以看出，在材料的强度通过某些措施获得提高的同时，其断裂韧性一般会有所降低；反之，当韧性得到提高时，其强度一般也会有所降低。此外，若为了提高强度储备而增加构件的厚度，也会导致构件抗脆断能力的降低。因此如果为了提高构件的安全性而片面地追求强度储备，其结果反而会因此降低构件的抗脆断能力，从而变得更加不安全。反之，若适当降低强度储备而使材料韧性获得某些提高，则可以使结构变得更加安全。这就是断裂力学在设计 and 选材上的新观点。诚然，这一结论也不是绝对的。比如对于那些因超载而引起塑性破坏的构件来说，主要的措施还是提高其强度储备。

例 3. 某容器的材料机械性能为 $\sigma_c=2100\text{MPa}$ ， $K_{Ic}=37\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ 。容器制成后，发现器壁上有长为 $2a=3.8\text{mm}$ 的纵向裂纹（看作穿透裂纹），试估计此容器的剩余强度。

由式 (1-6) 和 (1-8) 可算得此容器的临界环向应力为

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}} = \frac{37}{\sqrt{\pi \times 1.9 \times 10^{-3}}} = 479\text{MPa},$$

故其剩余强度（即容器的临界压力）为

$$p_c = \frac{\sigma_c t}{R} = 479 \frac{t}{R} \text{MPa}.$$

式中的 R 为容器半径， t 为壁厚。

此外，容器的设计压力可根据第四强度理论来进行计算，即

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = [\sigma],$$

此处的主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 分别对应于容器的环向应力、轴向应力和径向应力。由筒体的膜应力理论得知， $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2}$ ， $\sigma_3 = 0$ 。将此关系式代入上述第四强度理论表示式，即可得

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}[\sigma] = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_c}{n_s}.$$

若取安全系数 $n_s=1.5$ ，则就可由上式算得环向应力为

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2100}{1.5} = 1620\text{MPa}.$$

于是其设计压力即为

$$p_R = \frac{\sigma_1 t}{R} = 1620 \frac{t}{R} \text{MPa}.$$

由此可见，容器的剩余强度 (p_c) 约只有原设计强度 (p_R) 的 30%。

有关断裂力学的工程应用方面的更详细内容，将在下面作专门讨论。

第二章 二维弹性问题的复变函数解法^①

在线弹性断裂力学中,要对裂纹端部区域的应力、应变场进行分析,并进而计算裂纹端部的应力强度因子。这就要应用弹性力学的理论和方法。在平面弹性力学问题中,基本方程是双调和方程,因此,利用复变函数来处理这类问题是很方便的。本章着重介绍用复变函数来求解二维裂纹问题。

一、用复变函数表示平面问题的应力函数

由弹性力学知,在体力为常量的情况下,解平面弹性问题可归结为求解满足双调和方程

$$\nabla^4 U(x, y) = 0 \quad (2-1)$$

并满足边界条件的应力函数 $U(x, y)$ 。而应力分量为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

下面我们利用复变函数来讨论双调和方程的求解问题,也就是用复变函数来表示平面问题的应力函数。

1. Muskhelishvili 应力函数^[1]

取函数

$$P = \nabla^2 U, \quad (2-3)$$

其中 $U = U(x, y)$ 为应力函数。因为函数 $U(x, y)$ 是双调和函数, 故函数 P 应为调和函数, 即应当满足 $\nabla^2 P = 0$ 。再设函数 Q 为函数 P 的共轭调和函数, 于是由 P 与 Q 组成的复变函数

$$f(z) = P + iQ$$

是一个解析函数。而函数 $f(z)$ 对于 z 的积分则是另一解析函数, 设为 $4\varphi(z)$, 即

$$\int f(z) dz = 4\varphi(z).$$

^① 不谙复变函数的读者在学习本章内容前可先阅读附录 I。如对弹性力学不很熟悉的话, 可先阅读附录 II。

再设 p 和 q 为函数 $\varphi(z)$ 的实部和虚部, 于是有

$$\varphi(z) = p + iq = \frac{1}{4} \int f(z) dz.$$

或

$$\varphi'(z) = \frac{1}{4} f(z) = \frac{1}{4} (P + iQ).$$

但因

$$\varphi'(z) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(z) = \frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x},$$

故比较上面两式, 即可得到

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{4} P. \quad (2-4)$$

因为 p 和 q 是共轭函数, 必须满足 Cauchy-Riemann 条件 (简称 C-R 条件)①:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad (1-2)$$

因此得

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4} P. \quad (2-5)$$

又因为 p 和 q 都是调和函数, 即满足 $\nabla^2 p = 0$, $\nabla^2 q = 0$. 于是有

$$\nabla^2(xp) = x \nabla^2 p + 2 \frac{\partial p}{\partial x} = 2 \frac{\partial p}{\partial x}.$$

同理有

$$\nabla^2(yq) = 2 \frac{\partial q}{\partial y}.$$

上两式相加, 并与式(2-4)和(2-5)进行比较, 即可得

$$\nabla^2(xp + yq) = 2 \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial q}{\partial y} = P,$$

将式(2-3)代入上式并移项, 即可得

$$\nabla^2(U - xp - yq) = 0.$$

可见, 函数 $(U - xp - yq)$ 是调和函数。若用 u 表示此调和函数, 则有

$$U - xp - yq = u,$$

由此可得

$$U = xp + yq + u. \quad (2-6)$$

可见, 任何应力函数都可以由适当选取的共轭调和函数 p 和 q 及另一个调和函数 u 构成。

可以证明, 调和函数还可以取别的形式, 如取

$$U = \pm 2xp + u,$$

或

$$U = \pm 2yq + u,$$

以及

$$U = xq + u,$$

①参见附录 I。