1917—1957

四十年来的苏联数学

一般代数学　域和多項式论
线性代数　李群论

В. М. 格魯什柯夫　А. Г. 庫罗什
Д. К. 法捷也夫　Е. Б. 邓肯

科 学 出 版 社

1917—1957

四十年来的苏联数学

一般代数学　域和多項式论
綫性代数　李羣论

В. М. 格魯什柯夫　А. Г. 庫罗什
Д. К. 法捷也夫　Е. Б. 邓　肯　著

段学复　林子炳　譯

科学出版社

1961

МАТЕМАТИКА В СССР ЗА СОРОК ЛЕТ 1917—1957

ОБЩАЯ АЛГЕБРА
ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ И МНОГОЧЛЕНОВ
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
ТЕОРИЯ ГРУПП ЛИ

Физматгиз
Москва 1959

內 容 簡 介

本书叙述苏联四十年来在一般代数学、域和多項式論、綫性代数、李羣論等方面的发展与成就，特别是对近十年来的重要研究成果作了扼要的介紹.

此书譯自“四十年来的苏联数学(1917—1957)”. 书末附有有关的大量文献.

1917—1957

四十年来的苏联数学

一般代数学 域和多項式論
綫性代数 李羣論

В. М. Глушков, А. Г. Курош
Д. К. Фаддеев, Е. Б. Дынкин 著

段学复 林子炳 譯

*

科 学 出 版 社 出 版 (北京朝阳門大街 117 号)
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1964 年 6 月第 一 版 书号：2952 字数：110,000
1964 年 6 月第一次印刷 开本：850×1168 1/32
(京) 0001—7,000 印张：4 1/4

定价：[科七] 0.75 元

目　　录

一般代数学

B. M. 格魯什柯夫　A. Г. 庫罗什

§1. 引　言

本文所說的“一般代数学”系指代数科学中一些分支的綜合，这些分支不包括在本汇編的其它三篇代数論文中，即不包括在“域和多項式論”，“綫性代数”和“李羣論”中．实际上，它是数学中已經很好地形成了的一个大的分支，它包括羣的一般理論、环和代数的理論、格論，半羣理論、代数系統的一般理論、拓扑代数以及有序代数系統的理論．属于它的还有目前为代数学家所发展着，并且以最紧密的方式与环論和格論相联系着的射影平面理論．

刊登在“三十年来的苏联数学”这一汇編內的一些綜述文章已經指出了，苏联数学家在一般代数学的一些分支中直到 1947 年为止所达到的高度水平，这首先属于羣的一般理論和拓扑代数．

对于羣論的研究，我們还在革命以前就以 О. Ю. Шмидт 的工作开始了．那时他的“抽象代数”一书（1916 年間世，1933 年再版）已写成．革命后，О. Ю. Шмидт 的研究仍継續着；最杰出的工作之一是他的关于羣的直积的工作．在 20 年代末，О. Ю. Шмидт 的一些学生开始研究有限羣論；这里我們只指出 А. А. Кулаков 关于有限 p-羣的子羣的工作．

在 30 年代和 40 年代上半期，苏联代数学家在（无限）羣的一般理論方面的研究得到了特别大的发展．在这方面的許多工作中，对于它的更进一步的发展有最大影响的是 А. Г. Курош 关于羣的自由积和直积的工作，С. Н. Черников 关于广义可解羣及冪零羣的工作以及 Л. Я. Куликов 关于准素阿培尔羣的工作．在 А. Г. Курош 的“羣論”一书（1944 年間世，1953 年再版；第一版

的德譯本及第二版的匈譯本和英譯本也已間世）中介紹了苏联羣論学家在所考虑的时期內所得到的許多結果．

在我們根据 A. H. Колмогоров 的首創而开始发展起来的拓扑代数中，完成了一系列的研究，其中，Л. С. Понтрягин 关于拓扑羣的工作，特别是他的拓扑阿培尔羣的特征标的理論占有特別重要的地位．还要提到 A. A. Марков 关于抽象羣的拓扑化的工作．在 Л. С. Понтрягин 的"連續羣"一书（1938 年，1954 年再版；第一版的英譯本也已問世）中，拓扑羣的理論第一次得到了系統的闡述．

到 1947 年为止，苏联数学家也在一般代数学的許多其它分支中进行了工作，不过比較起来不太系統．譬如，在环和代数的理論方面获得了一系列重要結果，这个理論我們是在 30 年代后半期开始发展起来的．A. И. Мальцев 关于結合代数和李代数的分裂的工作和 A. Г. Курош 关于代数的非結合自由分解的工作引起了最大的反应．然而整个說来，环論的研究范围在这个时期比起羣論的研究范围来要小得多，这种不成比例的状况已在"三十年来的苏联数学"这一汇編中指出过．

还在 20 年代，A. K. Сушкевич 就开始了关于半羣和拟羣理論的工作，这些工作在他的"广义羣論"一书（1937）中系統化了．在这一方面还有 A. И. Мальцев 关于半羣在羣中的嵌入的研究以及其他作者的一系列工作．然而总的說来，这些工作还是相当零星的．

最后，在 30 年代中期，苏联代数学家开始了格論的工作．这些研究多半带有羣論和环論的某些大定理的格論基础的分析特色．

本文綜述苏联数学家近十年（1947—1957 年）来在一般代数学方面所做的工作．在这些年代里完成了一系列新的重要的研究，在一般代数学的許多方面研究的題目大大地扩充了，并且引起了一些新的方向．整个說来，对于苏联的一般代数学来說，这是非常富有成果的十年．

应該特别指出，除了早已存在的一些集体以外，在我国的各个

城市里又产生了一系列新的代数学集体．在 А. Г. Курош 領导下的莫斯科一般代数学专家的大的集体継續发展着，他們感兴趣的范围几乎包括了这門科学的全部分支．在伊凡諾夫兴起了 А. И. Мальцев 的学生們所形成的代数学家的集体，他們的兴趣非常广．在斯維尔特洛夫斯克，在 С. Н. Черников 的領导下，而后也在 П. Г. Конторович 的領导下，形成了大的羣論学派，目前，这个学派除了在斯維尔特洛夫斯克以外，也在彼而明得到了发展．我們还要指出在羣論方面，主要是在有限羣論方面工作着的、托姆斯克的 С. А. Чунихин 的学生的集体以及 Е. С. Ляпин 的学生、列宁格勒半羣理論专家們的集体．在許多其它的科学中心里也进行了代数的研究．

在轉向綜述各个方向时，我們着重指出，最近十年来，羣的一般理論仍旧是苏联一般代数学的主要分支之一．关于广义可解羣及冪零羣理論的工作做得特别多．这里，首先应該提到 А. И. Мальцев 关于可解羣及局部冪零羣的工作，С. Н. Черников 关于完全冪零羣的工作以及 Б. И. Плоткин 关于根羣的工作．特别，А. Г. Курош 及 С. Н. Черников 的“可解羣及冪零羣”这一篇綜述文章(1947 年，英譯本已問世)促使羣論的这一分支蓬勃地发展起来．

在这些年代里，在羣論的其它分支中也作出了重要的貢献．譬如，由于 С. А. Чунихин 关于有限羣的 Sylow 性質的一系列研究，有限羣論重新又明显地活跃起来．另一方面，我們要指出 Д. А. Супруненко 关于置換羣及綫性羣的工作．

在环和代数的理論中，我們在这些年代里的发展非常蓬勃，并且已經得到了非常重要的結果，以致苏联代数学的这一分支的水平現在已完全可以和我們的羣論的水平并駕齐驅，这也就是說，上面所提到的不成比例的状況可以認为已經消灭．Л. А. Скорняков 关于交錯体的工作，А. И. Ширшов 关于李代数及約当代数理論的工作，А. Г. Курош 关于根的一般理論的工作，В. А. Андрунакиевич 关于結合环理論的一系列工作以及 А. И. Мальцев

关于有恆等关系的代数的工作等充分表明了这里所进行的研究的多样性和所得到的結果的意义.

在这几年中,基本上由于 E. C. Ляпин 及 B. B. Вагнер 的工作,半羣理論的研究也变得更系統了.

在所談的这十年中,苏联代数学家在格論中的工作不是很強烈的,虽然已經超出基本羣論定理的直接推广的范围.相反,拓扑代数完全保持着以前所达到的高度水平,向着更接近于羣的一般理論和环論这一方面发展.还是在十年以前开始的 H. Я. Виленкин 关于拓扑阿培尔羣的工作及 B. M. Глушков 关于拓扑非交换羣的工作很好地說明了这种趋向.

还在前一时期末,我們在有序代数系統的理論方面就已迈开了第一步,現在基本上由于 A. И. Мальцев 关于有序羣的工作而得到了明显的发展.另一方面,兴起了代数学中对于我們来說还是新的一个分支——代数系統的一般理論及模型理論;它暫时还几乎只限于 A. И. Мальцев 的一些工作.

最后,在射影平面理論方面,也已經获得了一系列重要成就;苏联代数学家在这个理論方面的工作也只是在前十年末才开始的.这里应該提到 Л. A. Скорняков 的研究.在这方面所得到的結果在 Л. A. Скорняков 的"射影平面"这一綜述文章(1951 年,英譯本已問世)中得到了系統化.

不言而喻,苏联一般代数学的发展,在这十年中和在前十年中,都是和外国代数学研究的发展相紧密联系的.苏联和外国代数学家的研究之間的錯綜和互相影响及联系是非常多的,因此,現在我們的一般代数学应該认为是世界代数科学的极其重要的組成部分.

§2. 抽象羣論

1. 阿培尔羣. 我国对无限阿培尔羣論的研究是在約二十五年前开始的.近十年来,Л. Я. Куликов 在这一方面获得了新的成就.在文章[3,6]中,他研究了所謂广义准素羣,即以 p-进整数

环 Z_p 或以既約分数記法中分母不被給定素数 p 整除的全体有理数的环 K_p 作为算子区域的阿培尔羣. 属于广义准素羣的有所有普通的准素羣以及广泛的一类无扭羣及混合羣.

正如 Л. Я. Куликов 所指出的,可以将每一个广义准素羣当作容許子羣嵌入完全广义准素羣. 有算子环 Z_p 的完全广义准素羣可以分解成若干个 p^∞ 型羣及一些同构于 p-进有理数加法羣的容許子羣的直和, 而有算子环 K_p 的完全广义准素羣可以分解成 p^∞ 型的一些子羣及一些同构于有理数加法羣的容許子羣的直和. 对于簡化的广义准素羣, 得到了具有給定的, 一般說来是超限的, Ulm 因子序列的羣存在的充分必要条件, 这些条件推广了著名的 Цыпин 条件. 类似于 Ulm 定理的定理对于任意的广义准素羣是不正确的. 然而, Л. Я. Куликов 对于比起可数准素阿培尔羣类来显然是更广的一类广义准素羣,証明了这样的定理,并給出了这个类的羣的完全分类. Л. Я. Куликов[3,6,7] 还指出,如果抛弃掉借以确定該羣类的条件中的任意一个条件,则所指出的定理将失效.

在他自己另外的文章[4, 5]中, Л. Я. Куликов 研究了完全可分解羣, 即可分解成局部循环羣(1 秩羣)的直和的羣. 完全可分解羣理論的基本問題之一是关于其任意直接加項的完全可分解性的問題. 这方面的头几个特殊結果是 Baer 在 1937 年得到的. Л. Я. Куликов[4,5]証明,完全可分解羣 G 的每一个直接加項 H 是完全可分解的, 如果羣 H 关于其周期部分的商羣頂多是可数的. 如果对于羣 G 本身其周期部分确定的商羣頂多是可数, 则羣 G 的任何两个直接分解有同构的延續.

在解 А. Г. Курош 所提出的問題时, А. П. Мишина[1]确立, 一些 1 秩无扭羣的完全直和当且仅当所有这些羣除了有限多个以外都是完全羣时,才是完全可分解的. 这个結果推广了 Baer 的类似結果, 后者只是对于完全直和的所有直接加項为互相同构的情形加以研究的.

在她自己的其它文章[3]中, А. П. Мишина 指出,当对 1 秩无扭阿培尔羣 R_α $(\alpha\in M)$及 R_β $(\beta\in N)$的类型作某些限制时,从完

全直和$\tilde{\sum\limits_{\alpha\in M}} R_\alpha$及$\tilde{\sum\limits_{\beta\in N}} R_\beta$的同构可以导出所有$R_\alpha$的完全直和同所有有同一个固定类型的$R_\beta$的完全直和的同构. 关于这个命题是否正确的問題也是由 А. Г. Курош 提出来的. 最后，在文章[2]中，А. П. Мишина 給出了可以分出混合阿培尔羣G的周期部分F作为直接加項的判定标准. 这个判定标准的最重要的部分在于使羣F及G/F的某对固定的自同构由羣G的自同构产生.

2. 直积. 直积理論中的中心問題是关于羣的任意两个直接分解的同构延續的存在条件問題. 头几个这种条件中的一个(主羣列的有限性)为 О. Ю. Шмидт 所求得. А. Г. Курош[24]証明，羣的任意两个有限直接分解的中心同构延續可能的充分条件是羣在它自己的中心里的任何同态象都是周期的，并且这个同态象的所有准素分量中的递減子羣鏈是中断的. А. Х. Лившиц[2]将这个結果推广到所考虑的直接分解中的因子个数为无穷的情形.

Л. Я. Куликов[4,5] 导出了使羣的两个固定的直接分解(或者一个是固定的,而另一个是任意的直接分解)有中心同构延續的一些条件. 其中一个条件推广了 А. Г. Курош 及 О. Н. Головин 在以前所确立的判定标准. 在 Л. Я. Куликов 的这一篇文章中求得了一些条件,当这些条件被满足时,由某羣集中每一个羣的任何一对直接分解的中心同构可延續性，可以导出所有这些羣的直积的任何一对直接分解的中心同构可延續. 特別，对于两个羣中有一个是周期羣而另一个是无扭羣的情形,这也成立.

3. 羣的扩张,同调羣. 羣扩张理論在我国的发展只是在1947年才开始的，当时 Д. К. Фаддеев[19] 及和他同时的美国数学家 Eilenberg 和 Maclane 开始着手研究羣的同調理論. 在他最近的一系列工作中，Д. К. Фаддеев 确立了羣及其某些子羣的同調之間的一些联系. 設A是阿培尔羣,G是它的算子羣,K是羣G的子羣. 在把陪集空間G/K映入羣A的所有函数$f(\rho)$的加法羣L上,按以下法則引入G中的算子x: $f^x(\rho) = [f(\rho x^{-1})]^x$. 則正如 Д. К. Фаддеев[23] 所指出的，K在A上的n次同調羣和G在L上的

n 次同調羣互相同构.如果K在G中有有限指数h，而羣A具有被h无限的及一意整除的性質，則存在G在A上的n次同調羣到K在A上的n次同調羣的直接加項上的自然同构(Д. К.Фаддеев[24])。最后，在文章[27]中，Д. К. Фаддеев 确立，有限羣G在阿培尔羣A上的n次同調羣同构于羣G的 Sylow p-子羣(在A上)的n次同調羣的某些直接加項的直和.

在文章[1, 3]中，З. И. Боревич 証明了一些定理，这些定理可以将n維同調羣的計算化为維数較低的同調羣的計算. 特别，如果 $G = F/R$ 是自由羣F的商羣，而且如果K是羣R的换位子羣，則可以用自然方式把G中元素定义为羣 $R_0 = R/K$ 的算子. 于是当羣G为有限时，它在 R_0 上的n維同調羣 H_n 当 $n \geqslant 3$ 时同构于羣G在无限循环羣上的$(n-2)$維同調羣，其中循环羣以G中元素为恆等算子；H_2 是循环羣，其阶等于羣G的阶，而 H_1 是零羣.

如所周知，同調羣可以用某一个給定羣G的所謂基本复形来定义，也就是用和确定的同态組一起考虑的自由 G-模 $\phi_i(i = 0, 1, \cdots)$的某个序列来定义. З. И. Боревич[4]指出，当羣G为有限时，对于負的值i，怎样确定基本复形的模ϕ_i，并从而确定有負号碼的同調（上同調及下同調）羣. 这时对于任意的n及k, $H_n(G, A) \cong H^{-n-1}(G, A)$. 还証明了两个化归定理，这两个定理对于任何$n$及$k$可以将求$(n+k)$維同調羣化为求$n$維同調羣. 当$n \geqslant 1$和$k \geqslant 0$时，这些定理对于无限羣也成立. 由这些定理容易推出 S. Eilenberg 及 S. Maclane 的著名的化归定理.

用羣B来扩张羣A的研究，通常只精确到等价性而并不精确到同构. Ю. А. Гельфонд[1]指出了，当不存在羣A到羣B的任一个正規子羣上的非平凡同态时，分出所有非等价的、但是互相同构的扩张的方法.

在推广两个羣的扩张的結构时，Л. А. Калужнин 及 M. Krasner (見 Л. А. Калужнин[24]引入了任意有限多个抽象羣的扩张 $\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s\} = \Gamma$ 的概念，其时将这个扩张理解为羣G，它有給定的正規鏈 $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_s$ 并对每一个 $i = 1, \cdots, s$ 有

将羣 G_{i-1} 映成羣 Γ_i 而核为 G_i 的給定同态 φ_i. 这时与羣 G 的子羣 G_s 共軛的所有子羣的交应該只由单位組成. 設 H 是羣 G 有下述性質的子羣：它使得对于每一个 $i=1,\cdots,s$,同态 φ_i 誘导出将羣 $H_i=H\cap G_i$ 映成羣 Γ_i 的同态. 此时 (H, H_i, φ_i) 是某个 Γ-扩张. 它叫做 Γ-扩张 (G, G_i, φ_i) 的子扩张. 两个 Γ-扩张 (G, G_i, φ_i) 及 (Q, Q_i, ψ_i) 当且仅当存在羣 G 到羣 Q 上的将 G_i 变成 Q_i 并使 $\varphi_i=\psi_i\theta$ 的同构 θ 时，才認为是同构的. 証明了存在一个 Γ-扩张(叫做泛的),它含有同构于任何 Γ-扩张的子扩张.

在文章[25]中，Л. А. Калужнин 研究了中心 Γ-子扩张 (G, G_i, φ_i) 在阿培尔羣 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s$ 的泛扩张中的分布問題,这里所謂中心 Γ-子扩张就是使正規羣列 $G\supset G_1\supset\cdots\supset G_5=\{e\}$ 是中心正規羣列的 Γ-子扩张. 导出了使这个中心羣列是羣 G 中的上或下中心羣列的充分必要条件.

4. 自由积及冪零积. 在苏联对抽象羣的自由积的研究是在 30 年代上半期开始的，那时 А. Г. Курош 証明了关于自由积的子羣的定理，这个定理給出了这些子羣的完全描述. И. А. Грушко 証明了关于具有有限多个生成元的羣的自由分解的重要定理.

自由积及直积是羣集上两种最重要的运算. 这两种运算都是結合的. А. Г. Курош 提出了关于羣集上按性質来說与直积及自由积相类似的其它結合运算的存在問題. 在解这个問題时, О. Н. Головин[5] 求得了可数多个具有所要求的性質的运算,这些运算他称之为冪零积. О. Н. Головин 将羣 G_α 的 K 次冪零积定义成其自由积关于相对下中心羣列的第 k 項的商羣，这里下中心羣列的开始項(零項)是一个正規子羣，而这个正規子羣由取自不同的自由因子 G_α 及 G_β $(\alpha\neq\beta)$ 的所有可能的元素对的换位子所生成. В. М. Грушко[14] 指出了定义冪零积的另外一个的方法.

显然,零冪零积是普通的直积. О. Н. Головин 描述了羣的头几个冪零积，但是假定这些羣关于自己的换位子羣的商羣是循环羣的直积.

在他自己另外的文章[7]里，О. Н. Головин 証明，当有限羣分解成准素循环羣的羃零积时，它的分解成不可分解因子的羃零积的所有分解同构于該分解. О. Н. Головин[7] 还确立了羃零积退化成直积的一些判定标准. 特别，对于不同 p 的 p-羣的羃零积,有这种退化发生. 正如 В. Н. Ляховицкий[1] 所指出的，在某些条件下，两个羣的第一个非退化羃零积也可以有非显然的直接分解.

А. И. Мальцев[26]指出了羣和代数的自由积之間的联系,并导出了具有长 $\leqslant \omega$ 的递減中心羣列的羣的自由积有递減中心羣列的充分必要条件.

М. А. Фридман[2,3,4]指出了构造羣集上一类新运算的方法,这种运算他称之为半交換乘法. 在某些补充条件下，这些运算是結合的.

Е. С. Ляпин[13]也求得了羣集上不同于自由羃零积、但有与它类似性质的結合运算的例子.

5. 自由羣和自由羃零羣. 如所周知，自由羣有下中心羣列，并且这个羣列的因子是无扭羣. А. И. Скопин[1]研究了自由羣的另外的,在某种意义下是极小的递減中心羣列,而这个羣列的所有因子是关于同一个素数 p 的初等阿培尔 p-羣,并且也求得了表示每一个因子的生成元个数的式子.

С. Т. Завало[1,3]研究了算子自由羣:有具单位的算子(自同态)半羣 Σ 的算子羣 G 叫做 Σ-自由的,如果在 G 中存在子集 M 使所有元素 $x\alpha$ ($x \in M$, $\alpha \in \Sigma$)的集合在抽象(沒有算子的)意义下是羣 G 的自由生成元組. 和抽象羣的情形相似,每一个 Σ-算子羣同构于 Σ-自由羣的某个商羣，并且可以用一組生成元及定义关系給出. Σ-自由羣的容許子羣的构成极为复杂：只是对于 Σ 是羣的情形，得到了它的結构的詳尽描述.

(抽象)自由羣关于其下中心羣列的第 k 項的商羣叫做第 k 类自由羃零羣. А. И. Мальцев[31] 以导出自由代数理論的一般观点研究了自由羃零羣.

設G是第k类自由冪零羣，$G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_{k+1} = \{e\}$是它的下中心羣列．正如 А. И. Мальцев[42] 所指出的，羣G的元素 $g_1, \cdots, g_n (n > 1)$ 生成第k类自由冪零子羣且它們是这个自由冪零子羣的自由生成元，当且仅当这些元素在商羣 G/G_2 中的自然象綫性无关．Н. П. Гольдина[2] 将这个結果推广到以下情形：所考虑的元素含在羣G的下中心羣列的某一項 G_m 中，而它們在商羣 G_m/G_{m+1} 中的自然象綫性无关．在这种情形，由元素 $g_1, \cdots, g_n$ 所生成的子羣的冪零类等于数 $\frac{k+m-1}{m}$ 的整数部分．在 Н. П. Гольдина 的同一篇文章中描述了羣G的子羣，特別，当 $i > \frac{k-1}{2}$ 时，子羣 G_i 是自由阿培尔羣．同时，羣G含有不是自由冪零羣的子羣；特別，当 $1 < i \leqslant \frac{k-1}{2}$ 时，所有子羣 G_i 将都是这样的．

在 О. Н. Головин[8] 及 Н. П. Гольдина[1] 的更早的合写文章中給出了具有有限多个生成元的自由亚阿培尔羣的子羣的完全描述．

和自由羣理論联系在一起的有著名的称为加限的 Burnside 問題，亦即关于由k个生成元及一个恆等定义关系 $x^n = 1$ 給出的每一个羣 $G_{n,k}$ 的有限性的問題．对于 $n = 2$，$n = 3$ 及 $n = 4$ 的情形，这个問題得到了肯定的解决．此外，在 1940 年，И. Н. Санов 証明了具有有限多个生成元、元素的阶不超过 4 的每一个羣的有限性．加限的 Burnside 問題的更进一步的研究要求深入地研究羣 $G_{p^n,k}$（其中 p 是素数）的元素及其換位子之間的关系．И. Н. Санов 求得了一系列这种关系．

由于解加限的 Burnside 問題相当困难，因而引起了对問題的較弱的提法：証明羣 $G_{p^n,k}$ 关于其下中心羣列中有自然数編号的所有項的交的商羣 $G'_{p^n,k}$ 是有限的．А. И. Кострикин[1] 对于 $p^n = 5$，$k=2$ 的情形，解决了減弱了的 Burnside 問題：他証明了羣 $G'_{5,2}$ 的阶不超过 5^{34}．这里他根据了減弱了的 Burnside 問題和李环理論的某些問題之間的联系．И. Н. Санов[7] 及 А. И. Кострикин[4] 的文章研究了这种联系. 在最近的文章中,特别証明了当 $p \geqslant 5$ 时,下中心羣列的长不小于 $2p$.

6. 羣論的判定問題. 对于由有限生成元組及有限定义关系組給出的羣的类 K,有三个判定問題在很长时期內未获得解决:可以确定类 K 的任何羣中任意两个字的相等或不相等的算法的存在問題(等价問題),关于字的共軛性的类似問題(共軛性問題)以及識別类 K 中的羣互相同构或不同构的算法的存在問題(同构問題).

等价問題及共軛性問題,对于自由羣,以及,如 Magnus 所指出的,对于有一个定义关系的羣,得到了肯定的解决. B. A. Тартаковский[24] 利用他在文章[23]中所研究的方法,对于更广的一类羣,肯定地解决了等价問題. B. A. Тартаковский 的算法之一为 П. В. Стендер[1] 推广到有可数个生成元及定义关系的某些羣上.

A. И. Мальцев[42] 对于 n-級冪零羣类肯定地解决了等价問題(n 是任何固定的自然数).

最后, П. С. Новиков[27,29,30] 指出,在一般情形,等价問題和共軛性問題的解答是否定的. 实际上 П. С. Новиков 还証明了更多的事实:存在着具有有限多个生成元及定义关系的羣,对之不能构造可以識別相等的或共軛的字的算法. 根据 П. С. Новиков 的結果, С. И. Адян[1]确立了由有限多个生成元及定义关系給出的羣的一系列性质的識別問題的不可判定性. 在这些性质中,特别的,有羣的单性及可解性,以及与前面所确定的类 K 中任意固定羣的同构性. 因此,对于类 K 的羣,否定地解决了同构問題.

7. 有限羣. 如所周知, О. Ю. Шмидт 的最早工作是关于有限羣的. 在 20 年代,有限羣处于苏联代数学家注意的中心. 在30 年代中期及 40 年代初期,羣的一般理論的蓬勃发展大大地削弱了对于有限羣論的兴趣. 但是近十年来,研究有限羣的文章的数量重新又突出地增长起来. 研究所謂有限羣的 П-性质的文章尤其多. 特别, С. А. Чунихин 的研究是沿此方向发展的.

C. A. Чунихин 引入了以下定义：設 Π 是任意素数集；有限羣 G 的阶 g 的因子 h 叫做 Π-Sylow 的，如果数 h 及 g/h 互素，而数 h 的所有素因子都含在 Π 內．羣 G 叫做 Π-可解的，如果它的組成列的每一个指数或者不被集 Π 中任何数整除，或者等于 Π 中某一个数．如果羣的組成列的每一个指数或者不被集 Π 中任何数整除，或者只被 Π 中一个数整除，則羣称为是 Π-可离的．最后，羣 G 叫做 Π-Sylow 正規的，如果对于它的阶的任意一个 Π-Sylow 因子 h，至少有一个 h 阶的子羣与之对应，而所有 h 阶子羣在 G 中都是共軛的．

F. Hall 在 1928 年証明了有限可解羣关于任何素数集 Π 的 Π-Sylow 正規性．在一系列文章 [26,27,28,29] 中，C. A. Чунихин 大大地加強了这个結果，他指出，要使羣是 Π-Sylow 正規的，只要它至少有一个正規羣列，其所有因子都是 Π-Sylow 正規的就足够了．特別，所有 Π-可离羣，从而，所有 Π-可解羣，都是 Π-Sylow 正規的．在最近的文章[30, 33 34, 35,]中，C. A. Чунихин 又更加強了这个結果，他研究了比正規羣列的形状更为一般的羣列，并且还用含在这些更一般的羣列的相邻項之間的子羣的格的某些 Π-性質来代替正規羣列的因子的 Π-Sylow 正規性的性質．

仍設 G 是有限羣，Π 是某个素数集．如果 m 是羣 G 的阶的 Π-Sylow 因子，而 m_1 是数 m 的任意因子，則寻求这样一些条件是很有意思的，这些条件是这样的，当这些条件被滿足时，羣 G 的每一个 m_1 阶的子羣都含在 m 阶的子羣中．正如 F. Hall 所指出的，这些(充分)条件之一是羣 G 的可解性．C. A. Чунихин[36] 利用将羣 G 的可解性条件代之以羣 G 的 Π-可离性条件及下面二个条件之一而加強了这个結果，这两个条件是：1）数 m 及 $\dfrac{m}{m_1}$ 互素；2）羣 G 对于数 m_1 的所有素因子都可解．F. Hall 这一結果的其他強化包含在 C. A. Чунихин 的文章[28, 41]中．

比羣的 Π-Sylow 正規性条件更強的是 C. A. Чунихин 所引入的条件 Π-2：对于有限羣 G 的阶 g 的任何极大 Π-Sylow 因子 m，

存在 m 阶及 $\frac{g}{m}$ 阶的子羣 A 及 B，且所有 m 阶子羣都与 A 共軛，而 $\frac{g}{m}$ 阶的子羣都与 B 共軛. 正如 C. A. Чунихин[31]所指出的，羣 G 满足条件 Π-2，如果这个条件被它的某个正規羣列的所有因子满足；特别，条件 Π-2 在任何 Π-可解羣中都被满足. 后来，C. A. Чунихин[32,33] 利用研究比正規羣列更一般的子羣列并将羣列的因子代之以对应的子羣的因子一格，而加強了这个結果.

Π-可解羣还有一个重要的性質(C. A. Чунихин[31])：如果 m 是 Π-可解羣 G 的阶 $g = mn$ 的极大 Π-Sylow 因子，于是，如果 h 整除 m，則任何 h 阶的子羣就都含在 m 阶的子羣中，而如果 h 整除 n，則它就都含在 n 阶的子羣中.

自然发生这样的問題：有限羣的类 K_Π 将是什么样的？这里这些有限羣的特点是：对于这个类中任何羣的阶 g 的每一个 Π-Sylow 因子 m，在这个羣中存在着 m 阶及 $\frac{g}{m}$ 阶的子羣. 对于 Π 系由所有素数組成的情形，F. Hall 指出，类 K_Π 与可解羣的类一致，在一般情形，类 K_Π 居于 Π-可解羣类及 Π-可离羣类之間的中間位置，而且存在这样的 Π，它使得类 K_Π 眞正地广于第一个类，并且存在这样的 Π，它使得类 K_Π 較第二个类眞正狭 (C. A. Чунихин[34]).

Б. В. Казачков[1,3]継續了 C. A. Чунихин 的研究，他証明，所有 Π-Sylow 子羣都是可解的及共軛的这个性質，只要它在一有限羣关于其某个 Π-可解正規子羣的商羣中成立，那末它也总在該有限羣中成立. 同样，把上述性質及所有 θ-Sylow 子羣互相共軛的性質同时考慮时，这也成立，其中 θ 是 Π 在所有素数的集合中的余集.

C. Л. Эдельман[1,2] 在另外一个方向中継續了 C. A. Чунихин 的研究，他考慮了羣的 p-正規子羣，即与羣的所有 p-元素可交換的子羣. 在考察一个嵌入另一个的子羣列时(其中每前面一个是后面一个的 p-正規子羣)，C. Л. Эдельман 研究了这些羣列的某些性質，特別，对于它們(在某些条件下)得到了类似于著名的