数学分析题解

(一)

白玉兰　彭树森　陆子采　编解

黑龙江科学技术出版社

数学分析题解

（一）

白玉兰　彭树森　陆子采　编解

黑龙江科学技术出版社

一九八三年·哈尔滨

内 容 简 介

《数学分析题解》拟分册陆续出版。这个分册的主要内容为预备知识、序列的极限、一元函数、函数的极限和函数的连续性。可供理工科大学及有关电视、业余、函授大学等师生参考，也可供自学高等数学者参考。

数 学 分 析 题 解

（一）

白玉兰　彭树森　陆子采　编解

黑龙江科学技术出版社出版

（哈尔滨市南岗区分部街28号）

黑龙江省教育厅印刷厂印刷 · 黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米1/32　印张14 4/16　字数300千

1983年10月第一版 · 1983年10月第一次印刷

印数：1—29,000

书号：13217·035　　　　定价：1.80元

序

数学分析是理工科大学的一门重要基础课。电视、业余、函授大学也都把它作为一门重要的基础课。解答习题是学习数学分析必不可少的一个重要环节。学习这门课程的大多数学生，对一些难度较大的习题求解常常感到困难。我们在教学中感到，为广大学生提供一种较好的解题方法是非常必要的。为此，我们编写了这套《数学分析题解》。

这套题解侧重于数学分析的理论和方法，证明题较多，对解题方法也不偏废。为了满足广大读者的需要，一般性的数学分析题也占有足够的比例。

在解题过程中，我们力求理论完整、逻辑严谨，同时也充分注意技巧性。其中有些题目的演算过程较详细，能帮助读者加深对数学分析这门课程的理解。在一些题目的后面，还加了附注，作为本书的一个组成部分，以帮助读者对基本概念、基本理论和基本方法的理解和掌握。为了示明题目的内容和起到学习提纲的作用，在每章之前加了内容提要。

这套书的题目主要选自目前全国流行最广的两本习题集：吉米多维奇著《数学分析习题集》和同济大学数学教研室编的《高等数学习题集》（以前者为主）。为便于读者查阅，选自这两本书的题目，均在题后列出原书中的题号，选自前者的，在题号前冠以字母“D”；选自后者的，在题号前冠以“同”字。选题时既注意了类型，又考虑了代表性。为节省篇幅，两书中一些难度较小的题目，概未选用。此

外，有些题目，系从目前国内通行的几部数学分析教科书和国外一些数学分析书，以及我们在教学上使用过的题目中选出的。还有一些题目是根据中外杂志上的有关内容或定理自编的。

这套书的题目和解答是分开编排的。这样做的好处，一是不影响读者独立思考和独立解题的能力，使本书真正起到参考书的作用；二是便于读者通过题目的内容了解本书的全貌。为了在基本理论、基本知识和基本技巧等方面对读者有所裨益，有些证明步骤（如三角恒等式的证明）和运算步骤（如代数四则运算）都予省略，留作读者自己演算。

黑龙江大学数学系副教授刘醴泉同志精心审阅了（一）、（二）册全稿，黑龙江省函授广播学院高沛田同志和哈尔滨师范大学物理系崔俐同志为本册书绘制了全部附图。在此，我们一并表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，书中错误和不当之处在所难免，恳切希望读者批评指正。

编解者

目　　录

第一章　预备知识

第二章　序列的极限

第三章　一元函数

第四章 函数的极限

第五章 函数的连续性

第一章

预备知识

内容提要

§1 实数和实数的连续性

设p、q均为整数，无公因子，$q>0$，一切能表示成形如$\frac{p}{q}$的数叫有理数，而不能表示成形如$\frac{p}{q}$的数是存在的，这种数叫无理数。有理数和无理数统称实数。我们暂且不研究实数的严密理论。

为了应用，我们介绍数学的一个基础概念——集。所谓集是指具有某种特定性质的抽象的或具体的事物的全体。其中的每个事物称为这个集的元素。不含元素的集叫做空集。特别，具有某种特定性质的数的全体，称为数集，例如，有理数的全体，奇数的全体，大于3小于5的数的全体等等，都是数集。我们常用大写字母A、B、X、Y、…等表示集，用小写字母a、b、x、y、…表示元素。如x是集A的一个元素，称为x属于A，记为$x\in A$。

如果两个集A和B所含的元素完全相同，则称A等于B，记为$A=B$。

如果集A的元素都是集B的元素，则称A是B的子集，记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$。

如果$A\subseteq B$，并且B中至少有一个元素不属于A，则称

A为B的真子集，记为$A\subset B$ 或 $B\supset A$。

集A和B相等的充要条件是$A\subseteq B$ 和 $B\subseteq A$同时成立。

设有数集 $E=\{x\}$，如果存在一数M，对 E 中任一 x 皆有 $x\leqslant M$，则称数集E是有上界的，M是它的一个上界。如果存在数 m，E中任一 x 皆有 $x\geqslant m$，则称数集E是有下界的，m是它的一个下界。

设 β 是数集 $E=\{x\}$ 的上界；并且对任意的 $\varepsilon>0$，总有 $x_0\in E$，满足 $x_0>\beta-\varepsilon$，则称 β 为数集E的上确界，记为 $\beta=\sup\{x\}$ 或 $\sup\limits_{x\in E}x=\beta$。

设 α 是数集 $E=\{x\}$ 的下界；并且对任意的 $\varepsilon>0$，总有 $x_0\in E$，满足 $x_0<\alpha+\varepsilon$，则称 α 为数集E的下确界，记为 $\alpha=\inf\{x\}$ 或 $\alpha=\inf\limits_{x\in E}x$。

定理 有上界的数集必有上确界；有下界的数集必有下确界。

这条定理可视为数学分析的基础，其所述数集性质称为实数的连续性。

任意两个实数之间有无穷多个有理数和无理数，这叫做实数的稠密性。

§2 绝对值、不等式、数学归纳法和求和号与求积号的用法

数 A 的绝对值记为$|A|$，其定义如下

$$|A|=\begin{cases}A, & A>0\\ 0, & A=0\\ -A, & A<0\end{cases}$$

$\sqrt{A^2}=A$，仅当 $A\geqslant 0$ 时成立；$\sqrt{A^2}=|A|$ 恒成立。

数学分析中，经常用到不等式。下面列出几个有关绝对值的基本的不等式和等式

$$|A|\leqslant B，\text{意谓} -B\leqslant A\leqslant B$$

$$|A|\geqslant B，\text{意谓} A\geqslant B \text{ 或 } A\leqslant -B$$

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|$$

$$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|$$

$$|ab|=|a||b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|} \qquad b\neq 0$$

设 p 是与自然数 n 有关的命题，如果

（1）当 $n=1$ 时，p 成立；

（2）若 $n=k$ 时，p 成立，能导出 $n=k+1$ 时 p 也成立，

则命题 p 对一切自然数 n 成立。

这就是数学归纳法。

关于求和号“Σ”（读音：西格马）的运用简介。

设有序列 $\{f(n)\}$ 和 $\{g(n)\}$，则

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$$

$$\sum_{k=1}^{n}[f(k)+g(k)]=f(1)+g(1)+f(2)+g(2)+\cdots+f(n)+g(n),$$

$$\sum_{k=1}^{n} a = na, \qquad \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

三条常用的规则如下：

1. 设 c 常数，则

$$\sum_{k=1}^{n} cf(k) = c\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

2. $$\sum_{k=1}^{n}[f(k)+g(k)] = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)$$

3. 对和式 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ 作变换，$k=j+1$，则

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{j=0}^{n-1} f(j+1)$$

将等式右边的 j，仍记为 k，于是

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)$$

这是将和式中的整序变量 k 换成了 $(k+1)$；如将 k 换成 $(k-1)$，
则有

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)$$

将 k 换成 $(k+l)$（l 为整数），得到

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\sum_{k=1-l}^{n-l} f(k+l)$$

将 k 换成 $(n-k)$，得到

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\sum_{k=0}^{n-1} f(n-k)$$

将 k 换成 $(2n+k)$，得到

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\sum_{k=1-2n}^{-n} f(2n+k)$$

但是，将 k 换成 lk，则不可。

这几条简单的运算规则，是经常使用的。第 3 条特别有用，所以我们不惮麻烦，举了这么多例子。使用求和号，运用这些规则，往往可以简化计算，使冗长的算式化为简短的算式。有些题解（例如41题），则全靠求和号的运用得当。否则的话，算式将庞杂得可怕，甚至运算难以进行。

附带说一下求积号“Π”（读音：派）的运用，与求和号Σ的运用是类似的，即

$$\prod_{k=1}^{n} a_k=a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$\prod_{k=1}^{n} a=a^n, \qquad \prod_{k=1}^{n} 1=1^n=1$$

$$\prod_{k=1}^{n} c a_k=c^n \prod_{k=1}^{n} a_k$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k b_k = \prod_{k=1}^{n} a_k \cdot \prod_{k=1}^{n} b_k$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_{k-1} = \prod_{k=0}^{n-1} a_k, \quad \prod_{k=1}^{n} a_{k+l} = \prod_{k=l+1}^{l+n} a_k$$

题 目 之 部

1．求下列数集的上、下确界，并说明数集是否到达上、下确界：（所谓“到达”，意为上、下确界是数集中之数。）

(a) $1-\frac{1}{n}$，　(b) $\frac{-2n}{n+2}$，　(c) $\frac{(-1)^n}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$

2．设有两个有界数集$\{x\}$和$\{-x\}$，后者的元素是前者的元素的反号数，证明：

(a) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$，

(b) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$。　(D18)

3．设有两个有界数集$\{x\}$和$\{y\}$，则以一切形如$x+y$的和数为元素的数集$\{x+y\}$也是有界的，试证

(a) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$。

(b) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$。　(D19)

4．证明一切有理真分数$\frac{m}{n}$(m、n均为自然数，且$0<m<n$）的集合无最小及最大的元素，并求这集合的上确界及下确界。　(D16)

5. 有理数 r 满足不等式

$$r^2<2$$

求这些有理数所成集合的下确界和上确界。 (D17)

6. 设 a 和 b 为二实数，证明

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

并论断等号何时成立。

7. 证明 $||a|-|b||\leqslant|a-b|$。 (D21a)

8. 证明 $|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$。 (D21b)

9. 解不等式 $|2x-1|<|x-1|$。 (D25)

10. 解不等式 $|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$ (同10.7)

11. 解不等式 $\left|\frac{x}{1+x}\right|>\frac{x}{1+x}$. (同10.6)

12. 解不等式 $|x^2-1|<|x-3|$。

13. 解不等式 $||x+1|-|x-1||<1$。 (D28)

14. 求方程 $|2x+3|=x^2$ 的实根。 (同10.11)

15. 解方程 $|\sin x|=\sin x+2$。 (同10.10)

16. 设 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$，证明：

$$|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\leqslant\sqrt{|a-b|}$$

17. 若 $a=b-c$，则 $|a|=\max(b,c)-\min(b,c)$。

18. 问不等式

(a) $||a+b|-|c||\leqslant||a|+|b|-|c||$ 及

(b) $||a+c|-|c||\leqslant||a|+|c|-|c||$

成立否？

19. 设 n 与 p 均为自然数，证明不等式

$$\frac{1}{(n-p)(n-p+1)\cdots n} \leqslant \frac{(p+1)^p}{p!} \cdot \frac{1}{n^{p+1}}$$

当 $n > p+1$ 时成立。

20．设 $b_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为非负实数，$\sum_{i=1}^{n} b_i = b$，

试证 $\sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{i+1} \leqslant \frac{b^2}{4}$。

21．证明柯西—布雅可夫斯基（Cauchy-Буняковский）不等式：设 a_k，$b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 均为任意实数，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right),$$

等式仅当 a_k 与 b_k 成比例时成立。

22．证明 n 个正数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 的算术平均值不小于它们的调和平均值。

23．证明 $\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\right|$
$\leqslant |a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|$

用数学归纳法证明24—31题：

24．证明 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$。

25．证明 $1\cdot 2\cdots m+2\cdot 3\cdots(m+1)+\cdots+n(n+1)\times\cdots$

$$\times(m+n-1)=\frac{n(n+1)\cdots(n+m-1)(n+m)}{m+1}.$$

26．证明不等式

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

当 $n>1$ 时成立。 (D8)

27. 证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

当 $n>1$ 时成立。

28. 证明 贝努里 (Bernoulli) 不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数。 (D6)

29. 证明：若 $x>-1$，则不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \quad (n>1)$$

成立，且仅当 $x=0$ 时，等号成立。 (D7)

30. 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]}=1$，

证明 $(a+b)^{[n]}=\sum\limits_{m=0}^{n}c_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}$。 (D5)

31. 若 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 均为正数，且 $x_1x_2\cdots x_n=1$，则必 $x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n$，又式中等号仅于各 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 都相等时才成立。

32. 试证 n 个正数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的几何平均值必不大于它们的算术平均值。

33. 若 a，b 为任意二正数，试证，$\sqrt[n+1]{ab^n}\leqslant\dfrac{a+nb}{n+1}$。

34. 设 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 均为正数，试证

$$na_1a_2\cdots a_n\leqslant a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n$$

35. 设 k，m 皆为自然数，证明

(a) $\dfrac{k^{m+1}-(k-1)^{m+1}}{m+1}\leqslant k^m\leqslant\dfrac{(k+1)^{m+1}-k^{m+1}}{m+1}$

(b) $\frac{k^{m+1}}{m+1} \leqslant 1^m + 2^m + \cdots + k^m \leqslant \frac{(k+1)^{m+1}}{m+1}$

36．证明 $\prod_{i=0}^{n} c_n^i \leqslant [2^n - 2/(n-1)]^{n-1}$ 对 $n \geqslant 2$ 成立。

37．证明

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1} + \frac{a_1+a_3+\cdots+a_n}{a_2} + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_n} \geqslant n(n-1)。$$

其中 a_1，a_2，…，a_n 均为正数，当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时，等号成立。

38．证明 (a) $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \quad n \geqslant 0,\ x \neq 2k\pi,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots。$$

(b) $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)x \sin\frac{1}{2}nx}{\sin\frac{1}{2}x}。$$

$n \geqslant 1$，$x \neq 2k\pi$，$k=0$，± 1，± 2，…。

39．证明 $\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cdots\cos 2^{n-1}\theta = \frac{1}{2^{n-1}}$。

$[\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cdots + \cos(2^n - 1)\theta]$，