

数学分析教程

第一卷 第二分册

[苏] C. M. 尼柯尔斯基著

高尚华 郭思旭 刘远图 译

人民教育出版社

数学分析教程

第一卷 第二分册

[苏] C. M. 尼柯尔斯基著
高尚华 郭思旭 刘远图 译

人民教育出版社

数学分析教程

第一卷 第二分册

[苏] C. M. 尼柯尔斯基 著

高尚华 郭思旭 刘远图 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

辽宁省建平县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.875 字数 210,000

1981年6月第1版 1982年3月第1次印刷

印数 00,001—13,000

书号 13012·0620 定价 0.79 元

前 言

本书是根据苏联《科学》出版社的 С. М. НИКОЛЬСКИЙ 著《数学分析教程》第一卷译出的。

本书是第一卷的第二分册，主要内容有：多变量函数的微分学，不定积分与多项式代数，黎曼定积分，积分的某些应用与近似方法，级数等。原书论证严格，叙述细致，可作为我国理、工科数学专业与应用数学、计算数学专业的教学参考书。

目 录

第七章 多变量函数微分学	1
§ 7.1. 开集.....	1
§ 7.2. 函数的极限.....	4
§ 7.3. 连续函数.....	9
§ 7.4. 偏导数和方向导数.....	13
§ 7.5. 可微函数, 切平面.....	15
§ 7.6. 复合函数的导数, 方向导数, 梯度.....	20
§ 7.7. 微分次序的无关性.....	28
§ 7.8. 函数的微分, 高阶微分.....	30
§ 7.9. 极限点, 维尔斯特拉斯定理, 闭集与开集.....	34
§ 7.10. 集上的函数, 闭集上连续函数的性质.....	40
§ 7.11. 一致连续函数的开拓, 区域边界上的偏导数.....	47
§ 7.12. 矩形套引理与波雷尔引理.....	49
§ 7.13. 泰勒公式.....	50
§ 7.14. 具有皮亚诺型余项的泰勒公式, 唯一性.....	55
§ 7.15. 函数的局部(绝对)极值.....	56
§ 7.16. 隐函数存在定理.....	61
§ 7.17. 方程组的解的存在定理.....	66
§ 7.18. 映射.....	71
§ 7.19. 光滑曲面.....	75
§ 7.20. 由参数给定的光滑曲面, 可定向曲面.....	79
§ 7.21. 不可定向曲面的例子, 莫比乌斯带.....	85
§ 7.22. 局部相对极值.....	86
§ 7.23. 曲线的奇点.....	93
§ 7.24. 面上的曲线.....	98
§ 7.25. 在区域的光滑边界的邻域内的曲线坐标.....	105
§ 7.26. 偏导数的变量替换.....	108
§ 7.27. 相关函数组.....	113

第八章 不定积分, 多项式代数	117
§ 8.1. 序言, 变量替换法和分部积分法	117
§ 8.2. 复数	124
§ 8.3. 复数序列的极限, 复变函数	130
§ 8.4. 多项式	133
§ 8.5. 将有理函数展开成部分分式	138
§ 8.6. 有理分式积分法	144
§ 8.7. 从积分中分出有理部分的奥斯特洛格拉得斯基方法	145
§ 8.8. 根式的积分	149
§ 8.9. 欧拉代换	150
§ 8.10. 二项微分, 契比雪夫定理	153
§ 8.11. 三角表示式的积分	154
§ 8.12. 三角代换	158
§ 8.13. 几个不能表示成初等函数的重要积分	159
第九章 黎曼定积分	161
§ 9.1. 引言和定义	161
§ 9.2. 可积函数的有界性	162
§ 9.3. 达布和	163
§ 9.4. 基本定理	165
§ 9.5. $[a, b]$ 上的连续函数和单调函数的积分存在定理	169
§ 9.6. 勒贝格定理	171
§ 9.7. 积分的可加性和齐次性	172
§ 9.8. 不等式和中值定理	175
§ 9.9. 积分作为上限的函数, 牛顿-莱布尼兹定理	178
§ 9.10. 第二中值定理	182
§ 9.11. 函数的变化	183
§ 9.12. 广义积分	185
§ 9.13. 非负函数的广义积分	189
§ 9.14. 分部积分法	192
§ 9.15. 广义积分和级数	194
§ 9.16. 有若干个奇点的广义积分	198
§ 9.17. 带有积分形式余项的泰勒公式	202

§ 9.18. 瓦利斯公式和司特林公式	203
第十章 积分的某些应用. 近似方法	207
§ 10.1. 极坐标下的面积	207
§ 10.2. 旋转体的体积	208
§ 10.3. 光滑曲线的弧长	209
§ 10.4. 旋转体的表面积	211
§ 10.5. 拉格朗日插值多项式	213
§ 10.6. 矩形求积公式和梯形求积公式	214
§ 10.7. 一般的求积公式, 泛函	216
§ 10.8. 辛普松公式	217
§ 10.9. 得到求积公式估计的一般方法	218
§ 10.10. 再讨论弧长	222
§ 10.11. 数 π , 三角函数	225
第十一章 级数	230
§ 11.1. 级数的概念	230
§ 11.2. 级数的运算	232
§ 11.3. 非负项级数	233
§ 11.4. 莱布尼兹级数	239
§ 11.5. 绝对收敛级数	239
§ 11.6. 条件收敛和无条件收敛的实数项级数	241
§ 11.7. 函数序列和函数项级数, 一致收敛	244
§ 11.8. 在闭区间上一致收敛级数的积分和微分	250
§ 11.9. 多重级数, 绝对收敛级数的乘法	255
§ 11.10. 级数与序列的用算术平均法求和	260
§ 11.11. 幂级数	262
§ 11.12. 幂级数的求微分与求积分	265
§ 11.13. 复变函数 e^z , $\cos z$, $\sin z$ 的幂级数	269
索引	272

第七章 多变量函数微分学

§ 7.1. 开 集

在 n 维空间 $R_n = R$ 中给定任意一点 $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. 满足不等式

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = \left[\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq r$$

的点 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R$ 的集合称为以该已知点 \mathbf{x}^0 为中心, 以 r 为半径的球(或闭球).

满足严格不等式 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < r$ 的点 \mathbf{x} 的集合称为以 \mathbf{x}^0 为中心, 以 r 为半径的开球.

我们定义满足不等式 $a_j \leq x \leq b_j (a_j < b_j, j = 1, \dots, n)$ 的点 $\mathbf{x} \in R$ 的集合为 R 中的矩形 (R 中的闭矩形或闭长方体). 在 $n=3$ 的情形, 它是现实的长方体, 其边平行于直角坐标系 (x_1, x_2, x_3) 的坐标轴.

还可以定义 R 中的开矩形, 或者说满足严格不等式 $a_j < x < b_j (j = 1, \dots, n)$ 的点的集合.

坐标满足不等式 $|x_j - x_j^0| \leq a (j = 1, \dots, n, a > 0$ 是已知数) 的点 \mathbf{x} 的集合很自然地称为 R 中的立方体(或闭立方体), 其中心在 \mathbf{x}^0 , 边长为 $2a$. 当然, 当 $n=3$ 时这是边平行于(直角)坐标系的坐标轴的立方体.

最后, (在 R 中的) 开立方体是用不等式 $|x_j - x_j^0| < a (j = 1, \dots, n)$ 定义的.

不等式 $|x_j - x_j^0| \leq \left(\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < r$ 说明, 如果点 \mathbf{x} 属于中心在 \mathbf{x}^0 , 半径为 r 的球, 那么它也属于边长为 $2r$, 中心在 \mathbf{x}^0 的立方体. 这样一来, 边长为 $2r$, 中心在 \mathbf{x}^0 的立方体包含半径为 r , 中心同样为 \mathbf{x}^0 的球.

另一方面, 如果点 \mathbf{x} 属于立方体 $|x_j - x_j^0| < a (j=1, \dots, n)$, 那么它满足不等式 $\left(\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{n} a$, 这说明中心在 \mathbf{x}^0 , 半径为 $a\sqrt{n}$ 的球包含边长为 $2a$, 与球有相同中心的立方体 (参看 § 6.2 的(12)式).

我们研究了开球与开立方体, 但是所得到的结果对于闭球与闭立方体也对.

给定点 $\mathbf{x} \in R$ 的任意集合 E . 作为定义, 对于点 \mathbf{x}^0 , 如果存在一个中心在 \mathbf{x}^0 的开球, 它完全属于 E , 那么称 \mathbf{x}^0 是集合 E 的内点. 这里, 球一词可以用立方体代替, 因为所有的球都包含一个与自身有相同中心的立方体. 反过来也一样.

如果一个集合的点都是内点, 则称这个集合是开的. 这个定义还可以这样叙述: 如果由任何一点属于集合 E 可推出此点是它的内点, 那么集合 E 是开集.

由此可见, 空集是开集.

开球

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < r \quad (1)$$

是开集. 事实上, 设 \mathbf{y} 是属于它的点, 即 $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| = \rho < r$, 且 \mathbf{x} 是任一属于球

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon \quad (\varepsilon < r - \rho) \quad (2)$$

的点, 那么它满足

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = |\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{x}^0| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| < \varepsilon + \rho < r.$$

这表明, 球(2)属于球(1).

请读者证明: 开矩形(特别, 开立方体)是开集.

两个开集 G_1 与 G_2 的交 $G_1 G_2$ 是开集. 事实上, 设点 \mathbf{x}^0 属于 $G_1 G_2$. 因为 \mathbf{x}^0 是 G_1 与 G_2 的内点, 那么存在两个中心在 \mathbf{x}^0 的开球, 第一个属于 G_1 , 第二个属于 G_2 , 它们的交显然是一个开球(二者中较小的一个), 且此开球属于 $G_1 G_2$.

易见, 有限个或可数个开集的和是开集. 然而可数个开集的交可能不是开的, 例如开球 $|x| < \frac{1}{k} (k=1, 2, \dots)$ 的交是一个点(零点).

包含点 $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}_n$ 在内的任意一个开集称为点 \mathbf{x}^0 的邻域. 显然, \mathbf{x}^0 的两个邻域的交仍然是 \mathbf{x}^0 的邻域.

说了上面这一些之后, 集合 E 的内点的概念还可以这样定义: 如果 \mathbf{x}^0 有完全属于 E 的邻域, 那么 \mathbf{x}^0 是 E 的内点. 事实上, 如果 \mathbf{x}^0 按第一种定义是内点, 那么可找到一个中心在 \mathbf{x}^0 而属于 E 的开球, 但后者是 \mathbf{x}^0 的邻域. 反之, 如果 \mathbf{x}^0 按第二种定义是内点, 那么存在 \mathbf{x}^0 的属于 E 的邻域, 此邻域既然是一个开集, 它就包含一个中心在 \mathbf{x}^0 的开球.

今后, 我们将要掌握许多数学上严格定义的开集的例子, 而现在我们只请读者从几何直观上了解: 如果任意一个几何体剥去它的边界, 那么便得到开集.

在随后的几节我们将研究 n 个变量 x_1, \dots, x_n 的函数 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$, 或者也可以说是在 n 维空间中开集上定义的点 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 的函数.

如果集合 E 的任意两个点 $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ 可以用完全属于 E 的连续曲线连接起来, 即如果存在连续的向量函数 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), 0 \leq t \leq 1$, 使

$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}'$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}''$, $\mathbf{x}(t) \in E$ (参看 § 6.5), 那么就称集合 E 是连通的.

曲线 $\mathbf{x}(t) = t\mathbf{x}' + (1-t)\mathbf{x}''$ ($t \in [0, 1]$) 称为线段 $\overline{\mathbf{x}'\mathbf{x}''}$, 显然, 它是连续的, 且连接了点 \mathbf{x}' , \mathbf{x}'' .

一个集合, 如果连接它的两个点 \mathbf{x}' , \mathbf{x}'' 的线段连同这两点在内都属于这个集合, 那么就称这个集合称为凸集 (例子参看 § 7.3. 末尾).

附注 1. R_n 中的立方体 Δ 可以用下列不等式确定:

$$\Delta = \{a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j = 1, \dots, n\},$$

其中 $2d = b_j - a_j$ ($j = 1, \dots, n$). 易见, Δ 是 2^n 个形如 $\{\lambda_j \leq x_j \leq \mu_j, \quad j = 1, \dots, n\}$ 的立方体的和, 这里需要用所有可能的方法取 $\lambda_j = a_j$, $\mu_j = (a_j + b_j)/2$ 或 $\lambda_j = (a_j + b_j)/2$, $\mu_j = b_j$. 也说立方体 Δ 这样被分成了 2^n 个 (边长为 d 的) 相等的立方体.

附注 2. 我们所说的 R_n 中的立方体, 在 $n=3$ 时就是通常的 (三维) 立方体, 它的边平行于坐标轴. n 维立方体的一般定义要求引入坐标的正交变换:

$$x_j - x_j^0 = \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k,$$

其中 $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in R_n$, a_{jk} 是实数, 且 $\sum_{k=1}^n a_{jk}^2 = 1$, $\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = 0$ ($i \neq j$,

$i, j = 1, \dots, n$). 例如在适当的 (依赖于 Δ) 坐标的正交变换后, 使点 $x \in R_n$ 的集合变为形如 $\{|\xi_k| \leq d, k = 1, \dots, n\}$ 的集合, 那么前一集合称为 R_n 中的, 中心在 \mathbf{x}^0 , 边长为 $2d$ 的闭立方体.

对 n 维矩形有类似的注解.

§ 7.2. 函数的极限

作为定义, 如果函数 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ 定义在点 $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ 的某个邻域上 (可能除去 \mathbf{x}^0 本身), 并且如果对于在上述邻域中任意趋于 \mathbf{x}^0 又异于 \mathbf{x}^0 的点列 \mathbf{x}^k ($k = 1, 2, \dots$), 极限

$$\lim_{\substack{|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| \rightarrow 0 \\ \mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0}} f(\mathbf{x}^k) = A \quad (1)$$

存在, 就说函数 $f(x)$ 在点 \mathbf{x}^0 有极限 A , 并记作:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ (j=1, \dots, n)}} f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = A, \quad (2)$$

(还可以记作 $f(\mathbf{x}) \rightarrow A (\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0)$).

另一个等价的定义是: 如果函数 f 定义在点 \mathbf{x}^0 的某个邻域上(可能除去 \mathbf{x}^0 本身), 且对任意 $\varepsilon > 0$ 总可以找到 $\delta > 0$, 使得对于所有满足不等式

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta \quad (3)$$

的 \mathbf{x} 有

$$|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon, \quad (4)$$

就说函数 f 在点 \mathbf{x}^0 有等于 A 的极限.

定义中不等式(3)可用

$$0 < \sum_{j=1}^n |x_j - x_j^0| < \delta \quad (j=1, \dots, n)$$

来代替. 或者说, 对于任意 $\varepsilon > 0$ 可以找到邻域 $U(\mathbf{x}^0)$, 使得对于所有属于该邻域的 $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$, (4)式成立.

在 n 维的情形中, 第一个定义与第二个定义的等价性完全可类似于一维的情形来证明(参看 § 4.1).

极限存在的柯西准则(证明同一维的情形一样)叙述如下(参看 § 4.1 的定理 5).

函数 f 在 \mathbf{x}^0 点有(有限)极限, 当且仅当对于任意的 $\varepsilon > 0$ 总可以找到邻域 $U(\mathbf{x}^0)$ (特别, 可以是中心在 \mathbf{x}^0 的立方体或球), 使得对于所有异于 \mathbf{x}^0 的 $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in U(\mathbf{x}^0)$, 成立不等式

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \varepsilon.$$

显然, 如果数 A 是 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}^0 的极限, 那么 A 是 h 的函数 $f(\mathbf{x}^0 + h)$ 在零点的极限:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) = A,$$

反之亦然.

考虑定义在 \mathbf{x}^0 点的邻域(可能除去 \mathbf{x}^0 本身)所有点上的函数 f , 设 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ 是任意的单位向量 ($|\boldsymbol{\omega}| = 1$) 且 $t \geq 0$ 是数量. 形如 $\mathbf{x}^0 + t\boldsymbol{\omega}$ ($0 \leq t$) 的点形成以 \mathbf{x}^0 为始点的沿向量 $\boldsymbol{\omega}$ 方向的射线. 对于每个 $\boldsymbol{\omega}$ 可研究数值变量 t 的函数

$$f(\mathbf{x}^0 + t\boldsymbol{\omega}) = f(x_1^0 + t\omega_1, \dots, x_n^0 + t\omega_n) \quad (0 < t < \delta_{\boldsymbol{\omega}}),$$

其中 $\delta_{\boldsymbol{\omega}}$ 是依赖于 $\boldsymbol{\omega}$ 的数, 这个(单变量 t 的)函数的极限

$$\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} f(\mathbf{x}^0 + t\boldsymbol{\omega}) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} f(x_1^0 + t\omega_1, \dots, x_n^0 + t\omega_n)$$

如果存在, 自然就称为 f 在点 \mathbf{x}^0 沿向量 $\boldsymbol{\omega}$ 方向的极限.

特别, 若 $\boldsymbol{\omega}$ 是沿 x_j 轴方向的单位向量 $\mathbf{e}^j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, 那么可以谈论 f 在 \mathbf{x}^0 点沿 x_j 轴正半轴方向的极限

$$\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}^j) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j^0 + t, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0)$$

或 f 在 \mathbf{x}^0 点沿 x_j 轴负半轴方向的极限

$$\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} f(\mathbf{x}^0 - t\mathbf{e}^j) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j^0 - t, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0)$$

从函数 f 在 \mathbf{x}^0 点有等于 A 的极限显然可以推出它在 \mathbf{x}^0 点沿任何方向有等于 A 的极限. 但是逆命题不成立——函数 f 在 \mathbf{x}^0 沿任何方向有等于 A 的极限, 但同时在 \mathbf{x}^0 却可能没有极限.

例 1

$$1) f(x, y) = \frac{x^3 |y^3|}{x^2 + y^2};$$

$$2) \varphi(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

函数 f 与 φ 在平面 (x, y) 上, 除去 $(0, 0)$ 外有定义. 我们有

$$|f(x, y)| \leq \frac{2(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2 + y^2} = 2(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},$$

由此

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$$

(对 $\varepsilon > 0$, 假定 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 那么, 只要 $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} < \delta$ 时, 就有 $|f(x, y)| < \varepsilon$).

其次, 假定 k 为常数, 有

$$\varphi(x, kx) = \frac{1 - k^2}{1 + k^2},$$

由此可见, φ 在 $(0, 0)$ 点沿不同方向的极限一般是不同的, 所以 φ 在 $(0, 0)$ 无极限.

例 2 在平面 (x, y) 上定义螺线 $\rho = \theta$ ($0 < \theta < 2\pi$), 其中 ρ 是点的向径, θ 是极角. 设 $\psi(x, y)$ 定义如下 (图 7.1):

$\psi(0, 0) = 1$; 当 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \theta > 0$ 时, $\psi(x, y) = 0$, ψ 在任意连接 $(0, 0)$ 点与螺线上点的线段上是线性的. 易见, 对任何点 $(x, y) \neq (0, 0)$, $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(tx, ty) = 1$, 即 ψ 在 $(0, 0)$ 点沿任何方向存在等于 1 的极限, 然而 ψ 在 $(0, 0)$ 的极限不存在. 因为, 如果沿着平面 (x, y) 第一象限内, 界于螺线与 x 轴之间的曲线趋于 $(0, 0)$ 时, 那么沿此曲线 $\psi(x, y) = 0$.

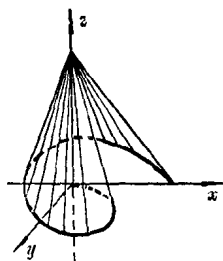


图 7.1

如果函数 f 定义在 \mathbf{x}^0 的某个邻域上 (可能要除去 \mathbf{x}^0 点), 对于任意的 $N > 0$ 都可以找到这样的 $\delta > 0$, 使得只要 $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$, 就有 $|f(\mathbf{x})| > N$, 我们就记为 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = \infty$.

还可以讲当 $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ 时 f 的极限

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = A. \quad (5)$$

例如当 A 为有限数时, 等式 (5) 可以这样理解: 对于任意 $\varepsilon > 0$ 都可以指出这样的 $N > 0$, 对于点 \mathbf{x} , 当 $|\mathbf{x}| > N$ 时函数 f 有定义且成立不等式 $|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$.

下列等式成立:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} (f(\mathbf{x}) \pm \varphi(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \pm \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}), \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow x^0} (f(x)\varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x^0} f(x) \lim_{x \rightarrow x^0} \varphi(x), \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x^0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x^0} \varphi(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow x^0} \varphi(x) \neq 0). \quad (8)$$

这里可能 $x^0 = \infty$. 同时照例是如果 f 与 φ 的极限存在, 那么等式左边(有限的)极限存在. 作为例子, 我们证明(7)式.

设 $x^k \rightarrow x^0$ ($x^k \neq x^0$); 那么

$$\begin{aligned} \lim_{x^k \rightarrow x^0} (f(x^k)\varphi(x^k)) &= \lim_{x^k \rightarrow x^0} f(x^k) \lim_{x^k \rightarrow x^0} \varphi(x^k) \\ &= \lim_{x \rightarrow x^0} f(x) \lim_{x \rightarrow x^0} \varphi(x). \end{aligned} \quad (9)$$

这样一来, (9)式左边的极限存在且等于(9)式的右边, 而因为序列 $\{x^k\}$ 是任意的, 所以它等于函数 $f(x)\varphi(x)$ 在 x^0 点的极限.

定理 1. 如果函数 f 在 x^0 点有不为零的极限

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = A \neq 0,$$

那么存在 $\delta > 0$, 使得对所有满足不等式

$$0 < |x - x^0| < \delta \quad (10)$$

的 x , 函数 f 满足不等式

$$|f(x)| > \frac{|A|}{2}. \quad (11)$$

不仅如此, 函数 f 在这些点处保持 A 的符号.

事实上, 令 $\varepsilon = |A|/2$, 存在着 $\delta > 0$, 使得对于满足不等式(10)的 x 成立

$$|f(x) - A| < |A|/2. \quad (12)$$

所以对这样的 x , $|A|/2 > |A - f(x)| \geq |A| - |f(x)|$, 即(11)式成立.

由(12)式, 对上述 x 得出

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2},$$

由此, 当 $A > 0$ 时 $f(\mathbf{x}) > A/2$, 当 $A < 0$ 时 $f(\mathbf{x}) < A/2$ (保持符号).

附注 在 § 7.10 将给出在任意集合上给定的函数极限的更一般的定义.

§ 7.3. 连续函数

作为定义, 如果函数 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ 定义在点 $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ 的某个邻域内 (其中包括点 \mathbf{x}^0 本身在内), 且它在点 \mathbf{x}^0 的极限等于它在 \mathbf{x}^0 的值:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0), \quad (1)$$

就说函数 f 在点 \mathbf{x}^0 处连续.

函数 f 在 \mathbf{x}^0 点处连续的条件可以写成如下等价的形式:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^0), \quad (1')$$

即如果 \mathbf{h} 的函数 $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h})$ 在点 $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ 处连续, 那么函数 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}^0 处连续.

对应于增量 $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, 可以引入 f 在 \mathbf{x}^0 点的增量

$$\Delta_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0),$$

并可用增量的说法定义 f 在 \mathbf{x}^0 的连续性: 如果

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \Delta_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}^0) &= \lim_{h_1, \dots, h_n \rightarrow 0} [f(x_1^0 + h_1, \dots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (1'')$$

那么函数 f 在 \mathbf{x}^0 处连续.

由 § 7.2 的公式(6)–(8)直接得出:

定理 1 在 \mathbf{x}^0 点处连续的函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的和、差、积与商在这一点处也是连续函数, 当然, 在商的情形需 $\varphi(\mathbf{x}^0) \neq 0$.

常数 c 可看作 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 的函数 $f(\mathbf{x}) = c$. 它对任何 \mathbf{x} 都连续, 因为

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = c - c = 0 \rightarrow 0, \quad (\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}).$$

比它复杂一些的是函数 $f_j(\mathbf{x}) = x_j (j=1, \dots, n)$, 这里指标 j 可取值 $1, \dots, n$ 中的一个, 它(作为 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 的函数!) 同样是连续的. 实际上, 令 $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, 那么

$$|f_j(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_j(\mathbf{x})| = |(x_j + h_j) - x_j| = |h_j| \leq |\mathbf{h}| \rightarrow 0 \quad (\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}).$$

如果对函数 x_j 与常数作有限次数的加、减和乘法运算, 那么得到的函数称为 \mathbf{x} 或 (x_1, \dots, x_n) 的多项式. 根据上述性质, 多项式是 R_n (对于所有 $\mathbf{x} \in R_n$) 上的连续函数. 两个多项式的比 P/Q 是有理函数, 显然, 除去使 $Q(\mathbf{x}) = 0$ 的点 \mathbf{x} 之外, 它在 R_n 上到处连续.

函数

$$F(\mathbf{x}) = x_1^3 - x_2^2 + x_1^2 x_3 + 2x_1^2 x_2 - 3x_3^2 + 4$$

可作为 (x_1, x_2, x_3) 的三次多项式的例子.

一般地, 显然有下述定理:

定理 2 设 $f(x_1, \dots, x_m)$ 是在空间 R_m 中的点 $\mathbf{x} = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ 处连续的函数且 $m < n$.

如果把它看作 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 的函数

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_m)$$

那么, F 是在任意点 $(x_1^0, \dots, x_m^0, x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ 处, 对于 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ (在空间 R_n) 连续的函数, 这里 x_{m+1}^0, \dots, x_n^0 是任意的.

事实上, 如果 $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, 那么

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{h}} F(\mathbf{x}^0) &= F(x_1^0 + h_1, \dots, x_n^0 + h_n) - F(x_1^0, \dots, x_n^0) \\ &= f(x_1^0 + h_1, \dots, x_m^0 + h_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0) \rightarrow 0 \quad (\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}). \end{aligned}$$

设 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ 是整非负向量, 即它有非负的整分量 $k_j (j=1, \dots, n)$. 如果 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 是 R_n 的点, 那么规定如下记号:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}. \quad (2)$$

这个函数对所有 $\mathbf{x} \in R_n$ 连续, 因为它是有限个形如 x_j 的因子的乘积, 这