[illegible]

[illegible]

[illegible]

管理的图论方法

孙晓天　编著

中央广播电视大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

管理的图论方法/孙晓天编著. - 北京:中央广播电视大学出版社,1999.5

ISBN 7-304-00428-2

Ⅰ. 管… Ⅱ. 张… Ⅲ. 图论 - 应用 - 企业管理 Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 19510 号

管理的图论方法

孙晓天 编著

出版·发行/中央广播电视大学出版社

经销/ 新华书店北京发行所

印刷/ 北京市友谊印刷经营公司

开本/787×1092 1/16 **印张**/12 **字数**/276 千字

版本/1999 年 2 月第 1 版 1999 年 5 月第 1 次印刷

印数/ 0001 - 1000

社址/北京市复兴门内大街 160 号 **邮编**/100031

电话/66419791 68519502 **(本书如有缺页或倒装,本社负责退换)**

书号:ISBN 7-304-00428 - 2/C·9

定价:16.50 元

目　　录

第十章　搜索树与先深搜索法

第十一章　分支定界法

第十二章　二分图的匹配

第十三章　覆盖集、独立集和支配集

第十四章　着色问题

第十五章 有向图

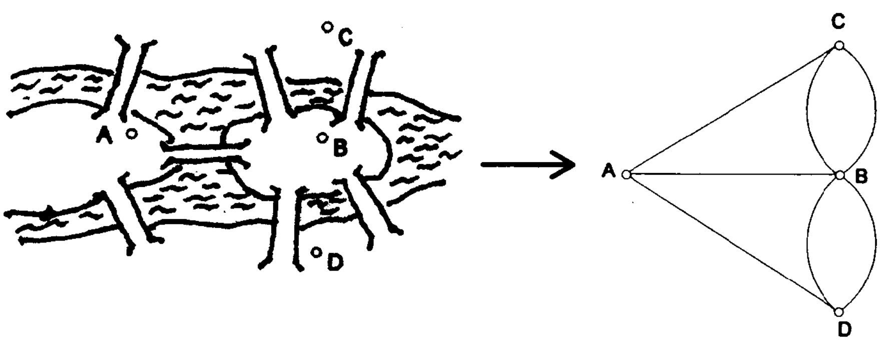
附录 本书中有关算法的 C－语言程序

第一章　引　　论

第一节　图论的由来、发展与意义

图论始于 1736 年，在当时德国一个叫哥尼斯堡(Konigsberg)的小镇上出了一个著名的“七桥问题”．问题是这样的：流经这个镇的普雷格尔(pregel)河中心有两个小岛，如图一(a)所示，这两个岛通过七座桥与河两岸连接．人们想知道，从岸上或岛上的任意地点开始，能否通过每座桥一次且仅一次再回到原地？这个看似简单的问题，其实是一个令许多人绞尽脑汁而不得其解的难题．1736 年著名数学家 Euler 受邀专门研究了“七桥问题”，他得出了确切的答案：通过每座桥一次且仅一次再回到原地是不可能的．

Euler 解决问题的基本步骤是这样的：既然岛与河岸无非是桥梁的连接点，两岸陆地也是桥通往的地点，那就不妨用一个顶点表示一个陆地的区域，用连接相应顶点的线段表示每一座桥．这样的处理，在不改变问题实质的情况下，把现实生活中的人步行过桥问题抽象成如下的图一(b)：



(a)　　　　　　　　(b)

图一

于是哥尼斯堡七桥问题的解答就等价于能否一笔画出上述图一(b)的问题了．接着 Euler 考察了这个图的结构特征，他的结论是：在任意顶点处能实现一笔画的结果总是使与该顶点连接的线段一进一出，因此通过该顶点的线段数总是偶数．对整个图来说，至多有两个顶点(相当于人步行的起点和终点)有可能通过奇数条线段．观察图一(b)，可立即发现它的四个顶点均与

奇数条线段连接. 因此, 它不可能被一笔画出. 从而也就证明了不可能存在通过哥尼斯堡七桥每座桥一次且仅一次再回到原地的走法.

Euler 不仅解决了七桥问题, 他在解决七桥问题时中所运用的抽象分析方法(把具体问题抽象为结构简单的图形)和所采用的论证方法, 经过不断发展, 形成了以仅仅包括顶点和边的图为工具去解决许多领域中实际问题的新的数学思想方法, 看上去似乎意义不大的七桥问题, 导致了一个新的数学分支—— 图论的诞生. 从七桥问题的提出到图论的诞生充分体现了数学发现的意义.

近年来, 由于生产管理、军事、交通运输、计算机网络等方面实际问题的需要, 以及许许多多离散性问题的出现, 图论及其应用的研究得到飞速发展, 成为一个十分活跃的数学分支. 并且, 图论和线性规划、动态规划等优化理论及其方法相互渗透, 促进了组合优化等理论和算法的研究及其在实际问题上的应用. 特别是伴随着计算机科学的发展, 图论在开关理论、形式语言、数据结构、操作系统、人工智能, 计算机网络等领域内贡献巨大. 值得一提的是, 图论也在现代管理理论和实践领域发挥了显著作用. 例如, 运筹学是门类广泛的一门数学学问, 从数学学科分类的角度, 图论是运筹学的一个分支, 而且是最重要的组成部分之一. 目前在许多英文文献中, “管理科学”(management)与“运筹学”(operations research)这两个术语已经相互通用, 几乎成了同义词. 这也从一个侧面说明了图论作为运筹学的一个分支, 对现代管理理论和实践的影响与作用.

掌握数量方法一直是许多从事经济工作, 管理工作的人员面临的困难之一. 而实际上, 数量分析对于他们来说是极其重要的工具, 是绝对不能忽视的, 因为现代管理科学最显著的特点之一就是通过广泛应用数学方法来解决各种复杂的经营管理问题. 而数量分析是要通过某种数学模型来进行的. 图论的研究对象是形如图一(b)那样, 由顶点和顶点之间的边构成的图形, 这是一种非常具体, 非常容易了解的数学模型. 所以, 图论所提供的工具将有助于读者领会如何选用或建立数学模型, 这对帮助管理人员作出正确决策, 以达到提高经营管理水平和经济效益的目的是有好处的. 另外, 与传统数学方法的抽象深奥相比, 图论的理论和方法更具有鲜明的直观和形象化特点. 对于从事经济工作、管理工作的读者来说, 图论也许是一门比较平易近人的数学学问, 它不仅有用, 而且是容易入门和掌握.

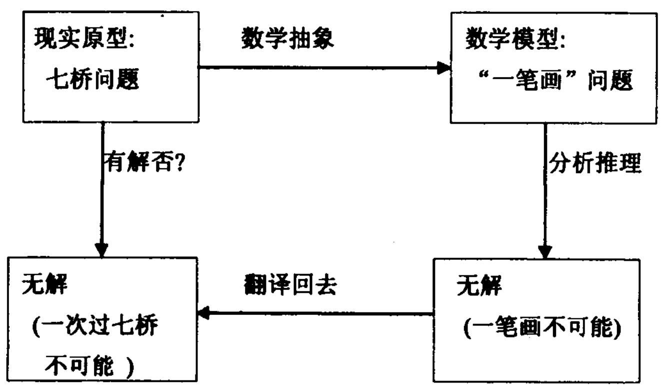
第二节　图与数学模型

第一节中多次提到数学模型, 比如“数量分析是要通过某种数学模型来进行的”, “图就是一种非常具体, 非常容易了解的数学模型”等等. 这一节专门谈谈什么是数学模型, 数学模型是怎样得到的, 它的意义是什么, 因为这些内容将要贯穿本书始终.

数学模型的含义很广, 粗略说来, 数学模型是针对或参照某种具体事物系统的特征或数量相依关系, 采用形式化的语言, 概括或近似的表述出来的一种数学结构. 抽象分析的方法是构造数学模型的基本手段.

数学模型有广义和狭义的两种解释，从广义上说，以现实原型作为背景而加以抽象出来的最基本的数学概念都是广义的数学模型，在这个意义上，图可以称为广义的数学模型，或原始的数学模型.按狭义的解释，那些反映特定问题或特定的具体事物系统的数学结构关系的都是数学模型，本书提到的数学模型应按狭义的解释，在这里，构造数学模型不是为了发现新的数学概念，而是为了解决具体实际问题，即如何把面临的实际问题转化为图这样一个具体的数学模型，并使问题得到解决.但无论是广义的还是狭义的数学模型，其构造数学模型的思想方法基本是一致的.

Euler 解决哥尼斯堡七桥问题的思想方法就是构造数学模型的方法. 七桥问题这样一个实际问题就是图的现实原型. 通过抽象分析，七桥问题被抽象成"一笔画"问题，"一笔画"就是七桥问题的数学模型.建立了数学模型之后，便可以在这个数学模型上进行分析推理和论证，得到的结论是"一笔画"不可能，然后再把这个结论对应的翻译回去，即返回到现实的原型上，就得到了七桥问题无解的答案.这一思想方法可用图二形象的表示出来：



图二

从上面所作的分析中可以归纳出构造数学模型的几个基本步骤：

一、分析所研究的实际问题即现实原型的对象与关系结构的本质属性，确定模型的可能类别与归属.

二、抓主要矛盾，抓核心因素，使数学模型反映的是核心因素间的关系结构.例如图一(b)中的顶点和边.

三、进行数学抽象，对事物对象及对象之间的关系都要进行抽象，要尽可能的使用已知的数学概念，符号和表达式去表示事物对象及其相互关系. 例如图一(b).

根据这样的步骤构造出来的数学模型至少应具有两个特点：一是在这个数学模型上应具备进行分析推理和计算的可能性，以及得出结论的确定性.如果没有这一点，数学模型就没有用处了.二是对于比较复杂的现实原型来说，数学模型应当具有化繁为简，化难为易的特点.如果不具备这一点，数学模型就失去了意义.

从数学模型的性质要求和构造方法来看，构造数学模型的能力至少应包括四个方面：一是理解实际问题的能力，二是运用抽象分析的能力，三是使用数学工具的能力，四是通过实践对结论作出检验的能力.

本书是有助于培养构造数学模型的能力的. 本书的主题是广义的数学模型——图，本书的目的之一是帮助读者学会如何通过建立狭义数学模型，即选用或建立图的模型，并根据图论提供的理论，选择适用的方法，使实践中的问题得到解决. 在这个过程中，读者不仅能掌握一些图论的基本知识内容，而且能在系统的掌握、识别、表述和求解有关数学模型的思路和方法方面有所收获.

七桥问题的例子也告诉我们，数学模型与现实原型之间的关系是反映与被反映的关系. 因为数学模型的构造必须通过抽象分析的过程，这一过程包括了对现实原型中次要环节的扬弃，故数学模型和现实原型之间只能具有相对的一致性，就这一点来讲，数学模型有些像美术中的写生或小说中的典型人物，都无非是某些现实原型的本质特征的近似刻画或集中反映而已，能够认识到这一点，对构造数学模型，并通过数学模型解决实际问题是非常重要的.

第三节　关于本书的几点说明

本书是为在企业及管理机构工作的读者提供的一本图论入门书.

本书试图为读者提供两方面的益处：一方面是得益于它的内容，书中将提供大量的材料，其中一些甚至可以直接运用于企业及管理机构. 另一方面，也许是更重要的方面，是得益于它所提供的分析和解决问题的过程. 本书希望读者不仅能掌握一些基本方法，而且在把它们运用于实际问题时，能够根据具体情况提出更合适的解决办法，做到学以致用. 学会有分析的思考问题是一种宝贵财富，因为在实际生活中，一成不变的照搬现成模型和算法的情况是很少见的，对于从事管理工作的人来说尤其如此.

为了方便读者阅读，本书在表述上也作了两方面的尝试，这是有别于其它图论方面的著作的. 一是尽可能避免证明，定理，抽象符号以及在一些书中常见的大量难懂的专门术语. 但作为一本数学方面的书籍，不可能不用符号来表示有关内容，也不可能没有证明，所以本书在表述上，尽量采用了较为易懂和简洁的形式来介绍图论的方法、算法和技巧. 以算法为例，本书均使用自然语言叙述，相信即使不大熟悉程序设计语言的读者，也不至感到困难. 本书并不是不用公式和符号和没有证明，而是通过逐步引入符号表示，逐步提高抽象程度，使读者循序渐进的适应和领会一些比较抽象的知识内容，努力避免让那些堆砌的公式和符号把读者搞糊涂. 二是尽可能广泛的采用例子，特别是与企业管理，经济管理有关的例子，以便使读者通过具体实例理解如何系统的识别和表述有关的实际问题，如何逐步选择有用的方法并得出结论，以及如何对所得的结论作出解释. 但找到适合在这样一本小书中使用，而且是篇幅适当，切实可行的好例子是不那么容易的，所以本书还不得不采用一些带有“游戏”味道的例子，其实需要读者注意的是，在这些不那么实际的例子中也可能正蕴含着与实际业务问题的联系.

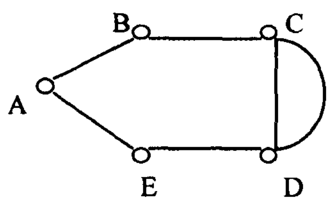
必须承认，本书有些“重”例子“轻”理论，与本书的理论部分相比，本书在例子上用墨较多，雕琢较细，之所以如此，是考虑到本书所涉及的领域和读者的实际情况，笔者希望这样的处理能有助于读者通过例子来领会方法，通过例子来学会“操作”，甚至可能在尚未谙熟“理论”的情况下运用本书所提供的模式去处理一些在实践中遇到的问题．至于这一初衷能否实现，还要留给读者去评述．

第二章　图的基本概念

图论的研究对象是图.这种图虽然是人们通常所熟悉的,但它不是那种用绘画表现出来的形象化图案,而是一种几何图形,并且是一种很特殊的几何图形.

第一节　图的直观概念

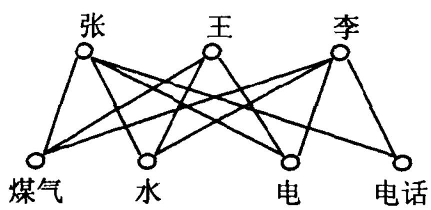
用A,B,C,D,E代表5座城市,它们之间的交通经由铁路连接,如果要知道这些城市是如何通过铁路相互联系的?图一将清楚地告诉你:



图一

图中的顶点代表城市,顶点之间的线段代表铁路线,A与B之间有线段相连,说明这两座城市之间存在铁路交通.C与D两个顶点之间有两条线段,说明这两座城市之间有两条铁路线.其实这样的图,就是我们所熟悉的交通图.在这里,表示顶点的圆圈大小和表示铁路线的线段曲直长短都不重要,关键在于顶点与线段之间的相互关系,即哪些线段把哪些顶点连接在一起了,知道这一点,就把握了这5座城市之间的铁路交通联系.

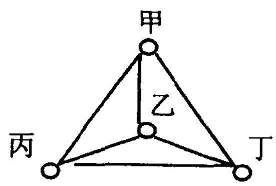
图二中的顶点代表张,王,李3户人家和煤气,水,电和电话等生活需要的设施,顶点之间的线段说明了每户人家对煤气,水,电和电话的使用情况:



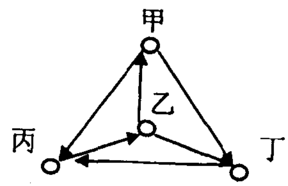
图二

同上面的例子一样，图中顶点和边之间的相互联系，清楚地显示了每户居民对一些基本生活设施的使用情况. 容易看出，每户人家都要使用煤气，水，电，但是王家没有使用电话，因为在王和电话这两个顶点之间没有线段连接.

再看一个例子：甲乙丙丁 4 人比赛乒乓球，用顶点表示参赛者，用连接参赛者的线段给出对阵形式，如图三(a). 若分出胜负，则用指向胜方的有向线段连接两个参赛者，结果如图三(b)所示，这个图清楚地告诉我们，丙丁各赢两场负一场，甲乙各赢一场负两场，并且甲乙丙丁之间的对阵和胜负情况一目了然. 注意，图三(b)中连接两个顶点的线段是有方向的，这一点和前面两个例子中的图有所不同.



(a)



(b)

图三

通过上面这几个例子可以看出，它们所涉及的图形，其实是一种人们已经很熟悉的、与日常生活密切相关的图形形式. 虽然它们所反映的具体事物各异，但有一点是共同的，即它们都用顶点表示具体的事物或现象，都用线段表示两个具体的事物或现象之间的联系，而且在这些例子中，顶点和线段的几何形状并不重要，重要的是顶点之间是否有线段连接以及一个图是如何由这样的顶点集合和线段集合所构成的. 显然，这样的顶点集合及其与之关联的线段的集合可以用来表示许许多多现实生活中的对象与结构.

上面的例子已经给出了图的直观概念. 形如上面例子中的图形，就是图论的研究对象—图. 通过对这些例子的讨论可以发现，图的本质是顶点和线段之间的关联关系，而顶点的大小和位置，以及线段的长短曲直与否都是无关紧要的. 至于这样的图是否一定要用平面上的几何图形来表示，则并非完全必要，第三节将给出图的概念的抽象表述.

第二节　与集合有关的符号表示

为了给出图的较为严格的抽象定义，这一节先简要介绍一些与集合有关的知识内容和符号表示.

1. 一个集合 V 可以用两种方式表示：

(a) $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，它表示 V 是由 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 等元素组成的集合.

(b) $V=\{v \mid v$ 所具有的性质$\}$，{　} 中“|”前面的 v 是 V 中所有元素的代表，“|”后面具体刻画了满足什么条件的 v 才能出现在这个集合里. 如 $V=\{v \mid v$ 是偶数$\}$，它表示 V 是由全体偶

数组成的集合.

2.元素与集合之间的关系有两种:

(a)$v\in V$, 读作 v 属于 V, 表示 v 是 V 中的元素.

(b)$v\notin V$, 读作 v 不属于 V, 表示 v 不是 V 中的元素.

3.集合与集合之间有如下关系:

(a)$V_1=V_2$, 它表示 V_1 的元素都是 V_2 的元素, 同时 V_2 的元素也都是 V_1 的元素, V_1 和 V_2 相等.

(b)$V_1\subseteq V_2$, 称为 V_1 被 V_2 包含, 它表示 V_1 中的元素都属于 V_2, 这时也称 V_1 是 V_2 的子集合, 并且 V_1 可能等于 V_2.

$V_1\subset V_2$, 称为 V_1 被 V_2 真包含, 它表示 V_1 被 V_2 包含, 并且 V_2 中至少有一个元素不属于 V_1, 即 V_1 不等于 V_2. 这时也称 V_1 是 V_2 的真子集. 例如集合 $\{3,4\}$ 和 $\{3,4,5\}$, 其中 $5\notin\{3,4\}$, 所以 $\{3,4\}\subset\{3,4,5\}$.

(c)如果 $V_1\subseteq V_2$ 并且 $V_2\subseteq V_1$, 它表示 V_1 与 V_2 的元素一样多, 即 $V_1=V_2$.

4.集合与集合之间主要有以下几种运算:

(a)$V_1\cup V_2$, 称为 V_1 与 V_2 的并, 它表示由 V_1 与 V_2 中所有元素合在一起组成的新集合, 其中重复的元素只取一次. 例如 $\{3,4\}\cup\{4,5,6\}=\{3,4,5,6\}$.

(b)$V_1\cap V_2$, 称为 V_1 与 V_2 的交, 它表示由 V_1 与 V_2 中所有公共元素组成的新集合, 例如

$$\{3,4\}\cap\{4,5,6\}=\{4\}.$$

(c)V_1-V_2, 称为 V_2 关于 V_1 的差, 它表示由属于 V_1 但不属于 V_2 的所有元素组成的新集合. 例如

$$\{4,5,6\}-\{3,4\}=\{5,6\}.$$

(d)$V_1\oplus V_2$, 称为 V_1 与 V_2 的对称差, 它表示由或者属于 V_1, 或者属于 V_2, 但不同时属于 V_1 和 V_2 的所有元素组成的新集合, 即 $V_1\oplus V_2=(V_1-V_2)\cup(V_2-V_1)=(V_1\cup V_2)-(V_1\cap V_2)$. 例如

$$\{4,5,6\}\oplus\{3,4\}=(\{4,5,6\}-\{3,4\})\cup(\{3,4\}-\{4,5,6\})=\{5,6\}\cup\{3\}=\{3,5,6\}.$$

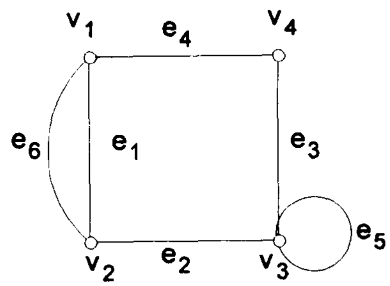
5.不包含任何元素的集合是一个特殊的集合, 称为空集合, 记作 $\varnothing$. 一个集合 V 中包含的所有元素的个数用 $|V|$ 表示. 称为 V 的基数. 例如 $|\{3,4,5\}|=3$.

第三节　图的抽象概念

从第一节已经知道, 一个表示具体事物的顶点集合和一个表示事物之间联系的线段集合可以构成一个几何图形. 反之, 一个反映具体事物的几何图形, 也可由一个顶点集合和一个线段集合表示出来. 这里, 我们把顶点的集合记作 V, 称作顶点集合, 把线段的集合记作 E, 称作边集合, 把由 V 和 E 组成的二元组 $G=(V,E)$ 称作一个图. 容易理解, 之所以把包括一个集

合 V 和一个集合 E 的集合 G 称作"图",是因为它确实可以用一个由顶点和边构成的几何图形来表示.

例如:$G=(V,E)$,其中 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,$E=\{e_1=v_1v_2,e_2=v_2v_3,e_3=v_3v_4,e_4=v_1v_4,e_5=v_3v_3,e_6=v_1v_4\}$. 由 V, E 构成的 G 的图形如下:



图四

下面是关于图的一些基本术语:

(ⅰ)若 $G=(V,E)$,则记 $|V|$ 是图 G 的顶点数,$|E|$ 是图 G 的边数. 如无特殊说明,总是用 n 和 m 来分别表示它们.

(ⅱ)设 v_i,v_j 是 V 中的两个顶点,如果 v_i,v_j 之间有边相连,则把这条边记作 $e=v_iv_j$,称 v_i,v_j 是 e 的两个端点.

(ⅲ)若 $e=v_iv_j$,则称 v_i 与 v_j 邻接、v_i,v_j 与 e 关联. 当两条边 e_i, e_j 有公共的顶点时,也称这两条边是邻接的. 如图四中 v_1 与 v_2 邻接,v_1 与 e_1 关联,e_1 与 e_2 邻接. 但 v_1,v_3 不邻接. v_1 与 e_2 不关联.

(ⅳ)形如图四中 e_5 的边称为环,环是始点和终点重合的边;如果两个顶点之间存在多于一条边,则称这些边为重边,如 e_1 与 e_6. 一个没有环和重边的图称为简单图. 显然,图四不是简单图. 在绝大多数情况下,我们以简单图作为研究和讨论的对象.

(ⅴ)图 G 的边可以是有方向的,如图三(b). 这时称 G 为有向图. 需要注意,这时 v_iv_j 与 v_jv_i 是两条不同的边,它们不是重边.

(ⅵ)与图 G 中一个顶点 v 关联的边的个数称为顶点 v 的度数,记作 $d(v)$. 如果一条边是环则按两条边计算. 若一个顶点的度数是偶数,则称该顶点为偶顶点,若一个顶点的度数是奇数,则称该顶点为奇顶点. G 的顶点度数中最大者,称为 G 的最大度数,记作 Δ. 例如图四中顶点 v_1 的度数是 2,即 $d(v_1)=2$,而 $d(v_3)=4$,因为与 v_3 关联的有两条边和一个环. v_1,v_3 都是偶顶点,并且 $\Delta=4$.

(ⅶ)以有向图 G 中一个顶点 v 为始点的边的个数称为顶点 v 的出度,记作 $d^-(v)$.;以 v 为终点的边的个数称为顶点 v 的入度,记作 $d^+(v)$;顶点 v 的出度与入度之和,称为 v 的度数. 例如图三(b)中 $d^-(甲)=2$,$d^+(甲)=1$. $d(甲)=d^-(甲)+d^+(甲)=3$.

下面是两个与度数有关的定理,通过这两个定理可以得到一些很有趣的结论.

定理 1 一个图 G 的所有顶点度数之和是边数的 2 倍.

事实上,因为每条边有两个端点,所以在计算顶点的度数时,每条边都被数过两次,从而得出所有顶点度数之和恰好是边数的2倍.

这个定理一般称作"握手定理",如同在计算顶点的度数时每条边都被数过两次一样,每握一次手,都关联到两只手,"握手定理"因此得名.

定理2 一个图G的奇顶点的个数一定是偶数.

事实上,由1可知,图G的所有顶点度数之和是一个偶数(2的倍数).而偶数之和一定是偶数,所以G中偶顶点的度数之和是偶数,由于G的所有顶点或为偶顶点,或为奇顶点,故G中奇顶点的度数之和一定也是偶数,因为偶数和奇数之和决不会是偶数的.

例子:

1.如果图G有n个顶点,n+1条边,则G中至少有一个顶点的度数$\geqslant 3$.

事实上,由定理1可知,G的顶点度数之和是边数的2倍,即$2(n+1)$.故每个顶点的平均度数为$2(n+1)/n$,因为这个数大于2,所以至少有一个顶点的度数$\geqslant 3$.

2.在不少于2个人的人群中,总存在两个人在该人群中有相同数目的朋友.

为回答这个问题,可先以如下方式建立一个图的模型:把这个人群中的每一个人作为一个顶点,如果两个人是朋友,则在表示二人的顶点之间加一条边.显然这是一个简单图G.于是上述问题就转化为证明:一个顶点个数$\geqslant 2$的简单图G至少有两个顶点度数相等.

证 设G有n个顶点,如果没有孤立的顶点,则每个顶点的度数一定在1与$n-1$之间,于是n个顶点的度数在这$n-1$个数中间选择,则一定至少有两个顶点的度数是相等的;如果存在孤立的顶点,则每个顶点的度数就在1与$n-2$之间,则结论更为明显.

第四节 几种常用的图

1.子图,生成子图与导出子图

在探讨和描述一个图的性质和它的局部结构时,子图,生成子图与导出子图的概念非常重要.

(1)设$G=(V,E)$,$H=(V',E')$是图,如果$V'\subseteq V$,$E'\subseteq E$,则称H是G的一个子图,记作$H\subseteq G$.若$H\neq G$,则称H是G的一个真子图.例如图五-中的(a)是G的子图,而且是真子图;

(2)如果H是包含G的所有顶点的子图,则称H是G的一个生成子图.图五(b)是G的子图,而且是生成子图;

(3)若$G=(V,E)$,$V'\subseteq V$,以V'为顶点集合,以两端点均在V'中的全体边为边集合组成的子图,称为G的由V'导出的子图.或称G的顶点导出子图,同理还可以定义边导出子图.图五(c)是G的由顶点集合$V'=\{v_1,v_2,v_4,v_5\}$导出的子图.