2003年考研辅导教材
双博士系列

2003 硕士研究生入学考试 应试教程

数学分册 【经济类】

主　编　北京大学数学科学学院
田茂英　田勇　郭霞
编　写　双博士考研数学课题组
总策划　胡东华

YSJC
YINGSHIJIAOCH

双博士系列
机械工业出版社
China Machine Press

2003年考研辅导教材

硕士研究生入学考试应试教程(数学分册)

[经济类]

主　编　北京大学数学科学学院
　　　　田茂英　田勇　郭霞
编　写　双博士考研数学课题组
总策划　胡东华

机械工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

硕士研究生入学考试应试教程．数学分册：经济类/田茂英等主编．
-北京：机械工业出版社，2002.3
考研辅导教材
ISBN 7-111-09977-X

Ⅰ．硕…　Ⅱ．田…　Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ．H013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 013369 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮编：100037）
责任编辑：何月秋　王春雨　荆宏智　　责任校对：肖　东　林福山
封面设计：胡东华　　责任印制：何全君
北京京丰印刷厂印刷　　机械工业出版社出版发行
2002 年 3 月第 1 版　第 1 次印刷
787mm × 1092mm　1/16　印张 27.5　字数 710 千字
定价：34.00 元

http://www.bbdd.cc

“考研押题讲座”免费授课计划

一、内容：考研政治、英语、数学（一、二、三、四）、西医综合科目考前一个半月押题讲座
二、讲座总策划及献爱心人：胡东华
三、讲座资料提供：

北大、清华、人大考研辅导班资料采编组
京城考研命题信息搜集研究组　联合提供

四、免费讲座时间：2002 年 12 月 1 日—2003 年 1 月 15 日
五、网站：中国教育考试双博士网站：http://www.bbdd.cc
六、课程表：

科目 考研	12 月第 1 周	12 月第 2 周	12 月第 3 周	12 月第 4 周	1 月第 1 周	1 月第 2 周
政治	马克思主义哲学、马克思主义政治经济学	毛泽东思想概论	邓小平理论概论	国际政治、时事政治	网上通知	网上通知
英语	听力	英语知识运用	阅读理解 A（命题趋势）	阅读理解 B（英译汉）	写作命题预测及背诵范文	网上通知
数学一	高数（1～5）	高数（6～11）	线性代数	概率论与数理统计	网上通知	网上通知
数学二	高数（1～3）	高数（4～6）	高数（7～11）	线性代数	网上通知	网上通知
数学三	微积分（1～5）	微积分（6～10）	线性代数	概率论与数理统计	网上通知	网上通知
数学四	微积分（1～5）	微积分（6～10）	线性代数	概率论	网上通知	网上通知
西医综合	生理学 生物化学	病理学	外科学	内科学	网上通知	网上通知

（如有变化，另行通知）

双博士品牌　真爱大奉献

一封郑州某大学学生的来信

双博士：

您好！

收到您的回信十分高兴，您能如此重视一名普通读者的意见，在百忙之中给予回复，并提供赠书，令我这名学管理的学生看到了贵公司完善的管理机制，也看到了“双博士”品牌光辉的前景。

我曾购买了“双博士”的《大学英语精读课文辅导》(3)、(4)册，认为质量很好，因为我在准备 2001 年 6 月份的全国四级考试前没买太多的辅导资料，仅是每天背《辅导》上的知识点，另外又做(看)了双博士的模拟题、真题解析及词汇，而我却考出了 94.5 分的骄人成绩，真应感谢双博士为我们带来了如此上乘的资料。我信赖双博士，也相信考研中借助双博士的力量会取得更好的成绩。所以我在您寄来的书目中挑了一下，如果可以的话，我想得到代号为“RB12”的《考研应试教程(英语分册)》，或者是代号为“B18A”的《研究生入学考试英语词汇备考手册》。两本书中的任何一本，我都相信会给我带来好运！

另外，在如今激烈竞争的市场中，各种图书充斥学生的眼中。作为一名十分喜爱双博士的读者，我想为“双博士”品牌的推广提一些建议。我认为“双博士”应多与各高校进行接洽，赞助高校学生会组织的一些学生活动，以扩大“双博士”品牌的影响力。因为在我担任我们学院的学生会文艺部长期间，所搞的诸如辩论会、演讲赛、征文等活动，几乎都是由电脑、饮料、复读机等企业赞助的，而从未想过由某一品牌图书进行赞助，因此，如果双博士有意扩大影响力的话，填补高校学生活动由图书赞助的空白，同时冠以“双博士”的名称，一定会取得很好的效果。

以上是我个人的一点想法，也许太过幼稚，毕竟我还未踏入社会，有些难处我还没体会到，也希望您不要见笑。

最后，预祝双博士前途无量，事业有成！

李志伟

2001 年 11 月 22 日

给李志伟同学及全国其他大学生的回复

谢谢李志伟同学及全国其他大学生对双博士品牌图书的支持、关心。目前全国在校大学生中，有三分之一的学生在使用本品牌图书，这与广大学生的厚爱是分不开的。因此我们愿意回报广大学生。今后如果全国各高校学生会有什么活动，需要我们赞助，我们愿意全力支持。

具体操作方法：请将举办活动的内容、目的及需要用于奖励图书的数量，写成材料，并盖上学生会公章，以传真方式发来，我们将很快给予答复。

电话：(010)62542436　传真：(010)62622642　联系人：杨丹

最后，祝志伟同学及全国大学生成为祖国栋梁之才！

胡东华

2002 年 1 月

前　　言

本书是依据最新版的硕士研究生入学数学(经济类)考试大纲(数学三、数学四),以及本书编写组对考研命题的研究,在原辅导教材出版基础上作了较大修改而完成的。

本次修订的最大特点是:以例题、自测题为本书主干,去除了基本知识点的重复表达。因为“学数学的最好方法在于做数学”,所以建议读者自己多动手演算或证明这些精选的题目。

第二个特点是将例题按知识点分类为小节,以便于阅读。当然,这与“试题考综合,考多个知识点”的趋势并不矛盾,而且在本书中也多次强调“知识点的综合使用”这一点。

第三个特点是精选了近几年的考研试题进行解析,包括了填空与选择题,这是其他书中都没做过的。

从2002年开始,本书由原科学技术文献出版社改为由机械工业出版社出版,其内容和印装质量都较之上了一个大台阶,故称之为“双博士品牌”。

本书不仅是硕士研究生入学考试应试者的复习用书,也可作为正在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计的经济类院校的本科、大专、电大、夜大的学生参考书,也便于自学者阅读。

同时,本书采用60克特制的防盗版黄色胶版纸印刷,且每印张的价格并不上涨,其直接目的是以广大考生利益为中心,并遏制盗版。

双博士考研数学课题组

2002年3月

目　　录

注：带*篇、章，数四考生不必看。

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限、连续

§1.1　函数

一　函数的定义

对于一个给定集合 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的对应规则，总有一个确定的 y 值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y = y(x)$$

称 x 为自变量，y 为因变量，集合 D 为定义域，变量 y 的取值集合 Y 称为函数的值域，即：$Y = \{f(x) \mid x \in D\}$

理解函数的概念，读者应注意以下两点：

(1) 两个函数相等，当且仅当它们的定义域和对应法则都相同.

(2) 同一个函数可以用不同的字母表示，习惯上我们用 x 表示自变量，但只要是同一个函数就可用不同字母表示自变量，例如 $f(x) = x^2$ 还可表示为 $g(t) = t^2$ 等.

【例 1.1】　判别下列各组函数是否相等

(1) 函数 $f(x) = \frac{x}{x}$ 与 $g(x) = 1$

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{x^2}$，$g(x) = |x|$ 与 $h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

[解题提示]　当且仅当给定的函数，其定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则表示不同的函数.

【解】　(1) 由于 f 的定义域为 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$，而 g 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，故 $f \neq g$.

(2) 由于 f,g,h 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，且对 $\forall\ x \in (-\infty,+\infty)$ 均有 $f(x) = g(x) = h(x) = |x|$，故 $f = g = h$.

二　函数的定义域

函数的定义域是指使函数解析表达式有意义的自变量 x 的变化范围.

求解函数的定义域就是求解使函数表达式中各简单函数有意义的 x 的全体，因此，读者应牢记下列简单函数的定义域：

①$y = \frac{1}{x}$	定义域为	$(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$
②$y = \sqrt[2n]{x}$	定义域为	$[0,+\infty)$
③$y = \log_a x$	定义域为	$(0,+\infty)$
④$y = \tan x$	定义域为	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$
⑤$y = \cot x$	定义域为	$x \neq k\pi, k \in Z$
⑥$y = \arcsin x$(或 $\arccos x$)	定义域为	$\lvert x \rvert \leq 1, [-1,1]$

【例 1.2】 求下列函数的定义域

$$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}\log_{\sqrt[3]{x^2-5}}[\log_2(25-x^2)]$$

【解】 $\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ \sqrt{x-1} \neq 0 \\ \sqrt[3]{x^2-5} > 0 \\ \sqrt[3]{x^2-5} \neq 1 \\ 25-x^2 > 0 \\ \log_2(25-x^2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \neq 1 \\ x^2-5 > 0 \\ x^2-5 \neq 1 \\ 25 > x^2 \\ 25-x^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > \sqrt{5} \text{或} x < -\sqrt{5} \\ x \neq \pm\sqrt{6} \\ -5 < x < 5 \\ -2\sqrt{6} < x < 2\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{5} < x < \sqrt{6} \text{或} \sqrt{6} < x < 2\sqrt{6}$

即定义域为$(\sqrt{5},\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6},2\sqrt{6})$

【例 1.3】 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$,求下列函数定义域

(1)$f(x+1)$ (2)$f(2x)$

【解】 (1)$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow f(x+1) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x+1 \leqslant 1 \\ -1, & 1 < x+1 \leqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -1, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$

故 $D_f:[-1,1]$

(2)$f(2x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant 2x \leqslant 1 \\ -1, & 1 < 2x \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow f(2x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$

故 $D_f:[0,1]$

三 函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义且 D 关于原点对称,如果对于任意 $x \in D$ 恒有

$$f(x) = -f(-x) \quad (\text{或} f(x) = f(-x))$$

则称 $f(x)$ 为奇函数(或 $f(x)$ 为偶函数).

奇偶函数的图像特点:奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称,偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.

奇偶函数的运算性质:奇函数 + 奇函数 = 奇函数　　偶函数 + 偶函数 = 偶函数

奇函数 × 奇函数 = 偶函数　　奇函数 × 偶函数 = 奇函数

【注】 (1) $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若定义域关于原点不对称,则该函数就不是奇函数或偶函数.

【例 1.4】 讨论下列函数的奇偶性

(1) $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} + \operatorname{sgn}(\sin x)$

(2) 设 $f(x)$ 在包含原点的区间上可积,由 $f(x)$ 的奇偶性,讨论函数 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

【解】 (1) $a^x + a^{-x}$ 为偶函数,而 $a^x - a^{-x}$ 为奇函数,从而 $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} + \operatorname{sgn}(\sin x)$ 为奇函数.

(2) 先设 $f(x)$ 为偶函数,则

$$\Phi(-x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令} t=-z} \int_0^x f(-z)\mathrm{d}(-z)$$

$$= -\int_0^x f(-z)\mathrm{d}z = -\int_0^x f(z)\mathrm{d}z = -\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = -\Phi(x)$$

因此,当 $f(x)$ 为偶函数时,$\Phi(x)$ 是奇函数.

同理可证,当 $f(x)$ 为奇函数时,$\Phi(x)$ 是偶函数.

【注】 若$f(x)$连续,则 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.任一个原函数都可写成 $\Phi(x)+c$,c 为任意取定的常数.当 $f(x)$ 为偶函数时,$\Phi(x)$ 是奇函数,但 $\Phi(x)+c(c\neq 0)$ 都不是奇函数.

判别函数奇偶性的常用方法:
(Ⅰ)利用奇偶性的定义;
(Ⅱ)利用奇偶函数的性质.

2. 周期性

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,若存在正数 T,使对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,通常称满足上式的最小正数 T 为函数$f(x)$ 的周期.

【注】 若 T 是函数$f(x)$ 的周期,则

(1) $f(x+kT)=f(x)$ $\quad k$ 为整数.

(2) $f(ax+b)$ 是以$\dfrac{T}{a}$ 为周期的函数,其中 $a\neq 0$,b 为任意实数.

(3) 判别周期性的常用方法是:① 用定义;② 用(1)、(2)运算性质.

【例 1.5】 设对一切实数 x,有 $f(\frac{1}{2}+x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$,求周期函数 $f(x)$ 的周期.

【解】 $f[\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+x)]=\frac{1}{2}+\sqrt{f(\frac{1}{2}+x)-f^2(\frac{1}{2}+x)}$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$

$$=\frac{1}{2}\pm[\frac{1}{2}-f(x)]=f(x),(\text{由题设 } f(x)\geqslant\frac{1}{2})$$

即 $\quad f(1+x)=f(x)$,故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

3. 有界性与无界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义,若对任意的 $M>0$,都存在 $x\in X$,使

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界.

如果对任意的 $M>0$,都存在 $x\in X$,使$|f(x)|>M$,则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

【例 1.6】 指出下面两个函数是否有界?

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$,$a\leqslant x\leqslant 1$,(其中$0<a<1$)

(2) $y=x\cos x$,$x\in(-\infty,+\infty)$

【解】 (1) 因为 $a\leqslant x\leqslant 1$,所以 $a^2\leqslant x^2\leqslant 1$,$\Rightarrow 1\leqslant\dfrac{1}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{a^2}$,$(0<a<1\Rightarrow\dfrac{1}{a^2}>1)$

即 $y=\dfrac{1}{x^2}$,$x\in[a,1]$ 有界.

(2) $\forall M>0$,取 $x=(2[M]+1)\pi$,($[M]$ 表示取 M 的整数部分),则 $\cos x=-1$.

此时$|f(x)|=|(2[M]+1)\pi\cos(2[M]+1)\pi|=(2[M]+1)\pi>M\Rightarrow y=x\cos x$,$x\in(-\infty,+\infty)$ 无界.

【例 1.7】 函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在区间$[\frac{1}{2},1]$ 上为(　　).

(A) 有上界无下界 　　　　(B) 有下界无上界

(C) 有界且 $2\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$ 　　　　(D) 有界且 $\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant -\dfrac{1}{4}$

【解】 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$

$$f'(x)=\frac{x\cdot\frac{1}{x\ln 10}-\lg x}{x^2}=\frac{1}{x^2}(\lg e-\lg x)$$

$\because\ x\in[\frac{1}{2},1],\quad \therefore f'(x)>0$.故 $f(x)$ 单调递增.

因此，$\dfrac{\lg\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{\lg 1}{1}$，即 $2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$，故答案为 C.

4. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有定义，如果对 $\forall\ x_1,x_2\in D,x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或}f(x_1)>f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在区间 D 上是单调递增(或单调递减)的.

【例 1.8】 设 $f(x)\neq 0$ 是连续函数，又

$$F(x)=\int_0^x[x^{2n}-(2n+1)t^{2n}]\cdot f(t)\mathrm{d}t$$

其中 $n\geqslant 1$ 为整数.试根据 $f(x)$ 的单调性讨论 $F(x)$ 的单调性.

［解题提示］ 因为 $F(x)$ 是变上限的积分，且 $f(x)$ 连续，所以可用 $F(x)$ 的导数来讨论.

【解】 $F(x)=x^{2n}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-(2n+1)\int_0^x t^{2n}f(t)\mathrm{d}t$

$$F'(x)=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^{2n}f(x)-(2n+1)x^{2n}f(x)$$

$$=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2nx^{2n}f(x)$$

解法一

$$F'(x)=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2nx^{2n-1}f(x)\int_0^x\mathrm{d}t$$

$$=2nx^{2n-1}\int_0^x[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t$$

(1) 若 $f(x)$ 单调下降，当 $x\geqslant 0$ 时$(0\leqslant t\leqslant x)$，$f(t)-f(x)\geqslant 0$，于是 $F'(x)\geqslant 0$；当 $x<0$ 时$(x\leqslant t\leqslant 0)$

$$F'(x)=2nx^{2n-1}\int_x^0[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t$$

此时，$f(x)-f(t)\geqslant 0$，又 $x^{2n-1}<0$，于是 $F'(x)\leqslant 0$.

因此，若 $f(x)$ 单调下降，则 $F(x)$ 在$[0,+\infty)$上单调上升；在$(-\infty,0]$上单调下降.

(2) 若 $f(x)$ 单调上升，则类似地讨论可得 $F(x)$ 在$[0,+\infty)$上单调下降；在$(-\infty,0]$上单调上升.

解法二 利用积分中值定理.

$$F'(x)=2nx^{2n}f(\xi)-2nx^{2n}f(x)=2nx^{2n}[f(\xi)-f(x)]$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间.

(1) 若 $f(x)$ 单调上升：当 $x>0$ 时，则 $0<\xi<x$，而 $f(\xi)-f(x)\leqslant 0$，于是 $F'(x)\leqslant 0$；当 $x=0$ 时，则 $F'(x)=0$；当 $x<0$ 时，则 $x<\xi<0$，而 $f(\xi)-f(x)\geqslant 0$，于是 $F'(x)\geqslant 0$.

因此，若 $f(x)$ 单调上升，则 $F(x)$ 在$[0,+\infty)$上单调下降；在$(-\infty,0]$上单调上升.

(2) 若 $f(x)$ 单调下降，则类似可得 $F(x)$ 在$[0,+\infty)$上单调上升；在$(-\infty,0]$上单调下降.

判断函数 $f(x)$ 在 X 上单调性的 **常用方法**：
(Ⅰ)用单调性的定义；
(Ⅱ)利用导数 $f'(x)$.
不是所有函数都有单调性，例如狄利克莱函数就没有单调性.

四　其他函数

1. **特殊函数**

(1) 符号函数　$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & 当\ x > 0 \\ 0, & 当\ x = 0 \\ -1, & 当\ x < 0 \end{cases}$

(2) 取整函数 $y = [x]$，y 是不超过 x 的最大整数

(3) 狄利克莱(Dirichlet) 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & 当\ x\ 为有理数时 \\ 0, & 当\ x\ 为无理数时 \end{cases}$$

(4) 分段函数　如果一个函数在其定义域的不同区间段表达式不同,则称为分段函数.

2. **反函数**

设函数 $y = f(x)$ 的值域为 R，如果对于 R 中任一 y 值,由关系式 $y = f(x)$ 可确定惟一的一个 x 值与之对应,则称变量 x 为变量 y 的函数,记为

$$x = \varphi(y)$$

$\varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数,习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

【注】 (1) $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

(2) 只有一一对应的函数才有反函数.

【例 1.9】 求 $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}$ 的反函数.

【解】 由 $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}$,得 $y^3 - 2 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y^3 - 2}$

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时,反函数为 $y = -\sqrt{x^3 - 2}$, $(x \geqslant 2^{\frac{1}{3}})$

当 $x \in [0, +\infty)$ 时,反函数为 $y = \sqrt{x^3 - 2}$, $(x \geqslant 2^{\frac{1}{3}})$

【例 1.10】 设 $y = f(x) = \begin{cases} x + 1, & -\infty < x < 1 \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$，求 $f^{-1}(x)$.

[解题提示] 求 $y = f(x)$ 的反函数只需解关于 x 的方程;求分段函数的反函数,只要分别求出各区间段的反函数及值域即可.

【解】 由 $y = x + 1, -\infty < x < 1 \quad \Rightarrow x = y - 1, -\infty < y < 1$

于是,反函数为: $y = x - 1, -\infty < x < 1$

由 $y = x^2, 1 \leqslant x \leqslant 4 \quad \Rightarrow x = \sqrt{Y}, \quad 1 \leqslant Y \leqslant 16$

于是,反函数为: $y = \sqrt{x}, 1 \leqslant x \leqslant 16$

由 $y = 2^x, 4 < x < +\infty \quad \Rightarrow x = \log_2 y, \quad 16 < y < +\infty$

于是,反函数为: $y = \log_2 y, \quad 16 < y < +\infty$

综上所述, $f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1, & -\infty < x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \leqslant x \leqslant 16 \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty \end{cases}$

3. **复合函数**

设函数 $y = f(u)$ 的定义域与函数 $u = \varphi(x)$ 的值域的交集非空,则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.此时我们称 x 为自变量, u 为中间变量,而 y 称为因变量.

怎样求复合函数? 主要分三种情况:
(Ⅰ) 对于非分段函数常用直接代入的方法;
(Ⅱ) 对于分段函数常用讨论的方法;
(Ⅲ) 图示法(不常用).

【例 1.11】 设 $f_n(x)=\underbrace{f(f\cdots f(x)\cdots)}_{n次}$， 若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$， 求 $f_n(x)$.

【解】 $f_2(x)=f(f(x))=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+2f_2^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

由以上二式可得:$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ 用归纳法证明,证明过程略.

【例 1.12】 设 $f(x)=e^{\arcsin x}$,又 $f[g(x)]=x-1$,求 $g(x)$ 的表达式及定义域.

【解】 由 $f[g(x)]=e^{\arcsin g(x)}=x-1$,解得 $g(x)=\sin[\ln(x-1)]$,又因为

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\ln(x-1)\leqslant\frac{\pi}{2}\text{ 且 }x-1>0,$$

得定义域为
$$\{x\mid 1+e^{-\frac{\pi}{2}}\leqslant x\leqslant 1+e^{\frac{\pi}{2}}\}$$

【例 1.13】 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 1+x, & x\leqslant 0\end{cases}$， $g(x)=\begin{cases}-x^2, & x>0\\ x, & x\leqslant 0\end{cases}$,求 $g[f(x)]$ 及其定义域.

【解】 $g[f(x)]=\begin{cases}-[f(x)]^2, & f(x)>0\\ f(x), & f(x)\leqslant 0\end{cases}$

若 $f(x)>0$,当 $x>0$ 时,则 $f(x)=x>0$,从而 $g[f(x)]=-x^2$;当 $-1<x\leqslant 0$ 时,则 $f(x)=1+x>0$,从而 $g[f(x)]=-(1+x)^2$.

若 $f(x)\leqslant 0$,当 $x\leqslant -1$ 时,则 $f(x)=1+x\leqslant 0$,从而 $g[f(x)]=1+x$.

综合以上得

$$g[f(x)]=\begin{cases}-x^2, & x>0\\ -(1+x)^2, & -1<x\leqslant 0\\ 1+x, & x\leqslant -1\end{cases}$$

【例 1.14】 设 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x<0\\ 2, & x\geqslant 0\end{cases}$,求 $f[f(x)]$.

【解】 令 $f(x)=u$,则 $f(u)=\begin{cases}2+u, & u<0\\ 2, & u\geqslant 0\end{cases}$

(1) 作出 $u=f(x)=\begin{cases}2+x, & x<0\\ 2, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的图像,见图 1.1-1.

(2) 再在图 1.1-1 中作出 $y=f(u)=\begin{cases}2+u, & u<0\\ 2, & u\geqslant 0\end{cases}$ 的分界点 $u=0$ 的图像(u 轴).

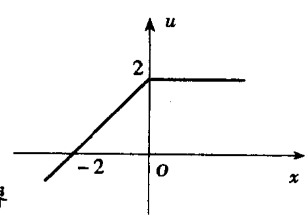


图 1.1-1

(3) 从图中看出:当 $x\leqslant -2$ 时,$u\leqslant 0$;当 $x>-2$ 时,$u>0$.

(4) 将(3)代入 $y=f(u)$ 中,得

$$y=f[f(x)]=\begin{cases}4+x, & x\leqslant -2\\ 2, & x>-2\end{cases}$$

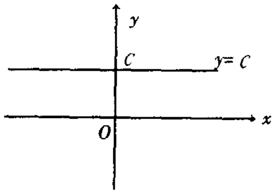
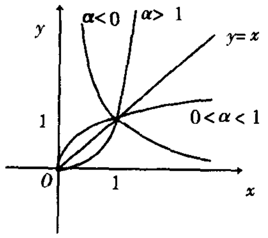
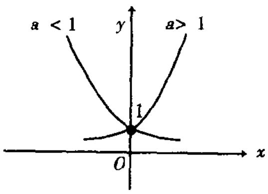
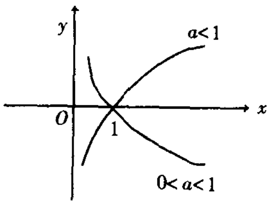
4. **初等函数**

由常数 C 及基本初等函数通过有限次的四则运算及复合运算所得的函数称为初等函数.

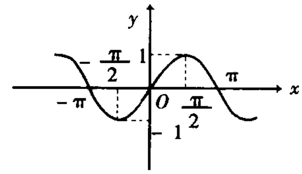
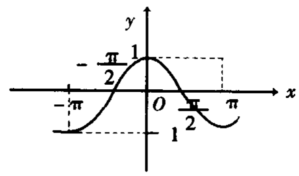
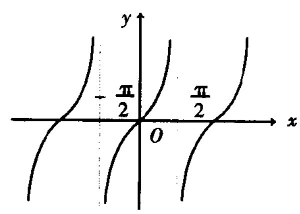
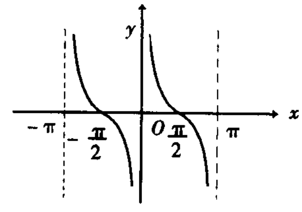
【注】 必须是有限次复合.

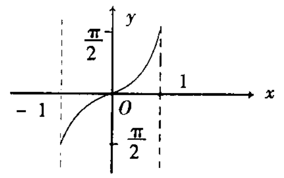
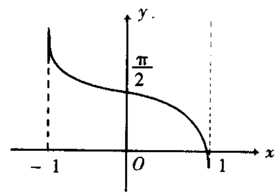
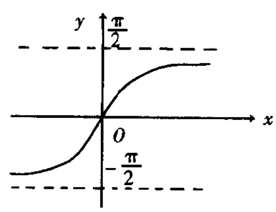
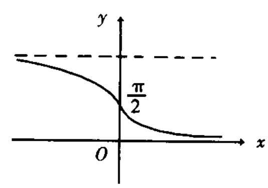
基本初等函数及图例见表 1.1 - 1

表 1.1 - 1　基本初等函数

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x) = C, (-\infty < x < +\infty)$. 平行于 x 轴，过 $(0, C)$ 点的直线	
幂函数	$y = x^a, (0 < x < +\infty, a \neq 0)$ $a > 0$ 时，函数 x^a 在 $(0, +\infty)$ 上严格上升 $a < 0$ 时，函数 x^a 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降 $y = x^a$ 与 $y = x^{\frac{1}{a}}$ 互为反函数	
指数函数	$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ $a > 1$ 时，函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格上升 $a < 1$ 时，函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格下降	
对数函数	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1, 0 < x < +\infty)$ $a > 1$ 时，函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格上升 $a < 1$ 时，函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 互为反函数.（若 $a = \mathrm{e}$，记 $y = \log_e x$ 为 $y = \ln x$）	

(续)

名称	定义式及性质	图例
三角函数	正弦函数　$y = \sin x, (-\infty < x < +\infty)$	
	余弦函数　$y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x), (-\infty < x < +\infty)$	
	正切函数　$y = \tan x (x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$	
	余切函数　$y = \cot x (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$	

名称	定义式及性质	图例
反三角函数	反正弦函数　$y=\arcsin x,\left(-1\leqslant x\leqslant 1,-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$	
	反余弦函数　$y=\arccos x,(-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\pi)$	
	反正切函数　$y=\arctan x,\left(-\infty<x<+\infty,-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$	
	反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x,(-\infty<x<+\infty,0<y<\pi)$	

§ 1.2　函数的极限及其连续性

一　基本概念

1. 数列极限

数 a 是数列$\{x_n\}$的极限，如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 一个正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{记作} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = a$$

2. 函数极限

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 定义为：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 一个 $X > 0$，当 $|x| > x$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 定义为：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 一个 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

3. 左右极限(单侧极限)

左极限：$f_-(x_0) = f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$

定义为：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 一个 $\delta > 0$，当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

右极限：$f_+(x_0) = f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$

定义为：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

4. 无穷小量

在自变量的某一变化过程中，极限为 0 的量，称为无穷小量.

5. 无穷大量

在自变量的某一变化过程中，函数的极限为无穷(包括 $+\infty$，$-\infty$)的量，称为函数的无穷大量.

$$|f(x)| > M$$

【注】　*无穷大量一定是无界变量，反之未必.*

6. 无穷小量与无穷小量的比较

设 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \alpha(x) = 0$，　　$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \beta(x) = 0$

(1) 若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

(2) 若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

(3) 若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$，$(C \neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小.

(4) 若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(5) 若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C$，$(C \neq 0)$，$k > 0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

当 $x \to 0$ 时，常见的等价无穷小的例子有：

$\sin x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$\arctan x \sim x$，$\ln(1 + x) \sim x$，$e^x - 1 \sim x$，$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，$(1 + x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \dfrac{1}{n}x$.

【例 1.15】　设 $f(x) = \sin(\sin^2 x)\cos x$，$g(x) = 3x^2 + 4x^3$，讨论 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 无穷小阶的关系.