数学分析教程

第一卷　第二分册

[苏] C. M. 尼柯尔斯基著

高尚华　郭思旭　刘远图　译

人民教育出版社

数学分析教程

第一卷　第二分册

[苏] С. М. 尼柯尔斯基著
高尚华　郭思旭　刘远图　译

人民教育出版社

数学分析教程

第一卷　第二分册

[苏] C.M.尼柯尔斯基　著

高尚华　郭思旭　刘远图　译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

辽宁省建平县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 8.875　字数 210,000

1981 年 6 月第 1 版　1982 年 3 月第 1 次印刷

印数 00,001—13,000

书号 13012·0620　　定价 0.79 元

前　言

本书是根据苏联《科学》出版社的 C. M. Никольский 著《数学分析教程》第一卷译出的.

本书是第一卷的第二分册，主要内容有：多变量函数的微分学，不定积分与多项式代数，黎曼定积分，积分的某些应用与近似方法，级数等. 原书论证严格，叙述细致，可作为我国理、工科数学专业与应用数学、计算数学专业的教学参考书.

目　　录

第七章　多变量函数微分学

§7.1. 开　集

在 n 维空间 $R_n=R$ 中给定任意一点 $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0, \cdots, x_n^0)$. 满足不等式

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|=\left[\sum_1^n (x_j-x_j^0)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant r$$

的点 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)\in R$ 的集合称为以该已知点 $\boldsymbol{x}^0$ 为中心，以 r 为半径的球(或闭球).

满足严格不等式 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|<r$ 的点 $\boldsymbol{x}$ 的集合称为以 $\boldsymbol{x}^0$ 为中心，以 r 为半径的开球.

我们定义满足不等式 $a_j\leqslant x\leqslant b_j (a_j<b_j\ \ j=1, \cdots, n)$ 的点 $\boldsymbol{x}\in R$ 的集合为 R 中的矩形(R 中的闭矩形或闭长方体). 在 $n=3$ 的情形，它是现实的长方体，其边平行于直角坐标系(x_1, x_2, x_3)的坐标轴.

还可以定义 R 中的开矩形，或者说满足严格不等式 $a_j<x<b_j$ $(j=1, \cdots, n)$ 的点的集合.

坐标满足不等式 $|x_j-x_j^0|\leqslant a (j=1, \cdots, n, a>0$ 是已知数)的点 $\boldsymbol{x}$ 的集合很自然地称为 R 中的立方体(或闭立方体)，其中心在 $\boldsymbol{x}^0$, 边长为 $2a$. 当然，当 $n=3$ 时这是边平行于(直角)坐标系的坐标轴的立方体.

最后，(在 R 中的)开立方体是用不等式 $|x_j-x_j^0|<a (j=1, \cdots, n)$ 定义的.

不等式$|x_j-x_j^0|\leqslant\left(\sum_1^n(x_j-x_j^0)^2\right)^{\frac{1}{2}}<r$说明，如果点$\boldsymbol{x}$属于中心在$\boldsymbol{x}^0$，半径为$r$的球，那么它也属于边长为$2r$，中心在$\boldsymbol{x}^0$的立方体.这样一来，边长为$2r$，中心在$\boldsymbol{x}^0$的立方体包含半径为$r$，中心同样为$\boldsymbol{x}^0$的球.

另一方面，如果点$\boldsymbol{x}$属于立方体$|x_j-x_j^0|<a(j=1,\cdots,n)$，那么它满足不等式$\left(\sum_1^n(x_j-x_j^0)^2\right)^{\frac{1}{2}}<\sqrt{n}\,a$，这说明中心在$\boldsymbol{x}^0$，半径为$a\sqrt{n}$的球包含边长为$2a$，与球有相同中心的立方体(参看§6.2的(12)式).

我们研究了开球与开立方体，但是所得到的结果对于闭球与闭立方体也对.

给定点$\boldsymbol{x}\in R$的任意集合E. 作为定义，对于点$\boldsymbol{x}^0$，如果存在一个中心在$\boldsymbol{x}^0$的开球，它完全属于E，那么称$\boldsymbol{x}^0$是集合E的内点. 这里，球一词可以用立方体代替，因为所有的球都包含一个与自身有相同中心的立方体. 反过来也一样.

如果一个集合的点都是内点，则称这个集合是开的. 这个定义还可以这样叙述：如果由任何一点属于集合E可推出此点是它的内点，那么集合E是开集.

由此可见，空集是开集.

开球

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|<r \tag{1}$$

是开集. 事实上，设$\boldsymbol{y}$是属于它的点，即$|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^0|=\rho<r$，且$\boldsymbol{x}$是任一属于球

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<\varepsilon \qquad (\varepsilon<r-\rho) \tag{2}$$

的点，那么它满足

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^0|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^0|<\varepsilon+\rho<r.$$

这表明，球(2)属于球(1).

请读者证明：开矩形(特别，开立方体)是开集.

两个开集 G_1 与 G_2 的交 G_1G_2 是开集. 事实上，设点 $\boldsymbol{x}^0$ 属于 G_1G_2. 因为 $\boldsymbol{x}^0$ 是 G_1 与 G_2 的内点，那么存在两个中心在 $\boldsymbol{x}^0$ 的开球，第一个属于 G_1，第二个属于 G_2，它们的交显然是一个开球(二者中较小的一个)，且此开球属于 G_1G_2.

易见，有限个或可数个开集的和是开集. 然而可数个开集的交可能不是开的，例如开球 $|x|<\frac{1}{k}(k=1, 2, \cdots)$ 的交是一个点(零点).

包含点 $\boldsymbol{x}^0\in R_n$ 在内的任意一个开集称为点 $\boldsymbol{x}^0$ 的邻域. 显然，$\boldsymbol{x}^0$ 的两个邻域的交仍然是 $\boldsymbol{x}^0$ 的邻域.

说了上面这一些之后，集合 E 的内点的概念还可以这样定义：如果 $\boldsymbol{x}^0$ 有完全属于 E 的邻域，那么 $\boldsymbol{x}^0$ 是 E 的内点. 事实上，如果 $\boldsymbol{x}^0$ 按第一种定义是内点，那么可找到一个中心在 $\boldsymbol{x}^0$ 而属于 E 的开球，但后者是 $\boldsymbol{x}^0$ 的邻域. 反之，如果 $\boldsymbol{x}^0$ 按第二种定义是内点，那么存在 $\boldsymbol{x}^0$ 的属于 E 的邻域，此邻域既然是一个开集，它就包含一个中心在 $\boldsymbol{x}^0$ 的开球.

今后，我们将要掌握许多数学上严格定义的开集的例子，而现在我们只请读者从几何直观上了解：如果任意一个几何体剥去它的边界，那么便得到开集.

在随后的几节我们将研究 n 个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1, \cdots, x_n)$，或者也可以说是在 n 维空间中开集上定义的点 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 的函数.

如果集合 E 的任意两个点 $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ 可以用完全属于 E 的连续曲线连接起来，即如果存在连续的向量函数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$, $0\leqslant t\leqslant1$，使

$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{x}''$, $x(t)\in E$(参看§6.5), 那么就称集合E是连通的.

曲线 $\boldsymbol{x}(t)=t\boldsymbol{x}'+(1-t)\boldsymbol{x}''(t\in[0, 1])$ 称为线段$\overline{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}''}$, 显然, 它是连续的, 且连接了点 $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$.

一个集合, 如果连接它的两个点 $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ 的线段连同这两点在内都属于这个集合, 那么就把这个集合称为凸集(例子参看§7.3.末尾).

附注 1. R_n 中的立方体Δ可以用下列不等式确定:

$$\Delta=\{a_j\leqslant x_j\leqslant b_j;\ \ j=1, \cdots, n\},$$

其中 $2d=b_j-a_j(j=1, \cdots,n)$. 易见, Δ 是 2^n个形如$\{\lambda_j\leqslant x_j\leqslant\mu_j;\ \ j=1,\cdots, n\}$的立方体的和, 这里需要用所有可能的方法取 $\lambda_j=a_j$, $\mu_j=(a_j+b_j)/2$ 或 $\lambda_j=(a_j+b_j)/2$, $\mu_j=b_j$. 也说立方体Δ这样被分成了 2^n 个(边长为 d 的)相等的立方体.

附注 2. 我们所说的 R_n 中的立方体, 在 $n=3$ 时就是通常的(三维)立方体, 它的边平行于坐标轴. n 维立方体的一般定义要求引入坐标的正交变换:

$$x_j-x_j^0=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\xi_k,$$

其中 $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0, \cdots, x_n^0)\in R_n$, a_{jk} 是实数, 且$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}^2=1$, $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=0(i\neq j$, $i, j=1, \cdots, n)$. 例如在适当的(依赖于Δ)坐标的正交变换后, 使点 $x\in R_n$的集合变为形如$\{|\xi_k|\leqslant d, k=1, \cdots, n\}$的集合, 那么前一集合称为 R_n 中的, 中心在 $\boldsymbol{x}^0$, 边长为 $2d$ 的闭立方体.

对 n 维矩形有类似的注解.

§7.2. 函数的极限

作为定义, 如果函数 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1, \cdots, x_n)$定义在点 $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0, \cdots, x_n^0)$的某个邻域上(可能除去 $\boldsymbol{x}^0$ 本身), 并且如果对于在上述邻域中任意趋于 $\boldsymbol{x}^0$ 又异于 $\boldsymbol{x}^0$ 的点列 $\boldsymbol{x}^k$ $(k=1, 2, \cdots)$, 极限

$$\lim_{\substack{|x^k - x^0| \to 0 \\ x^k \neq x^0}} f(x^k) = A \tag{1}$$

存在，就说函数 $f(x)$ 在点 x^0 有极限 A，并记作：

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = \lim_{\substack{x_j \to x_j^0 \\ (j=1,\cdots,n)}} f(x_1, \cdots, x_n) = A, \tag{2}$$

（还可以记作 $f(x) \to A(x \to x^0)$）.

另一个等价的定义是：如果函数 f 定义在点 x^0 的某个邻域上（可能除去 x^0 本身），且对任意 $\varepsilon > 0$ 总可以找到 $\delta > 0$，使得对于所有满足不等式

$$0 < |x - x^0| < \delta \tag{3}$$

的 x 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \tag{4}$$

就说函数 f 在点 x^0 有等于 A 的极限.

定义中不等式(3)可用

$$0 < \sum_{j=1}^{n} |x_j - x_j^0| < \delta \quad (j = 1, \cdots, n)$$

来代替．或者说，对于任意 $\varepsilon > 0$ 可以找到邻域 $U(x^0)$，使得对于所有属于该邻域的 $x \neq x^0$，(4)式成立.

在 n 维的情形中，第一个定义与第二个定义的等价性完全可类似于一维的情形来证明（参看§4.1）.

极限存在的柯西准则（证明同一维的情形一样）叙述如下（参看§4.1的定理5）.

函数 f 在 x^0 点有（有限）极限，当且仅当对于任意的 $\varepsilon > 0$ 总可以找到邻域 $U(x^0)$（特别，可以是中心在 x^0 的立方体或球），使得对于所有异于 x^0 的 $x, x' \in U(x^0)$，成立不等式

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

显然，如果数 A 是 $f(x)$ 在 x^0 的极限，那么 A 是 h 的函数 $f(x^0 + h)$ 在零点的极限：

$$\lim_{h\to 0} f(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{h})=A,$$

反之亦然.

考虑定义在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的邻域(可能除去 $\boldsymbol{x}^0$ 本身)所有点上的函数 f, 设 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ 是任意的单位向量($|\boldsymbol{\omega}|=1$)且 $t\geqslant 0$ 是数量. 形如 $\boldsymbol{x}^0+t\boldsymbol{\omega}(0\leqslant t)$ 的点形成以 $\boldsymbol{x}^0$ 为始点的沿向量 $\boldsymbol{\omega}$ 方向的射线. 对于每个 $\boldsymbol{\omega}$ 可研究数值变量 t 的函数

$$f(\boldsymbol{x}^0+t\boldsymbol{\omega})=f(x_1^0+t\omega_1, \cdots, x_n^0+t\omega_n) \quad (0<t<\delta_\omega),$$

其中 δ_ω 是依赖于 $\boldsymbol{\omega}$ 的数, 这个(单变量 t 的)函数的极限

$$\lim_{t\to 0, t>0} f(\boldsymbol{x}^0+t\boldsymbol{\omega})=\lim_{t\to 0, t>0} f(x_1^0+t\omega_1, \cdots, x_n^0+t\omega_n)$$

如果存在, 自然就称为 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 沿向量 $\boldsymbol{\omega}$ 方向的极限.

特别, 若 $\boldsymbol{\omega}$ 是沿 x_j 轴方向的单位向量 $\boldsymbol{e}^j=(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, 那么可以谈论 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点沿 x_j 轴正半轴方向的极限

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(\boldsymbol{x}^0+t\boldsymbol{e}^j)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(x_1^0, \cdots, x_{j-1}^0, x_j^0+t, x_{j+1}^0, \cdots, x_n^0)$$

或 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点沿 x_j 轴负半轴方向的极限

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(\boldsymbol{x}^0-t\boldsymbol{e}^j)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(x_1^0, \cdots, x_{j-1}^0, x_j^0-t, x_{j+1}^0, \cdots, x_n^0)$$

从函数 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点有等于 A 的极限显然可以推出它在 $\boldsymbol{x}^0$ 点沿任何方向有等于 A 的极限. 但是逆命题不成立——函数 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 沿任何方向有等于 A 的极限, 但同时在 x^0 却可能没有极限.

例 1

1) $f(x, y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;

2) $\varphi(x, y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

函数 f 与 φ 在平面 (x, y) 上, 除去 $(0, 0)$ 外有定义. 我们有

$$|f(x, y)|\leqslant\frac{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}=2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}},$$

由此

$$\lim_{x,y\to 0} f(x,y)=0$$

$\left(\text{对 } \varepsilon>0, \text{假定 } \delta=\frac{\varepsilon}{2}, \text{那么只要} (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}<\delta \text{ 时, 就有} |f(x,y)|<\varepsilon\right)$.

其次，假定 k 为常数，有

$$\varphi(x,kx)=\frac{1-k^2}{1+k^2},$$

由此可见，φ 在 $(0,0)$ 点沿不同方向的极限一般是不同的，所以 φ 在 $(0,\ 0)$ 无极限。

例 2 在平面 (x,y) 上定义螺线 $\rho=\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，其中 ρ 是点的向径，θ 是极角。设 $\psi(x,y)$ 定义如下(图 7.1)：

$\psi(0,\ 0)=1$；当 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\theta>0$ 时，$\psi(x,y)=0$，ψ 在任意连接 $(0,0)$ 点与螺线上点的线段上是线性的。易见，对任何点 $(x,y)\neq(0,0)$，$\lim\limits_{t\to 0}\psi(tx,ty)=1$，即 ψ 在 $(0,\ 0)$ 点沿任何方向存在等于 1 的极限，然而 ψ 在 $(0,\ 0)$ 的极限不存在。因为，如果沿着平面 (x,y) 第一象限内，界于螺线与 x 轴之间的曲线趋于 $(0,0)$ 时，那么沿此曲线 $\psi(x,y)=0$。

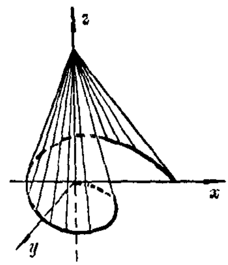

图 7.1

如果函数 f 定义在 $\boldsymbol{x}^0$ 的某个邻域上(可能要除去 $\boldsymbol{x}^0$ 点)，对于任意的$N>0$都可以找到这样的$\delta>0$，使得只要$0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|<\delta$，就有$|f(\boldsymbol{x})|>N$，我们就记为 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0} f(\boldsymbol{x})=\infty$。

还可以讲当 $\boldsymbol{x}\to\infty$时 f 的极限

$$\lim_{x\to\infty} f(\boldsymbol{x})=A. \tag{5}$$

例如当 A 为有限数时，等式(5)可以这样理解：对于任意 $\varepsilon>0$ 都可以指出这样的 $N>0$，对于点 $\boldsymbol{x}$，当$|\boldsymbol{x}|>N$ 时函数 f 有定义且成立不等式$|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon$。

下列等式成立：

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0}(f(\boldsymbol{x})\pm\varphi(\boldsymbol{x}))=\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0} f(\boldsymbol{x})\pm\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0}\varphi(\boldsymbol{x}), \tag{6}$$

$$\lim_{x\to x^0}(f(x)\varphi(x))=\lim_{x\to x^0}f(x)\lim_{x\to x^0}\varphi(x),\tag{7}$$

$$\lim_{x\to x^0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x^0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x^0}\varphi(x)}\left(\lim_{x\to x^0}\varphi(x)\neq 0\right).\tag{8}$$

这里可能 $x^0=\infty$. 同时照例是如果 f 与 φ 的极限存在，那么等式左边(有限的)极限存在. 作为例子，我们证明(7)式.

设 $x^k\to x^0(x^k\neq x^0)$；那么

$$\begin{aligned}\lim_{x^k\to x^0}(f(x^k)\varphi(x^k))&=\lim_{x^k\to x^0}f(x^k)\lim_{x^k\to x^0}\varphi(x^k)\\&=\lim_{x\to x^0}f(x)\lim_{x\to x^0}\varphi(x).\end{aligned}\tag{9}$$

这样一来，(9)式左边的极限存在且等于(9)式的右边，而因为序列 $\{x^k\}$ 是任意的，所以它等于函数 $f(x)\varphi(x)$ 在 x^0 点的极限.

定理 1. 如果函数 f 在 x^0 点有不为零的极限

$$\lim_{x\to x^0}f(x)=A\neq 0,$$

那么存在 $\delta>0$，使得对所有满足不等式

$$0<|x-x^0|<\delta\tag{10}$$

的 x，函数 f 满足不等式

$$|f(x)|>\frac{|A|}{2}.\tag{11}$$

不仅如此，函数 f 在这些点处保持 A 的符号.

事实上，令 $\varepsilon=|A|/2$，存在着 $\delta>0$，使得对于满足不等式(10)的 x 成立

$$|f(x)-A|<|A|/2.\tag{12}$$

所以对这样的x，$|A|/2>|A-f(x)|\geqslant|A|-|f(x)|$，即(11)式成立.

由(12)式，对上述 x 得出

$$A-\frac{|A|}{2}<f(x)<A+\frac{|A|}{2},$$

由此，当 $A>0$ 时 $f(\boldsymbol{x})>A/2$，当 $A<0$ 时 $f(x)<A/2$（保持符号）.

附注 在§7.10将给出在任意集合上给定的函数极限的更一般的定义.

§7.3. 连续函数

作为定义，如果函数 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1, \cdots, x_n)$ 定义在点 $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 的某个邻域内（其中包括点 $\boldsymbol{x}^0$ 本身在内），且它在点 $\boldsymbol{x}^0$ 的极限等于它在 $\boldsymbol{x}^0$ 的值：

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0} f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}^0), \tag{1}$$

就说函数 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处连续.

函数 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处连续的条件可以写成如下等价的形式：

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} f(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}^0), \tag{1'}$$

即如果 $\boldsymbol{h}$ 的函数 $f(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{h})$ 在点 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{0}$ 处连续，那么函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处连续.

对应于增量 $\boldsymbol{h}=(h_1, \cdots, h_n)$，可以引入 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的增量

$$\Delta_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}^0)=f(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}^0),$$

并可用增量的说法定义 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 的连续性：如果

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\Delta_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}^0)=\lim_{h_1,\cdots,h_n\to 0}[f(x_1^0+h_1, \cdots, x_n^0+h_n)-f(x_1^0, \cdots, x_n^0)]=0, \tag{1''}$$

那么函数 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处连续.

由§7.2的公式(6)—(8)直接得出：

定理1 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处连续的函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的和、差、积与商在这一点处也是连续函数，当然，在商的情形需 $\varphi(\boldsymbol{x}^0)\neq 0$.

常数 c 可看作 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 的函数 $f(\boldsymbol{x})=c$. 它对任何 $\boldsymbol{x}$ 都连续，因为

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})=c-c=0\to 0, \quad (\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}).$$

比它复杂一些的是函数 $f_j(\boldsymbol{x})=x_j(j=1, \cdots, n)$，这里指标 j 可取值 $1, \cdots, n$ 中的一个，它(作为 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 的函数!)同样是连续的．实际上，令 $\boldsymbol{h}=(h_1, \cdots, h_n)$，那么

$$|f_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f_j(\boldsymbol{x})|=|(x_j+h_j)-x_j|=|h_j|\leqslant|\boldsymbol{h}|\to 0 \quad (\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}).$$

如果对函数 x_j 与常数作有限次数的加、减和乘法运算，那么得到的函数称为 $\boldsymbol{x}$ 或 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的多项式．根据上述性质，多项式是 R_n(对于所有 $\boldsymbol{x}\in R_n$)上的连续函数．两个多项式的比 P/Q 是有理函数，显然，除去使 $Q(\boldsymbol{x})=0$ 的点 $\boldsymbol{x}$ 之外，它在 R_n 上到处连续．

函数

$$P(\boldsymbol{x})=x_1^3-x_2^3+x_1^2x_3+2x_1^2x_2-3x_3^2+4$$

可作为 (x_1, x_2, x_3) 的三次多项式的例子．

一般地，显然有下述定理：

定理 2 设 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 是在空间 R_m 中的点 $\boldsymbol{x}=(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ 处连续的函数且 $m<n$．

如果把它看作 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 的函数

$$F(x_1, \cdots, x_n)=f(x_1, \cdots, x_m)$$

那么，F 是在任意点 $(x_1^0, \cdots, x_m^0, x_{m+1}^0, \cdots, x_n^0)$ 处，对于 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$(在空间 R_n)连续的函数，这里 $x_{m+1}^0, \cdots, x_n^0$ 是任意的．

事实上，如果 $\boldsymbol{h}=(h_1, \cdots, h_n)$，那么

$$\begin{aligned}\Delta_{\boldsymbol{h}}F(\boldsymbol{x}^0)&=F(x_1^0+h_1, \cdots, x_n^0+h_n)-F(x_1^0, \cdots, x_n^0)\\&=f(x_1^0+h_1, \cdots, x_m^0+h_m)-f(x_1^0, \cdots, x_m^0)\to 0 \quad (\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}).\end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{k}=(k_1, \cdots, k_n)$ 是整非负向量，即它有非负的整分量 $k_j(j=1, \cdots, n)$．如果 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 是 R_n 的点，那么规定如下记号：

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}. \tag{2}$$

这个函数对所有 $\boldsymbol{x}\in R_n$ 连续，因为它是有限个形如 x_j 的因子的乘积，这