高等学校专科试用教材

高等数学 下册

盛祥耀 编

高等教育出版社

高等学校专科试用教材

高 等 数 学

下 册

盛祥耀 编

本书分上下两册，上册内容为空间解析几何、函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用. 下册内容为多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程.

本书每节后配备一定数量的习题，每章后有总习题，并附有习题答案，书末还附有数学史料.

本书内容取舍适宜，详略得当，说理浅显，便于教学. 为适应不同学生和不同专业的需要，下册适量配置了一些用 * 号表示的内容，以供选学或自学.

本书可作为大学专科和高等专科学校各专业的试用教材，也可供工程技术人员阅读.

责任编辑 丁鹤龄

高等学校专科试用教材

高等数学

（专科各专业）

下 册

盛祥耀 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.625 字数 207 000

1987 年 8 月第 1 版 1987 年 8 月第 1 次印刷

印数 00 001— 7,100

ISBN 7-04-000032-6/O·16

书号 13010·01431 定价 1.75 元

目　录

第八章　多元函数及其微分法

§1. 多元函数概念　二元函数的极限和连续

I. 多元函数概念

上册介绍了只有一个自变量的函数，称为一元函数. 现在把一元函数的概念推广到具有多个自变量(多元)的情形，为此先介绍点集.

一个实数 x 对应于数轴上一个点；一个二元有序数组(x, y)对应于平面上一个点；一个三元有序数组(x, y, z)对应于空间内一个点. 在此借用“点”这个几何术语，我们把一个 n 元有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$也称之为一个点. n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的集合称为点集.

所有 n 元有序数组的集合称为 n 维空间，用 R_n 表示. 当$n=1$时，R_1 是一维空间，即数轴上所有点的集合；当 $n=2$ 时，R_2 是二维空间，即平面上所有点的集合；当 $n=3$ 时，R_3 是三维空间，即空间内所有点的集合.

例如点集

$$A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}\subset R_2,$$

它表示以原点为圆心，半径为 1 的圆的内部所有点的集合(不包括圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点). 点集

$$B=\{(x,y)\,|\,x>0, y>0\}\subset R_2,$$

它表示平面上第一象限内所有点的集合 (不包括 x 轴、y 轴上的点)，点集

$$C=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}\subset R_3,$$

它表示以原点为球心，R 为半径的球（包括球面）上所有点的集合.

定义一 设有点 $P_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，点 $P_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 则

$$\boxed{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}} \qquad ①$$

称为两点 P_1 与 P_2 之间的距离. 当 $n=2$ 时，就是平面内两点之间的距离，当 $n=3$ 时，就是空间内两点之间的距离.

下面我们把一元函数概念推广到二元的情形.

定义二 设有一个非空点集 $D\subset R_2$. 如果有一个对应规则f，使每一个点 $(x,\ y)\in D$ 都对应一个实数 z，则称 f 是 D 上的二元函数.

D 称为函数的定义域，点(x,y)所对应的函数值记作

$$z=f(x,y),$$

$x,\ y$ 称为自变量，z 称为因变量. 在(x_0,y_0) 处的函数值记为 $f(x_0,y_0)$或 $f(x,y)\big|_{(x_0,y_0)}$.

为了今后研究时方便，习惯上把 $z=f(x,\ y)$也叫做函数.

一般地讲二元函数的几何意义表示一个曲面(图 8.1).

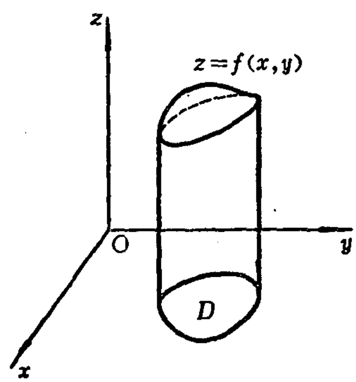

图 8.1

依此可以定义三元函数，四元函数，五元函数，$\cdots$，n 元函数. 它们分别记作 $w=f(x,y,z)$，$w=f(x,y,z,t)$，$\cdots$.

例 1 求函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的定义域.

解 显然定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}.$$

在平面直角坐标系中，它表示原点为圆心，半径为R的圆内及边界圆周上所有点的平面区域(图 8.2)。

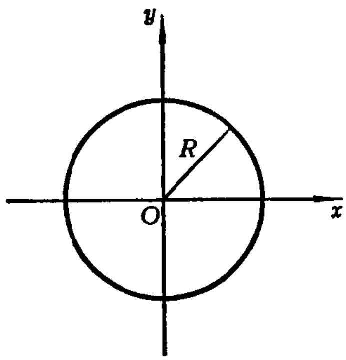

图 8.2

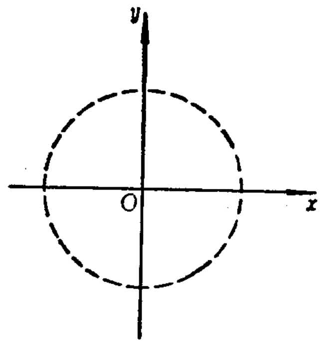

图 8.3

例 2 求函数 $z=\ln(1-x^2-y^2)$ 的定义域.

解 显然定义域

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$$

在平面直角坐标系中，它表示原点为圆心，半径为 1 的圆内(不包括圆周上的点) 的所有点的平面区域(图 8.3). 这里再介绍以后常用的两个名词: 包括全部边界的平面区域叫做闭域; 不包括边界上任何一点的平面区域叫做开域. 例如

$$x^2+y^2\leqslant R^2$$

是闭域，而 $x^2+y^2<1$ 则是开域.

定义三 以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为圆心，$\delta>0$ 为半径的开域叫做点 P_0 的 δ 邻域(图 8.4). 如用不等式表示，即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta.$$

或

$$|PP_0|<\delta,$$

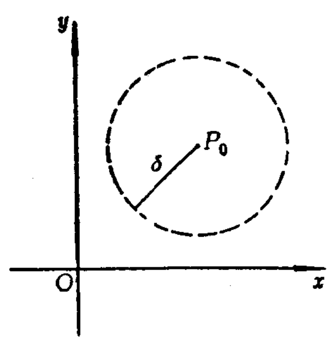

图 8.4

其中$|PP_0|$是P与P_0之间的距离.

除去点P_0的δ邻域,可表示为

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta.$$

或

$$0<|PP_0|<\delta.$$

II. 二元函数的极限和连续

二元函数$z=f(x,y)$的极限定义与一元函数类似.

定义四 设有常数A,如果对于任意给定的正数ε,总存在一个正数δ,当

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

或

$$0<|PP_0|<\delta$$

时,不等式

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,则称当点$P(x,y)$趋向点$P_0(x_0,y_0)$时,函数$f(x,y)$以A为极限. 记作

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad \text{或} \quad \lim_{P\to P_0} f(P)=A} \qquad ②$$

注意 从形式上看,二元函数的极限定义与一元函数的极限定义没有什么区别,但从实质上看,二元函数的极限要比一元函数的极限复杂得多. 对于一元函数,如果x从左侧趋向x_0与从右侧趋向x_0的极限存在且相等,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在. 其逆亦真. 对二元函数,若点$P$沿平行$x$轴趋向$P_0$与沿平行$y$轴趋向$P_0$的极限存在且相等,还不能保证$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$存在. 例如函数

$$z=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

当点P沿x轴而趋向于原点时，即当$y=0$而$x\to 0$时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} 0=0,$$

当点P沿y轴而趋向于原点时，即当$x=0$而$y\to 0$时，

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} f(0,y)=\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} 0=0.$$

它们的极限存在且相等(均为0)．但当$P(x,y)\to O(0,0)$时，函数$f(x,y)$的极限却不存在．事实上，当$x=y\neq 0$时，$z=\frac{1}{2}$. 当$x=0$，$y\neq 0$时，$z=0$. 这就是说，在原点的任何一个邻域内（不管这邻域取多么小），总存在使函数z的值为$\frac{1}{2}$与为0的点，而$\frac{1}{2}$与0是不能同时与任何一个常数A相差任意小的，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$$

不存在.

二元函数的极限

$$\lim_{P\to P_0} f(P)$$

存在，具体地讲就是：点P以各种可能的方式趋向于P_0时，函数$f(x,y)$的极限不仅都要存在，而且都要相等.

下面举一个极限存在的例子.

例3　证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0$.

证　因为

$$0\leqslant\left|\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=|x|\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x|$$

(x,y不同时为零).

而

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{2}|x|=0.$$

应用夹逼定理，证得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0.$$

有了极限定义之后，函数的连续性定义就容易了，它类似于一元函数的连续性定义

定义五 如果(1)函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0, y_0)的一个邻域内有定义；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$存在；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处连续.

连续定义也可以用增量形式表示，令

$$\boxed{\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)} \qquad ③$$

称为函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处的全增量. 记 $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$，则定义中

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

相当于

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0,$$

即

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\Delta z=0.$$

所以与上面连续定义等价的另一个定义是：

定义六 若函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的一个邻域内有定义，如果

$$\boxed{\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=0} \qquad ④$$

则称函数$f(x,y)$在点(x_0, y_0)处连续.

若函数$f(x,y)$在域D上点点连续，则函数$z=f(x,y)$在域D上连续

下面我们叙述一下有关连续函数的一些性质(不证).

定理 (最大值和最小值定理) 如果函数$f(x,y)$在有界闭域D上连续,则

(1) 在D上至少存在一点(ξ_1,η_1),恒有

$$f(x,y)\leqslant f(\xi_1,\eta_1) \quad ((x,y)\in D).$$

(2) 在D上至少存在一点(ξ_2,η_2),恒有

$$f(x,y)\geqslant f(\xi_2,\eta_2) \quad ((x,y)\in D).$$

$f(\xi_1,\eta_1)$，$f(\xi_2,\eta_2)$分别叫做函数$z=f(x,y)$在域D上的最大值和最小值.

所谓有界域D是指：总存在一个圆,使D在圆内.

§1. 习 题

1. 试把三角形的面积S表示为其三边x,y,z的函数.
2. 将圆弧所对弦长l表示为(i)半径r与圆心角φ的函数;(ii)半径r为圆心到弦的距离d的函数(圆弧所对的圆心角不超过π弧度).
3. 质量为M的质点在空间的位置是(a,b,c)，质量为m的质点在空间的位置是(x,y,z),将质点M所受的引力在三个坐标上的投影P_x,P_y,P_z表示为x,y,z的函数.
4. 试证：函数$z=F(x,y)=\ln x\ln y$满足函数方程
$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$
5. 若$f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}-2xy$. 求证$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$.

6. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

试求 $f(x,0)$，$f(0,y)$.

7. 求函数 $z=\sqrt{4x^2+y^2-1}$ 的定义域.

8. 求函数 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$ 的定义域.

9. 求函数 $z=\ln(y^2-4x+8)$ 的定义域.

§ 2. 偏导数　高阶偏导数

I. 偏导数

多元函数的偏导数是指对一个自变量求导数，而其它自变量都保持不变. 所以偏导数也是一元函数的导数. 所谓“偏”是指对其中一个自变量而言. 下面我们来定义偏导数.

当自变量 y 保持为 y_0 时，函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的增量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

称为对 x 的偏增量. 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x 的偏导数，记作

$$z'_x(x_0,y_0)\quad 或\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

同样，可以定义对 y 的偏导数.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

同样，可以把偏导数概念推广到 n 元函数 $w=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 如

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\Delta x_1}} \qquad ⑤$$

其余类推.

注意 不能把偏导数的记号$\frac{\partial z}{\partial x}$或$\frac{\partial z}{\partial y}$理解为$\partial z$与$\partial x$，或$\partial z$与$\partial y$之商. 只能看成是一种记号，它与一元函数的导数记号$\frac{dy}{dx}$可以看成两个微分dy与dx之商不同.

显然，根据偏导数的定义，求偏导数用不着建立新的运算方法，只需注意求偏导数时是对哪一个自变量，而其余则看成常量.

例1 求函数$z=x\sin y$在点$\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$处的两个偏导数.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sin y,\ 则\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\frac{\pi}{4})}=\sin y\Big|_{(1,\frac{\pi}{4})}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos y,则\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\frac{\pi}{4})}=x\cos y\Big|_{(1,\frac{\pi}{4})}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例2 求函数$z=x^y$的$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 对x求偏导数时，y看作常数，则z是幂函数；对y求偏导数时，x看作常数，则z是指数函数. 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x.$$

例3 设关系式$PV=RT$(R为常量)，试证

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证 对于$P=R\cdot\frac{T}{V}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial V}=RT\cdot\frac{-1}{V^2}.$$

对于 $V=R\dfrac{T}{P}$，则

$$\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P}.$$

对于 $T=\dfrac{1}{R}PV$，则

$$\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{1}{R}V.$$

三式相乘，得

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{-RT}{V^2}\cdot\frac{R}{P}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{PV}=-1.$$

这个例子进一步说明了不能把偏导数记号$\dfrac{\partial z}{\partial x}$或$\dfrac{\partial z}{\partial y}$看成 ∂z 与 ∂x 或 ∂z 与 ∂y 之商.

例 4 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的各偏导数.

解

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}.$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{r}.$$

例 4 中的函数当 x 与 y 对换时，函数形式不变，同样 y 与 z 对换，x 与 z 对换函数形式也不变. 函数的这种特点称为函数具有对称性. 对这种函数，在求出 $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ 后，把其中 x 与 y 对换即得$\dfrac{\partial r}{\partial y}$，把 y 与 z 对换即得 $\dfrac{\partial r}{\partial z}$.

II. 二元函数的偏导数的几何意义

偏导数实质上就是一元函数 $z=f(x,\ y_0)$或 $z=f(x_0,\ y)$的导

数(x_0或y_0是常数)，而导数的几何意义是曲线的切线的斜率，所以偏导数的几何意义也是切线的斜率，如$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$是曲线

$$\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=y_0 \end{cases}$$

在(x_0,y_0)所对应的点处的切线斜率，如图 8.5.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\operatorname{tg}\alpha.$$

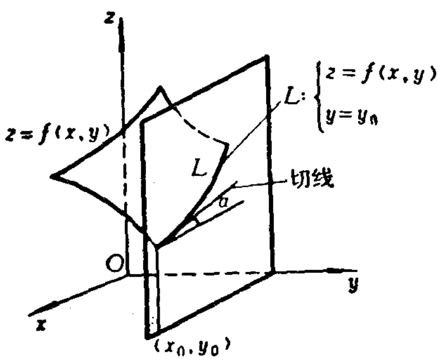

图 8.5

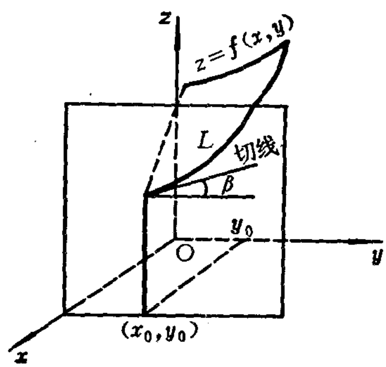

图 8.6

由图 8.6

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\operatorname{tg}\beta.$$

III. 高阶偏导数

若二元函数 $z=f(x,y)$ 在域 D 内偏导数存在，则$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$在域 D 内仍是 x,y 的函数，对这两个函数再求偏导数(如果存在的话)，则称它们是 $f(x,y)$ 的二阶偏导数. 这样的二阶偏导数共有四个: