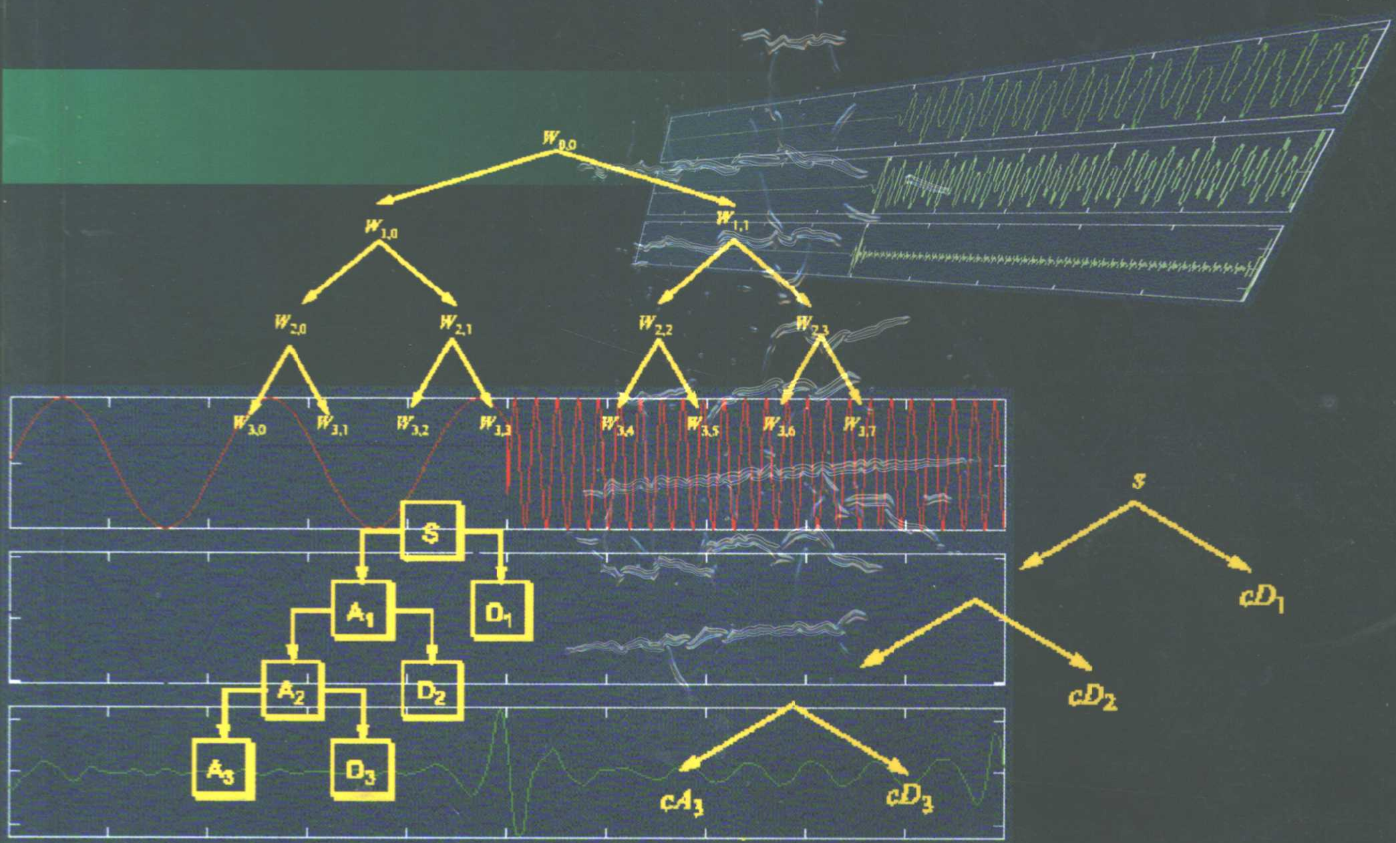
小波变换及其 MATLAB 工具的应用

郑治真　沈　萍　杨选辉　万玉莉　编著



地 震 出 版 社

小波变换及其MATLAB工具的应用

郑治真　沈萍　杨选辉　万玉莉　编著

地震出版社

图书在版编目（CIP）数据

小波变换及其 MATLAB 工具的应用/郑治真等编著.北京：地震出版社，2001.10
ISBN 7-5028-1921-5

Ⅰ.小… Ⅱ.郑… Ⅲ.①小波分析②计算机辅助计算—软件包，MATLAB—应用—小波分析 Ⅳ.0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 048020 号

内 容 简 介

这是一本关于小波变换的基础读物，它以较短的篇幅介绍了小波变换的主要内容：连续小波变换、离散小波变换、二进正交小波变换、多分辨率分析、小波包变换等。本书有如下特点：首先，书中介绍了适量的预备知识；其次，结合信号处理理论清楚地阐述了小波变换的物理意义；其三，对小波变换中的重要公式给出详细推导；最后，在书中的第二部分介绍了 MATLAB 工具在小波变换中的应用，使读者很容易从小波理论学习转入小波变换的实际资料处理。

本书的读者对象为非数学专业的本科生和研究生，也可供从事信号处理的科技人员参考。

小波变换及其 MATLAB 工具的应用
郑治真 沈萍 杨选辉 万玉莉 编著
责任编辑：蒋乃芳
责任校对：王花芝

出版发行：地震出版社
北京民族学院南路 9 号 邮编：100081
发行部：68423031 68467993 传真：68423031
门市部：68467991 传真：68467972
总编室：68462709 68423029 传真：68467972
E-mail：seis@ht.rol.cn.net
经销：全国各地新华书店
印刷：北京地大彩印厂

版（印）次：2001 年 10 月第一版 2001 年 10 月第一次印刷
开本：787×1092 1/16
字数：263 千字
印张：10.25
印数：0001～1000
书号：ISBN 7-5028-1921-5/O・36 (2471)
定价：30.00 元

前　言

近十年来，小波变换的数学理论和方法在科学技术界引起了一场轩然大波。在数学家看来，小波变换是一个新的数学分支，它是泛函分析、傅里叶变换、样条分析、调和分析、数值分析的完美结晶；在应用领域，特别是信号处理、图像处理、语言分析、模式识别、非线性科学、地震勘探、CT 成像等领域，它被认为是近年来在工具和方法上的重大突破。

当前关于小波分析的文献如潮水一般，中文的小波专著已超过十部之多。但是，由于小波分析涉及了很多数学分支，大多数小波专著的抽象数学语言和内容，使得非数学专业的科学技术人员难于适应。为了推进小波变换在地球物理领域中的应用，笔者撰写了这本小波变换的实用性小册子。这本小册子具有下述特点：①在第二章的预备知识中，对小波变换所需要的傅里叶变换和滤波器的知识予以适宜介绍；②对小波变换中的重要内容从物理意义和信号处理角度予以直观解释；③对小波变换中的一些重要公式，给予简洁的数学推导；④紧密结合地球物理资料的处理（如重叠记录的分离、前兆信息的提取等）；⑤为了推进小波变换的迅速应用，书的最后一部分介绍了小波变换 MATLAB 工具的应用。

本书内容仅仅是小波变换的最基础部分，更广泛、更深入的小波变换知识需要参考全面性的小波论著。笔者深知本书的一些证明和推导在数学上是不严谨的，加上时间仓促，书中一定存在缺点和错误，衷心地期望专家和读者批评和指正。

本书是地震科学联合基金会资助项目，编写过程中参阅了大量中外文著作和论文，笔者一并表示衷心感谢。

编写过程中，中国地震局地震数据信息中心的领导和同事一直予以热情的支持，笔者表示诚挚的谢意。

郑治真

2001 年 1 月

目　　录

第一部分　小　波　变　换

第二部分　小波变换 MATLAB 工具的应用

第一部分　小 波 变 换

小波理论是近十几年发展起来的新的信号处理技术，因其在时间域和频率域都可达到高的分辨率，被称为“数学显微镜”，在数值信号处理领域应用广泛，发展非常快。但其涉及较多的数学知识，以及巧妙的数字计算技巧，对于非数学专业的科研人员，要完全掌握其中的精妙之处，有一定的难度。正是考虑到这一点，本书的第一部分并不过多要求读者理解小波分析的数学理论，只是以尽量短的篇幅简要介绍必要的预备知识，并结合小波变换在地震学中的应用例子，着重阐明小波变换的物理意义，使读者能够尽快掌握小波变换的物理本质，应用到自己的实际工作中。

第一章　什么是小波变换

这一章用尽量短的篇幅和通俗的语言为那些只需要知道什么是小波变换的读者介绍小波变换的最基本概念。

§1.1　从傅里叶变换到小波变换

一、傅里叶变换

在信号处理中重要方法之一是傅里叶变换（Fourier Transform），它架起了时间域和频率域之间的桥梁。图 1.1 给出了傅里叶变换的示意图。

图 1.1　傅里叶变换示

对很多信号来说，傅里叶分析非常有用。因为它能给出信号中包含的各种频率成分。但是，傅里叶变换有着严重的缺点：变换之后使信号失去了时间信息，它不能告诉人们在某段时间里发生了什么变化。而很多信号都包含有人们感兴趣的非稳态（或者瞬变）特性，如漂移、趋势项、突然变化以及信号的开始或结束。这些特性是信号的最重要部分。因此傅里叶变换不适于分析处理这类信号。

二、短时傅里叶变换

为了克服傅里叶变换的缺点，D. Gabor (1946) 提出了短时傅里叶变换（Short Time Fourier Transform），又称为盖博(Gabor)变换或者加窗傅里叶变换（Windowed Fourier Transform）。图

1.2 给出了短时傅里叶变换的示意图。

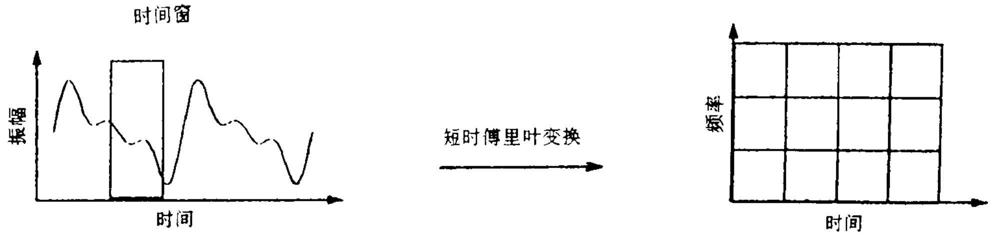


图 1.2 短时傅里叶变换示意

盖博变换把一个时间信号变换为时间和频率的二维函数，它能够提供信号在某个时间段和某个频率范围的一定信息。这些信息的精度依赖于时间窗的大小。盖博变换的缺点是对所有的频率成分，所取的时间窗的大小都相同。然而，对很多信号为了获得更精确时间或频率信息，需要可变的时间窗。

三、小波变换

小波变换提出了变化的时间窗。当需要精确的低频信息时，采用长的时间窗，当需要精确的高频信息时，采用短的时间窗。图 1.3 给出了时间域信号、傅里叶变换、短时傅里叶变换和小波变换对比的示意图。

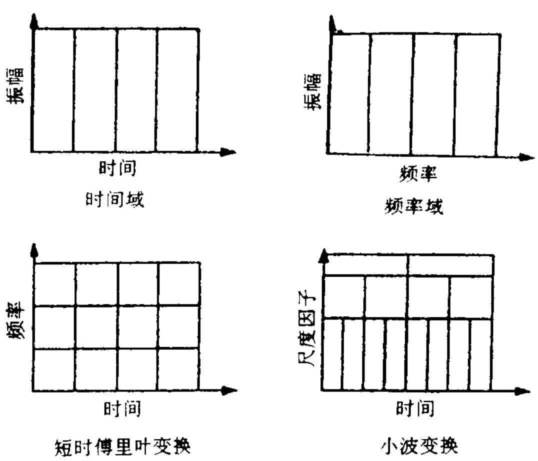


图 1.3 小波变换示意

由图 1.3 看出，小波变换用的不是时间—频率域，而是时间—尺度域。尺度越大，采用越大的时间窗，尺度越小，采用越短的时间窗，即尺度与频率成反比。

§1.2 连续小波变换

什么是小波？小波是一个衰减的波形，它在有限的区域里存在（不为零），且其均值为零。图 1.4 是一个 Daubechies 小波（db10）与正弦波的比较。

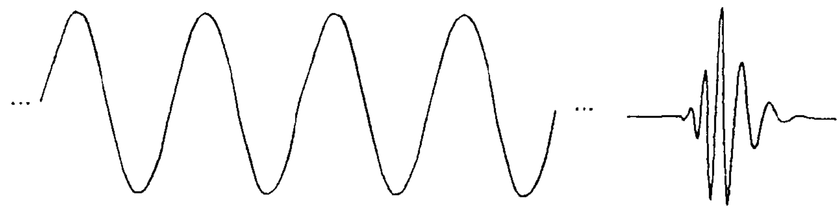


图 1.4　傅里叶变换与小波变换基元

正弦波是振幅不变、随时间无限振动的光滑波形，它是傅里叶变换的基础。由图看出，小波是尖锐变化而且是无规则的波形，这是小波变换的基础。因此用小波能更好地刻画信号的局部特性。

在数学上，傅里叶变换的公式为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

积分是从 $-\infty$ 到 $+\infty$。图 1.5 给出了傅里叶变换的示意图。由图看出，原始信号是由不同的频率成分构成的。

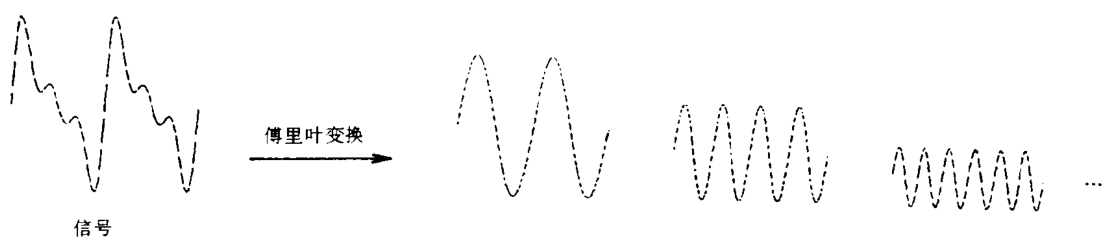


图 1.5　信号傅里叶变换过程

连续小波变换（Continue Wavelet Transform）的数学表示式为

$$\mathrm{CWT}_{a,b}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$\psi_{a,b}(t)=|a|^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

式中，$\psi(t)$ 为小波；a 为尺度因子；b 为平移参数。图 1.6 是小波变换的示意图。由图看出，小波变换给出了在各个时刻信号是由哪些尺度的小波构成的。

小波中的尺度因子的作用是将小波在保持完全相似条件下“拉伸”或者“压缩”。图 1.7 给出了尺度因子的“拉伸”和“压缩”作用。

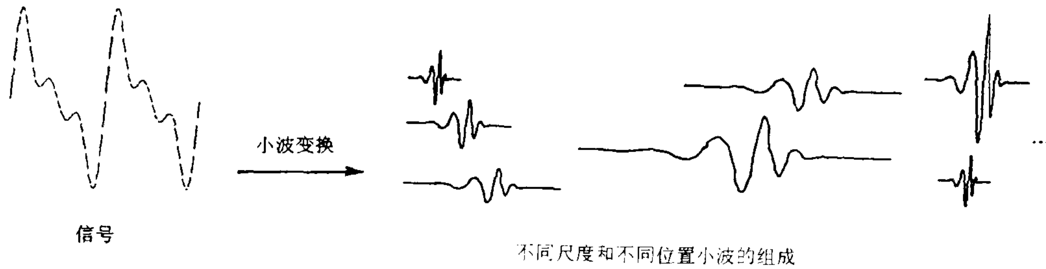


图 1.6　信号小波变换示意

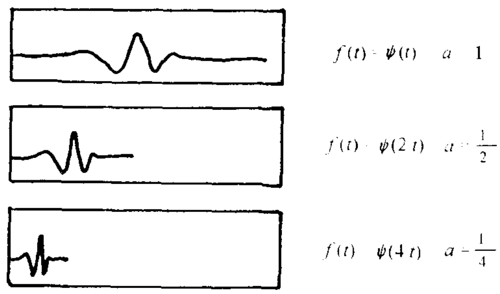


图 1.7　不同尺度下小波形状

小波中的位移参数，是简单地将波形沿时间轴平移。

连续小波变换 $\mathrm{CWT}_{a,b}$ 是参数 a 和 b 的函数。下面的五个步骤是获得 $\mathrm{CWT}_{a,b}$ 的最简单方法：

第一步，选择尺度 a 一定的小波，把它与原始信号的开始的一段进行比较。

第二步，计算 $\mathrm{CWT}_{a,b}$。它表示这段信号与尺度 a 小波的相关程度。$\mathrm{CWT}_{a,b}$ 越大，二者越相似。这个结果依赖于所选择的小波的形状（图 1.8）。

第三步，向右移动小波，然后重复第一和第二步，直到处理完全部信号（图 1.9）。

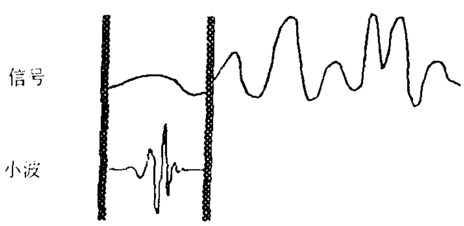


图　1.8

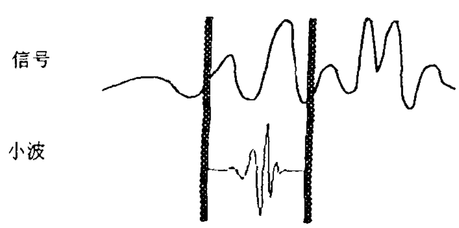


图　1.9

第四步，增大小波的尺度因子（拉伸），重复第一到第三步。

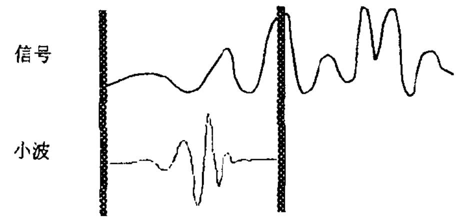


图 1.10

第五步，对全部尺度因子重复第一到第四步，得到的$CWT_{a,b}$通常用灰度图表示。图 1.11 是小波变换的灰度图例子。

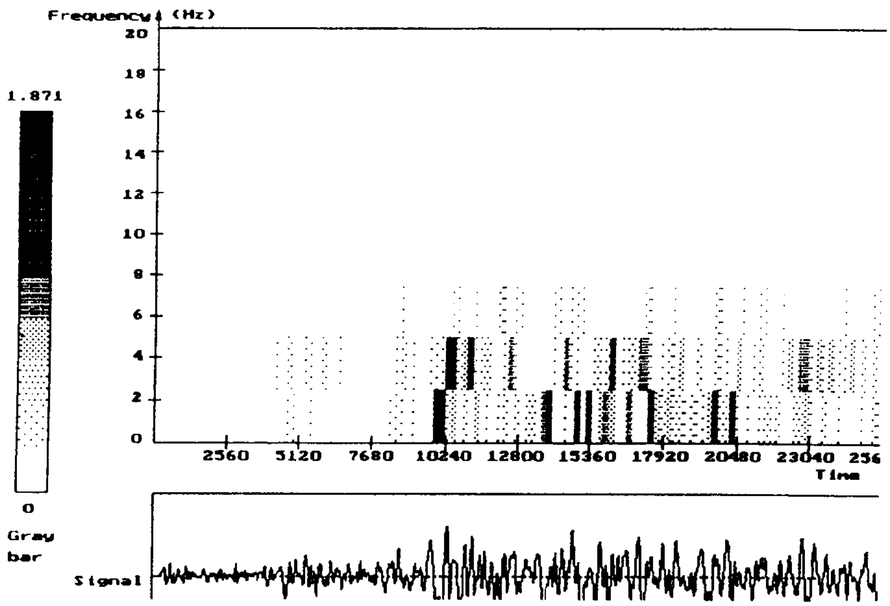


图 1.11　小波变换的灰度图

§1.3　离散小波变换

实际计算中不可能对全部尺度因子值和位移参数值计算$CWT_{a,b}$值，加之实际的观测信号都是离散的，所以信号处理中都是用离散小波变换（DWT）。大多数情况下是将尺度因子和位移参数按 2 的幂次进行离散。最有效的计算方法是 S. Mallat 于 1988 年发展的快小波算法（又称塔式算法）。

对任一信号，离散小波变换第一步运算是将信号分为低频部分（称为近似部分）和离散部分（称为细节部分）。近似部分代表了信号的主要特征。第二步对低频部分再进行相似运算。不过这时尺度因子已改变。依次进行到所需要的尺度。图 1.12 给出了一个信号经过第一次运

算后获得的近似部分和细节部分。

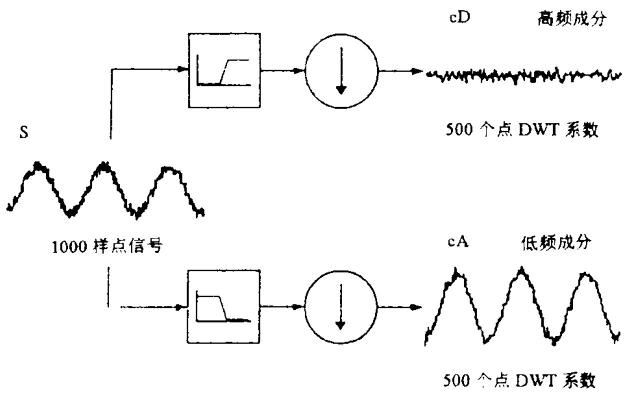


图 1.12

除了连续小波(CWT)、离散小波（DWT），还有小波包（Wavelet Packet）和多维小波。

第二章　预 备 知 识

本章包括三部分内容：傅里叶变换、短时傅里叶变换和滤波器。

§2.1　傅里叶变换

傅里叶变换是研究信号的频谱方法，是沟通频率域和时间域的桥梁，是小波变换的基础。

一、傅里叶变换的定义

傅里叶变换是频谱分析的基础。早期的频谱分析是采用傅里叶级数方法，称为调和分析。但是随着计算机的发展，调和分析已被傅里叶变换所代替。

给定实自变量 t 的非周期函数 $f(t)$（可以是实函数，也可以是复函数）做积分

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

若积分式（2.1）对参数 ω 的任何实数值都存在，则称 $F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的傅里叶变换，或称傅里叶积分。函数 $F(\omega)$ 一般是复数，可以写成

$$F(\omega)=R(\omega)+\mathrm{i}X(\omega)=A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(\omega)} \tag{2.2}$$

$A(\omega)$ 称为函数 $f(t)$ 的傅里叶谱（振幅谱），$\Phi(\omega)$ 称为相位谱，$A^2(\omega)$ 称为能量谱。

$f(t)$ 可以用 $F(\omega)$ 的积分表示，称为傅里叶逆变换，

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{2.3}$$

式（2.1）和（2.3）是互相联系的积分方程，其中每一个方程式都是另一个方程式的解。

什么函数存在傅里叶变换？下面我们给出两个充分条件。

条件 1：若函数 $f(t)$ 绝对可积

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty \tag{2.4}$$

则它的傅里叶变换式（2.1）和它的逆变换式（2.3）存在。式（2.4）是充分条件，但不是必要条件。有不少函数不满足此条件，但其傅里叶变换存在。例如函数 $\frac{\sin at}{t}$ 不满足条件式(2.4)，但是它的傅里叶变换存在。

条件 2：若 $f(t)=g(t)\sin(\omega_0 t+\Phi_0)$，$\Phi_0$ 为任意常数，且假定当 $|t|$ >A>0（A 为正实数）时，函数 $\frac{f(t)}{t}$ 是绝对可积的，$g(t)$ 是单调递减的，则 $F(\omega)$ 存在，且满足式（2.3）。

为了书写方便，以后用 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$ 表示函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$。

下面讨论几种特殊情况：

（1）$f(t)$ 为实函数。其傅里叶变换为

$$\begin{aligned}R(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t \\ X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2.5}$$

由式（2.5）看出，$R(\omega)$ 是 ω 的偶函数，$X(\omega)$ 是 ω 的奇函数，所以有

$$F(-\omega) = R(-\omega) + \mathrm{i}X(-\omega) = R(\omega) - \mathrm{i}X(\omega) = F^*(\omega) \tag{2.6}$$

这表明，实函数 $f(t)$ 的傅里叶变换当其自变量取负值时，等于 $F(\omega)$ 的共轭值。很易证明式（2.6）是 $f(t)$ 为实函数的充分必要条件。

对于实函数，逆变换公式为

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[R(\omega)\cos(\omega t) - X(\omega)\sin(\omega t)]\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[R(\omega)\cos(\omega t) - X(\omega)\sin(\omega t)]\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}A(\omega)\cos[\omega t + \Phi(\omega)]\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_{0}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

（2）$f(t)$ 为虚函数。这时有

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$$

$R(\omega)$ 是 ω 的偶函数，$X(\omega)$ 是 ω 的奇函数，即

$$F(-\omega) = -F^*(\omega) \tag{2.7}$$

式（2.7）是 $f(t)$ 为虚函数的充分必要条件。

（3）因果函数。在实际物理问题中，时间函数 $f(t)$ 除了是实函数外，还要满足 $f(t)=0, t<0$。其物理意义为，若取物理现象发生的时刻 $t=0$，那么在该现象发生之前不可能有信息输出。因果函数 $f(t)$ 能够分别用 $R(\omega)$ 或 $X(\omega)$ 表示。对因果函数有 $f(-t)=0, t>0$。所以

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}R(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}X(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega\end{aligned} \qquad t>0 \tag{2.8}$$

当 $t=0$ 时有

$$f(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty R(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{f(0_+)}{2}$$

由式（2.8）看出，$R(\omega)$ 或 $X(\omega)$ 并不是相互独立的，因为把 $f(t)$ 的表示式代入式（2.5）中可得到下式

$$R(\omega)=-\frac{2}{\pi}\int_{-0}^\infty\int_0^\infty X(y)\sin yt\cos\omega t\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$X(\omega)=-\frac{2}{\pi}\int_{-0}^\infty\int_0^\infty R(y)\cos yt\sin\omega t\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

二、傅里叶变换的一些定理

傅里叶变换有一系列性质，这些性质对计算函数 $f(t)$ 的傅里叶变换在某些情况下很方便。

1. 线性

令 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶变换为 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$，a_1 和 a_2 为任意常数，则有

$$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\leftrightarrow a_1F_1(\omega)+a_2F_2(\omega)$$

这个性质可推广到任意有限和的情况，若推广到无穷多的情况需要特殊证明。

2. 对称性

若 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$，则有

$$F(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

证明：$F(\omega)$ 的逆变换为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

用 $-t$ 代替 t，则有

$$f(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

交换变量 t 与 ω，则有

$$f(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

因此

$$F(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

3. 时标定理

函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$，而 a 为非零的任意常数，则

$$f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

这个定理在进行波谱比较时常常用到。小波变换中采用 a 作为尺度因子。

4. 时移定理

设 $f(t)$ 沿 t 轴移动一个常数 t_0，则傅里叶谱不变，但相角增加了线性项 $-\omega t_0$，即

$$f(t-t_0)\leftrightarrow F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}=A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi(\omega)-\omega t_0]}$$

这个定理表明，在计算 $f(t)$ 的频谱时，零点的选择并不影响其振幅，仅使其相位谱增加