数学分析习题集题解

曹 敏 谦

上海交通大学数学教研组

本解答系根据李荣涑译 Б.Л.吉米多维奇普“数学分析习题集”（修订本）而作。第13分册是本书的最后一册，内容包括第八章的§11 §17。

目　录

第八章（续）重积分和曲线积分

第八章(续)　重积分和曲线积分

§ 11. 曲线积分

1° 第一型的曲线积分

若 $f(x,y,z)$ 在平滑曲线 C

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T)\qquad (1)$$

的各点上有定义并且是连续的函数，ds 为弧的微分，则

$$\int_C f(x,y,z)ds$$

$$=\int_{t_0}^{T} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt。$$

这个积分的特性在于它与曲线C的方向无关。

2° 第一型曲线积分在力学方面的应用

若 $\rho=\rho(x,y,z)$为曲线 C 在流动点(x,y,z)的线密度，则曲线C的质量等于

$$M=\int_C\rho(x,y,z)ds。$$

此曲线的重心坐标(x_0,y_0,z_0)由下面的公式来表示

$$x_0=\frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y,z)ds,$$

$$y_0=\frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y,z)ds,$$

$$z_0=\frac{1}{M}\int_C z\rho(x,y,z)ds。$$

3° 第二型的曲线积分

若函数 $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$

在曲线(1)上的各点上是连续的，这曲线的方向是使参数 t 增加的方向，则

$$\int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_{t_0}^{T}\Big\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]$$

$$y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\Big\}dt。\qquad (2)$$

当曲线 C 环行的方向变更时此积分的符号也变更。在力学上，积分(2)是当其作用点描绘出曲线 C 时变力 $\{P, Q, R\}$ 所作的功。

4° 全微分的情形 若

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=du,$$

式中 $u=u(x,y,z)$ 为域 V 内的单值函数，则与完全位于域 V 内的曲线 C 的形状无关，而有

$$\int_C Pdx+Qdy+Rdz=u(x_2,y_2,z_2)-u(x_1,y_1z_1),$$

式中 (x_1,y_1,z_1) 为路径的始点，(x_2,y_2,z_2) 为路径的终点。最简单的情况是域 V 是单联通的而函数 P，Q，R 有连续的一级偏导函数，对于此事的充分而且必要的条件为：在域 V 内，下列条件恒满足：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}。$$

这时，函数 u 可按下面的公式来求得

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)dy$$

$$+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)dz,$$

其中 (x_0,y_0,z_0) 为域 V 内某一固定的点。

在力学上这个情况对应于位力所作的功。

计算下列第一型的曲线积分（4221-4230 题）：

4221. $\int_C (x+y)ds$，其中 C 为以 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$ 为顶点的三角形围线。

解：
$$\int_C (x+y)ds = \int_{OA}(x+y)ds + \int_{OB}(x+y)ds + \int_{BA}(x+y)ds。$$

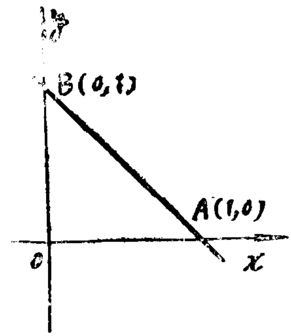

图 4221 题

在线段 OA 上，$y=0$，$ds=dx$，故得
$$\int_{OA}(x+y)ds=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}。$$

在线段 OB 上，$x=0$，$ds=dy$，故得
$$\int_{OB}(x+y)ds=\int_0^1 y\,dy=\frac{1}{2}。$$

在线段 BA 上，$y=1-x$，$ds=\sqrt{2}\,dx$，故得
$$\int_{BA}(x+y)ds=\int_0^1 1\cdot\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}。$$

由此得
$$\int_C (x+y)ds=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}。$$

4222. $\int_C y^2 ds$，其中 C 为摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $[0\leqslant t\leqslant 2\pi]$ 的一拱。

解：由 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$得
$dx=a(1-\cos t)dt$，$dy=a\,\mathrm{siu}\,t\,dt$。

故

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{2(1-\cos t)}\,a\,dt$$
$$=2a\sin\frac{t}{2}dt\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)。$$

由此得

$$\int_C y^2\,ds=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$$
$$=8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt=16a\int_0^{\pi}\sin^5 u\,du$$
$$=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\,du$$
$$=32a^3\cdot\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{256a^3}{15}。$$

4223. $\int_C(x^2+y^2)ds$，其中 C 为曲线
$x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$
$[0\leqslant t\leqslant 2\pi]$。

解：由 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$ 得
$x^2+y^2=a^2(1+t^2)$，
$dx=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)dt=at\cos t\,dt$，
$dy=at\sin t\,dt$。

故

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=at\,dt。$$

由此得

$$\int_C(x^2+y^2)ds=\int_0^{2\pi}a^2(1+t^2)\cdot at\,dt$$

$$=a^3\int_0^{2\pi}(t+t^3)dt=a^3\left[\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right]_0^{2\pi}$$

$$=2\pi^2a^3(1+2\pi^2)。$$

4224. $\int_C xy\,ds$，其中 C 为双曲线 $x=a\,\mathrm{ch}\,t$，$y=a\,\mathrm{sh}\,t$ $[0\leqslant t\leqslant t_0]$的弧。

解：由$x=a\,\mathrm{ch}\,t$，$y=a\,\mathrm{sh}\,t$ 得

$$dx=a\,\mathrm{sh}\,t\,dt，\ dy=a\,\mathrm{ch}\,t\,dt。$$

故

$$ds=a\sqrt{\mathrm{sh}^2t+\mathrm{ch}^2t}\,dt=a\sqrt{\mathrm{ch}\,2t}\,dt。$$

由此得

$$\int_C xy\,ds=a^3\int_0^{t_0}\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{sh}\,t\sqrt{\mathrm{ch}\,2t}\,dt$$

$$=\frac{a^3}{2}\int_0^{t_0}\mathrm{sh}\,2t\sqrt{\mathrm{ch}\,2t}\,dt=\frac{a^3}{6}\left[\mathrm{ch}^{\frac{3}{2}}2t\right]_0^{t_0}$$

$$=\frac{a^3}{6}\left(\mathrm{ch}^{\frac{3}{2}}t_0-1\right)。$$

4225. $\int_C\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)ds$，其中$C$为内摆线

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$的弧。

解：内摆线的参数方程为

$$x=a\cos^3t，\ y=a\sin^3t。$$

故

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=3a\,|\sin t\cos t|\,dt$$

$$=\frac{3a}{2}|\sin 2t|\,dt。$$

由此得

$$\int_C\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)ds=\int_0^{2\pi}a^{\frac{4}{3}}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)$$

$$\cdot\frac{3a}{2}|\sin 2t|\,dt$$

$$=\frac{3a^{\frac{7}{3}}}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t+\sin^4 t)|\sin 2t|\,dt$$

$$=6a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t+\sin^4 t)\sin 2t\,dt$$

$$=6a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2t\right)\sin 2t\,dt$$

$$=6a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2t\right)\sin 2t\,dt$$

$$=6a^{\frac{7}{3}}\left[-\frac{1}{4}\cos 2t-\frac{1}{12}\cos^3 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=6a^{\frac{7}{3}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)=4a^{\frac{7}{3}}。$$

4226. $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$，其中 C 为由曲线，$r=a$，$\varphi=0$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$（r 和 φ 为极坐标）所围的凸曲线。

解：$\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds=\int_{OA}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds+\int_{AB}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$
$+\int_{OB}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$。

在线段 OA 上，$\sqrt{x^2+y^2}=x$，$ds=dx$，
故得

$$\int_{OA}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds=\int_0^a e^x\,dx=e^a-1。$$

在圆弧 AB 上，$\sqrt{x^2+y^2}=r=a$，$ds=a\,d\varphi$，故得

$$\int_{AB} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\cdot a\,d\varphi=\frac{\pi}{4}ae^a。$$

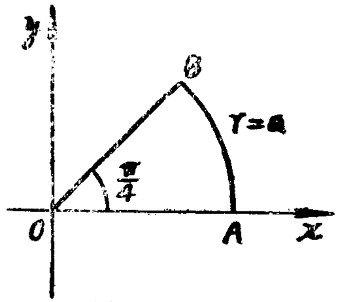

图 4226 题

在线段 OB 上，$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}\,x$，$ds=\sqrt{2}\,dx$，故得

$$\int_{OB} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}\,x}\cdot\sqrt{2}\,dx$$

$$=e^{\sqrt{2}\,x}\Big|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}=e^a-1。$$

由此得

$$\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a。$$

4227. $\int_C |y|\,ds$，其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的弧。

解：双纽线的极坐标方程为

$$r^2=a^2\cos 2\varphi。$$

用隐函数求导得

$$rr'=-a^2\sin 2\varphi，\quad r'=-\frac{a^2\sin 2\varphi}{r}。$$

故

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=\sqrt{r^2+\frac{a^4\sin^2 2\varphi}{r^2}}\,d\theta=\frac{a^2}{r}d\varphi。$$

由此得

$$\int_C |y|\,ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\varphi\cdot\frac{a^2}{r}\,d\varphi$$

$$= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\,d\varphi = (4-2\sqrt{2})a^2。$$

4228. $\int_C x\,ds$，其中 C 为对数螺线 $r=ae^{k\varphi}(k>0)$在圆 $r=a$ 内的部分。

解：由 $r=ae^{k\varphi}$ 得

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=a\sqrt{1+k^2}\,e^{k\varphi}\,d\varphi,$$

故得

$$\int_C x\,ds=\int_{-\infty}^0 r\cos\varphi\cdot a\sqrt{1+k^2}\,e^{k\varphi}\,d\varphi$$

$$=a^2\sqrt{1+k^2}\int_{-\infty}^0 e^{2k\varphi}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$=a^2\sqrt{1+k^2}\lim_{\lambda\to-\infty}\left[\frac{e^{2k\varphi}(2k\cos\varphi+\sin\varphi)}{1+4k^2}\right]_\lambda^0$$

$$=\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}。$$

4229. $\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ax$。

解：圆周 C 的极坐标方程为 $r=a\cos\varphi$。

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=a\,d\varphi,$$

故得

$$\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cdot a\,d\varphi=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=2a^2。$$

4230. $\int_C\frac{ds}{y^2}$，其中 C 为悬链线 $y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$。

解：由 $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ 得

$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}dx=\mathrm{ch}\frac{x}{a}dx。$$

故得

$$\int_C\frac{ds}{y^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}\cdot\mathrm{ch}\frac{x}{a}dx$$

$$=\frac{2}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}$$

$$=\frac{4}{a^2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{a}}dx}{e^{\frac{2x}{a}}+1}=\frac{4}{a}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(e^{\frac{x}{a}}\right)}{e^{\frac{2x}{a}}+1}$$

$$=\frac{4}{a}\mathrm{arc\,tg}\,e^{\frac{x}{a}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\pi}{a}-\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{a}。$$

求下列空间曲线的弧长(参数是正的)(4231-4236题)：

4231. $x=3t$，$y=3t^2$，$z=2t^3$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$。

解：由 $x=3t$，$y=3t^2$，$z=2t^3$ 得

$$x'(t)=3,\quad y'(t)=6t,\quad z'(t)=6t^2。$$

故得

$$s=\int_0^1\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$

$$=3\int_0^1\sqrt{1+4t^2+4t^4}\,dt=3\int_0^1(1+2t^2)dt$$

$$=3\left[1+\frac{2}{3}\right]=5。$$

4232. $x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$，$z=e^{-t}$，当 $0<t<+\infty$。

解： 由 $x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$，$z=e^{-t}$ 得

$$x'(t)=-e^{-t}(\cos t+\sin t),$$
$$y'(t)=e^{-t}(\cos t-\sin t),$$
$$z'(t)=-e^{-t}。$$

故得

$$s=\int_0^{+\infty}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$
$$=\sqrt{3}\int_0^{+\infty}e^{-t}\,dt=\sqrt{3}。$$

4233. $y=a\arcsin\frac{x}{a}$，$z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$。

解： 由 $y=a\arcsin\frac{x}{a}$，$z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ 得

$$y'(x)=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad z'(x)=-\frac{a}{4}\left[\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right]$$
$$=-\frac{a^2}{2(a^2-x^2)}。$$

故得

$$ds=\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\,dx$$
$$=\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2-x^2}+\frac{a^4}{4(a^2-x^2)^2}}\,dx$$
$$=\left[1+\frac{a^2}{2(a^2-x^2)}\right]dx=[1-z'(x)]dx。$$

当 $0\leqslant x_0<a$ 时，

$$s=\int_0^{x_0}[1-z'(x)]dx=x_0-z(x_0)=x_0-z_0;$$

当 $-a<x_0<0$ 时，

$$s=\int_{x_0}^{0}[1-z'(x)]dx=z(x_0)-x_0=z_0-x_0\text{。}$$

合并以上结果得

$s=|x_0-z_0|$。

又因为当 $x_0\geqslant 0$ 时，$z_0=z(x_0)\leqslant 0$，

当 $x_0<0$ 时，$z_0=z(x_0)>0$，

故得

$$s=|x_0-z_0|=|x_0|+|z_0|\text{。}$$

4234. $(x-y)^2=a(x+y)$，$x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$。

解：由对称性不妨设 $z_0>0$。

又由已给方程知 $x+y\geqslant 0$，$x^2-y^2\geqslant 0$ 得 $x+y\geqslant 0$，$x-y\geqslant 0$，因而也有 $x\geqslant|y|$。

将$(x-y)^2=a(x+y)$两边微分得

$2(x-y)(dx-dy)=a(dx+dy)$，

即

$$[2(x-y)-a]dx-[2(x-y)+a]dy=0\text{。}\qquad(1)$$

再将 $x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ 两边微分得

$$8x\,dx-8y\,dy-9z\,dz=0\text{。}\qquad(2)$$

由(1)(2)两式得

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix}-2(x-y)-a & 0\\ -8y & -9z\end{vmatrix}}=\frac{dy}{\begin{vmatrix}0 & 2(x-y)-a\\ -9z & 8x\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{dz}{\begin{vmatrix}2(x-y)-a & -2(x-y)-a\\ 8x & -8y\end{vmatrix}},$$

即

$$\frac{dx}{18z(x-y)+9az}=\frac{dy}{18z(x-y)-9az}$$

$$=\frac{dz}{8ay-16y(x-y)+16x(x-y)+8ax}$$

$$=\frac{dz}{16(x-y)^2+8a(x+y)}=\frac{dz}{24a(x+y)}$$

$$=\frac{ds}{\sqrt{81z^2[(2x-2y+a)^2+(2x-2y-a)^2]+576a^2(x+y)^2}}$$

$$=\frac{ds}{\sqrt{162z^2[4(x-y)^2+4(x-y)a+a^2]}}$$

$$=\frac{ds}{9\sqrt{2}\,z[2(x-y)+a]},$$

故得

$$ds=\frac{9\sqrt{2}\,z\,[2(x-y)+a]}{24a(x+y)}dz$$

$$=\frac{3z}{4\sqrt{2}\,a}\,\frac{2(x-y)+a}{x+y}dz。$$

由于

$$(x-y)^3=a(x+y)(x-y)=\frac{9a}{8}z^2,$$

故

$$x-y=\frac{1}{2}(9az^2)^{\frac{1}{3}}。$$

又因

$$\frac{x-y}{x+y}=\frac{a}{x-y}=\frac{2a}{(9az^2)^{\frac{1}{3}}},$$

以及

$$x+y=\frac{1}{a}(x-y)^2=\frac{1}{4a}(9az^2)^{\frac{2}{3}},$$

由此得

$$s=\frac{3}{4\sqrt{2}\,a}\int_0^{z_0}\frac{[2(x-y)+a]z}{x+y}dz$$

$$=\frac{3}{4\sqrt{2}\,a}\left[\frac{4a}{(9a)^{\frac{1}{3}}}\int_0^{z_0}z^{\frac{1}{3}}dz\right.$$

$$\left.+\frac{4a^2}{(9a)^{\frac{2}{3}}}\int_0^{z_0}z^{-\frac{1}{3}}dz\right]$$

$$=\frac{3}{4\sqrt{2}\,a}\left[\frac{3a}{(3a)^{\frac{1}{3}}}z_0^{\frac{4}{3}}+\frac{6a^2}{(9a)^{\frac{2}{3}}}z_0^{\frac{2}{3}}\right]$$

$$=\frac{3}{4\sqrt{2}}\left[\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}}+2\sqrt[3]{\frac{a\,z_0^2}{3}}\right]。$$

4235. $x^2+y^2=cz$，$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{c}$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$。

解：据假设参数 $c>0$，故 $z\geqslant 0$。

又已给方程仅当 x，y 同号时有意义。故所论曲线位于第一第三卦限。若用$(-x,-y)$代替(x,y)，方程不变。故曲线关于 Oz 轴对称。因此不失去一般性，可设 A 点位于第一卦限。

将 $x^2+y^2=cz$ 和 $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{c}$ 两边微分再整理，得

$$2x\,dx+2y\,dy-c\,dz=0, \tag{1}$$

$$-y\,dx+x\,dy-\frac{x^2}{c}\sec^2\frac{z}{c}\,dz=0。 \tag{2}$$

由(1)、(2)两式解得

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} 2y & -c \\ x & -\dfrac{x^2}{c}\sec^2\dfrac{z}{c} \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} -c & 2x \\ -\dfrac{x^2}{c}\sec^2\dfrac{z}{c} & -y \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{dz}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -y & x \end{vmatrix}},$$

即 $$\frac{dx}{cx - \dfrac{2x^2y}{c}\sec^2\dfrac{z}{c}} = \frac{dy}{cy + \dfrac{2x^3}{c}\sec^2\dfrac{z}{c}} = \frac{dz}{2cz}$$

$$\frac{ds}{\sqrt{\left(cx - \dfrac{2x^2y}{c}\sec^2\dfrac{z}{c}\right)^2 + \left(cy + \dfrac{2x^3}{c}\sec^2\dfrac{z}{c}\right)^2 + 4c^2z^2}}\text{。}$$

而

$$\sqrt{\left(cx - \frac{2x^2y}{c}\sec^2\frac{z}{c}\right)^2 + \left(cy + \frac{2x^3}{c}\sec^2\frac{z}{c}\right)^2 + 4c^2z^2}$$

$$= \sqrt{c^2(x^2+y^2) + \frac{4x^4}{c^2}(x^2+y^2)\sec^4\frac{z}{c} + 4c^2z^2}$$

$$= \sqrt{c^3z + \frac{4x^4z}{c}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^2 + 4c^2z^2}$$

$$= \sqrt{c^3z + 4cz^3 + 4c^2y^2} = \sqrt{cz}\,(c+2z)\text{。}$$

由于 $z \geqslant 0$，故得

$$s = \int_0^{z_0} \frac{\sqrt{cz}\,(c+2z)dz}{2cz}$$

$$= \frac{\sqrt{c}}{2}\int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^{z_0} \sqrt{z}\,dz$$

$$= \sqrt{cz_0} + \frac{2z_0\sqrt{z_0}}{3\sqrt{c}}\text{。}$$