三导丛书

线性代数（同济·第三版）

导教·导学·导考

陆全　徐仲　编

- 考试要求
- 重要结论
- 主要解题方法
- 常考题型精解
- 课后习题全解
- 学习效果两级测试

西北工业大学出版社

三导丛书

线性代数

(同济·第三版)

导教·导学·导考

陆全 徐仲 编

西北工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数导教·导学·导考/陆全，徐仲编. —西安：西北工业大学出版社，2001.5(三导丛书)
ISBN 7-5612-1358-1

Ⅰ.线... Ⅱ.陆... Ⅲ.线性代数—高等学校—导教
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 15452 号

出版发行： 西北工业大学出版社
通信地址： 西安市友谊西路 127 号 邮编:710072 电话:029-8493844
网　　址： http://www.nwpup.com
印 刷 者： 西安向阳印刷厂印装
开　　本： 850 mm×1168 mm 1/32
印　　张： 6.5
字　　数： 163 千字
版　　次： 2001 年 6 月 第 1 版 2002 年 2 月 第 2 次印刷
印　　数： 5 001～13 000
定　　价： 9.00 元

前　言

线性代数课程是高等学校普遍开设的一门重要的数学基础课。在全国统一命题的硕士研究生入学数学考试中，线性代数内容占20%左右。其中“数学一”含两小题、两大题，共4题20分；“数学二”含一小题、两大题，约16分；“数学三”和“数学四”均含三小题、两大题，占25分。

线性代数这门课程具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性和工程应用的广泛性。读者在学习线性代数时，往往感到抽象难懂，对基本概念及定理结论在理解上感到困难；对如何把所学内容具体应用到解题上感到缺少思路，难以下手；对于课程结束时的考试和考研的相关内容把握不准，迫切需要得到具体指导与帮助。本书就是为解决这些问题而编写的。

本书按照同济大学数学教研室编的《线性代数》(第三版)的自然章编排，每一章由以下六部分内容构成：

一、考试要求——编写该部分的目的主要是使读者明确本章的重点、常考点以及应掌握的程度。编写中参考了《全国硕士研究生入学统一考试——数学考试大纲》和西北工业大学等国内重点高等学校制订的《线性代数教学大纲》，并将其内容加以细化和归纳，使学生能够正确把握教学、学习和考试的要求。

二、重要结论与公式——本部分将相应章节的内容进行了简明扼要的叙述、归纳和总结，部分内容列表或借助框图直观地进行了说明。对于有些内容未按章节顺序给出，这是由于线性代数的知识前后联系紧密，相互渗透，集中给出有利于加深读者对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

三、主要方法——本部分给出了相应章节一些主要计算过程的描述,以使读者熟悉具体计算步骤,提高动手能力。

四、常考题型及考研典型题精解——精选了线性代数中具有代表性的部分典型例题,通过对典型例题的解题分析,归纳出线性代数中一些问题的解决方法和技巧,使读者可以举一反三、触类旁通。对于那些需要了解更多典型题的读者,可参阅《线性代数典型题分析解集》(第2版)(西北工业大学出版社,2000)。

五、课后习题全解——本部分给出了《线性代数》(同济大学第三版)各章习题的全部解答。由于线性代数中解题方法的多样性,对于具有多种解法或答案的习题,一般只给出一种解法或答案。

六、学习效果两级测试题及答案——本部分根据线性代数课程考试和考研内容,精选了适量的自测题,并附有答案和部分提示。读者可以通过这些测试题进一步掌握解题要领,巩固加深对基本概念的理解,增强解决问题的能力,并检验自己对所学知识掌握的程度。

为了帮助读者了解并适应考试,书末附录中提供了两套线性代数模拟试题及解答。建议读者在动手做过习题后,再参阅答案。

本书各章的一～四、六部分由陆全、徐仲分工合作完成。第五部分由陆全编写,徐仲编写了附录并负责统稿。书中的疏漏和不妥之处,敬请读者指正。

编　者

2001年1月于西北工业大学

目　　录

第一章　行　列　式

行列式是线性代数中的重要工具，在求解线性方程组、求逆矩阵、判断向量组的线性相关性、求矩阵的特征值、判断二次型的正定性等方面都要用到.

行列式的重点是计算，应当在理解 n 阶行列式概念、掌握行列式性质的基础上，熟练正确地计算低阶行列式，也要会计算简单的 n 阶行列式.

一、考试要求

(1) 了解 n 阶行列式的概念，掌握行列式的性质.
(2) 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.
(3) 会用克拉默(Cramer)法则.

二、重要结论与公式

1. 一些特殊行列式的值

(1) 上(下)三角行列式等于其主对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 关于副对角线,其计算公式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(3) 特殊分块三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & * & \cdots & * \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} * & \cdots & * & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

(4) 范德蒙(Vandermonde)行列式

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
x_1{}^2 & x_2{}^2 & \cdots & x_n{}^2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_1{}^{n-1} & x_2{}^{n-1} & \cdots & x_n{}^{n-1}
\end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j) =
$$

$$
\begin{aligned}
(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) &\times \\
(x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2) &\times \\
\cdots \qquad \cdots \quad &\times \\
(x_n - x_{n-1})&
\end{aligned}
$$

2. 行列式的基本性质

性质 1　行列式与其转置行列式的值相等.

性质 2　行列式中某一行(列)如果有公因数 k,则 k 可以提到行列式符号外. 特别地,若行列式中某行(列)元素全是零,则行列式的值为零.

性质 3　对换行列式中某两行(列)的位置,行列式的值改变符号. 特别地,如两行(列)元素对应相等或成比例,则行列式的值是零.

性质 4　如果行列式中某行(列)的每个元素都是两个数的和,则这个行列式可以拆成两个行列式的和,这两个行列式分别以这两组数作为行(列),其余各行(列)与原行列式相同.

性质 5　把行列式某行(列)的 k 倍加至另一行(列),行列式的值不变.(在行列式计算中,往往先用这条性质作恒等变形,以期简化计算.)

3. 行列式按行(列)展开公式

设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,则

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 a_{ij} 的代数余子式.

4. **有关行列式的重要公式**

行列式一行(列)元素与另一行(列)元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \qquad (i \neq j)$$

5. **Cramer 法则**

对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果系数行列式 $D = |a_{ij}| \neq 0$,则方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把 D 中第 j 列换成常数项所得到的行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

三、主 要 方 法

计算行列式的基本方法是：

1. 对行列式通过恒等变形化为上(下)三角行列式，从而直接求得其值.

2. 用按行(列)展开公式使其降阶，但在展开之前往往先通过对行列式恒等变形，使得新的行列式中有较多的零或有公因数，从而可简化计算.

计算行列式的常用技巧有：三角化法，升阶(或加边)法，递推法，数学归纳法等.

四、常考题型及考研典型题精解

例 1－1 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根，则行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \underline{\quad 0 \quad}$.

分析 由于 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根，从而

$$x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$
$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

可见 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$，故

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3 \\ x_1+x_2+x_3 & x_1 & x_2 \\ x_1+x_2+x_3 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = 0$$

例 1－2 已知 $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_2 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_2 & a_6 & a_7 \end{vmatrix}$，$(a_i \neq 0)$，则 $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43} = \underline{\quad 0 \quad}$.

分析 直接求第3列元素的代数余子式 $A_{i3}(i = 1,2,3,4)$ 要计算4个3阶行列式，工作量太大.如利用一列元素与另一列元素的代数余子式乘积之和等于零的性质，即得

$$a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} + a_{42}A_{43} =$$
$$a_2(A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43}) = 0$$

于是由 $a_2 \neq 0$ 知 $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43} = 0$.

例 1－3 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n - m \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} - m & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 - m & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

分析 该行列式具有各行元素之和相等的特点，可将第2,3,…,n 列都加到第1列，则第1列的元素相等，再进一步化简.

解

$D_n =$

$$\begin{vmatrix} x_1+\cdots+x_n-m & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n-m \\ x_1+\cdots+x_n-m & x_2 & \cdots & x_{n-1}-m & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1+\cdots+x_n-m & x_2-m & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1+\cdots+x_n-m & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\vdots \\ r_{n-1}-r_n}]{\substack{r_1-r_n \\ r_2-r_n}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -m \\ 0 & 0 & \cdots & -m & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -m & \cdots & 0 & 0 \\ x_1+\cdots+x_n-m & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-m)^{n-1}(x_1+\cdots+x_n-m)=$$

$$(-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}m^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)$$

例 1—4 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \quad (b_1b_2\cdots b_n \neq 0)$$

分析 该行列式的各行含有共同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，可在保持原行列式值不变的情况下，增加一行一列(称为**升阶法或加边**

法)，适当选择所增行(或列)的元素，使得下一步化减后出现大量的零元素.

解

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \xlongequal[r_{n+1}-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ \vdots}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+\frac{1}{b_n}c_{n+1}]{\substack{c_1+\frac{1}{b_1}c_2 \\ c_1+\frac{1}{b_2}c_3 \\ \vdots}}$$

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} =$$

$$b_1 b_2 \cdots b_n \left(1+\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right)$$

例 1－5　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (n \geqslant 3)$$

分析 该类行列式称为三对角行列式,通常的计算方法是将它按某行(列)展开,得到 D_n 与 D_{n-1} 和 D_{n-2} 的关系,再进一步递推求解或归纳证明.

解

$$D_n \xlongequal{\text{按第 1 行展开}} 2D_{n-1} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2D_{n-1} - D_{n-2}$$

把上面的递推公式改写为

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$$

利用上式继续递推,可得

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = \cdots = D_2 - D_1$$

由于 $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, D_1 = 2$,所以 $D_n - D_{n-1} = 1$. 从而又有

$$D_n = D_{n-1} + 1 = (D_{n-2} + 1) + 1 =$$
$$D_{n-2} + 2 = \cdots = D_1 + (n-1) = n + 1$$

例 1—6 设 $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$. 若 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的零点,则 $f(x)$ 是零多项式.

分析 $f(x)$ 中有 $n+1$ 个系数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 要确定. 若 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的零点 $a_i (i = 1, 2, \cdots, n+1)$,则由 $f(a_i) = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n+1)$ 得到了含 $n+1$ 个未知数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 和 $n+1$ 个方程