



全国高等职业学校•高等专科学校教材

应用数学基础

(下册)

曾文斗 主编

0-43

高等教育出版社

029-43

Z22

2

270

全国高等职业技术学校教材

应用数学基础

下 册

主编 曾文斗

编者 黄永正 周雅丽



A0929713

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础 下册/曾文斗主编. —北京:高等教育出版社,1999.8

ISBN 7-04-008064-8

I. 应… II. 曾… III. 应用数学-高等学校:专业学校-教材 IV. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 37682 号

责任编辑 杨歆颖 特约编辑 李凌云
封面设计 乐嘉敏 责任印制 蔡敏燕

书 名 应用数学基础(下册)
主 编 曾文斗

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号 邮政编码 100009
电 话 010-64054588 传 真 010-64014048
021-62587650 021-62551530

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店上海发行所
排 版 南京理工排版校对公司
印 刷 商务印书馆上海印刷股份有限公司

开 本 850×1168 1/32 版 次 1999 年 8 月第 1 版
印 张 6 印 次 2000 年 7 月第 2 次
字 数 153 000 定 价 7.00 元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

第六章

线性代数

在工程技术、经济管理和其他生产活动中,有许多变量之间的关系可以直接或近似地表示成线性(一次)函数(线性方程)的关系.线性代数主要研究线性函数和线性方程.

本章将学习研究这类线性关系的基本工具——行列式和矩阵以及利用它们解线性方程组的方法,向量间的线性关系,并介绍线性代数在现代经济管理中的一种应用——投入产出数学模型.

第一节 行列式

中学里曾经学习过利用二阶、三阶行列式解二元一次方程组和三元一次方程组.在许多经济问题和工程技术问题中还遇到过多于三个未知数的方程组.我们把未知数的最高次数是一次的方程组称为线性方程组.本节将从线性方程组的求解引入行列式的概念和计算方法.

一、行列式的概念

1. 二阶、三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & \textcircled{1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, & \textcircled{2} \end{cases} \quad (6-1)$$

① $\times a_{22}$ - ② $\times a_{12}$, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

② $\times a_{11}$ - ① $\times a_{21}$, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ 时, 原方程有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

为了便于记忆, 我们引进记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式, 它表示左上角和右下角两个数的乘积 $a_{11}a_{22}$ 与左下角和右上角两个数的乘积 $a_{21}a_{12}$ 之差, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (6-2)$$

其中, a_{11} 、 a_{12} 、 a_{21} 、 a_{22} 叫做二阶行列式的元素, 横排叫做行, 竖排叫做列. 从左上角元素到右下角元素所连成的对角线叫做主对角线. $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ 叫做二阶行列式(6-2)的展开式, 其计算结果是一个数, 叫做行列式的值. 二阶行列式共有 $2^2 = 4$ 个元素, 其展开式有 $2! = 2$ 项.

利用二阶行列式可将方程组(6-1)的解表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

$$\text{其中, } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

说明 (1) D 是由方程组(6-1)未知量的系数按原来的顺序排列而成的, 称 D 为方程组的系数行列式.

例 1 求行列式 $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ 及 $B = \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 3 \times (-3) = 11;$

$$B = \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \times 2 - 1 \times 8 = -14.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (6-3)$$

可类似二元线性方程组,用加减消元法求得其解.为此,我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

称为三阶行列式,它表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (6-4)$$

三阶行列式有三行、三列,共有 $3^2 = 9$ 个元素,(6-4)式等号右边的代数式叫做三阶行列式的展开式,式中共有 $3! = 6$ 项,每一项都是行列式中三个不同元素的乘积,它们取自不同行不同列,各项及其

符号可用图 6-1 帮助记忆:实线上三个元素的乘积组成的三项均取正号,虚线上三个元素的乘积组成的三项均取负号.

利用三阶行列式,同样可将方程组(6-3)的解表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 2 求三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $D = 3 \times 4 \times 5 + (-1) \times 6 \times 7 + 1 \times 2 \times 0$
 $- 1 \times 4 \times 7 - 3 \times 6 \times 0 - (-1) \times 2 \times 5$
 $= 60 - 42 + 0 - 28 + 0 + 10 = 0.$

2. n 阶行列式

下面我们把二阶、三阶行列式的概念推广到一般的 n 阶行列式.

定义 1 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (6-5)$$

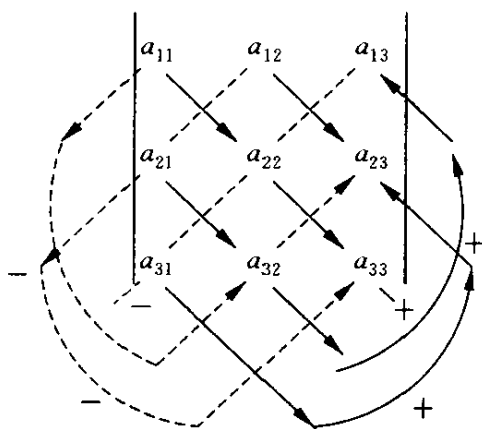


图 6-1

称为 n 阶行列式,其展开式是所有具有下列性质的项的代数和:

(1) 每项是 n 个元素的乘积,这些元素取自不同行、不同列;

(2) 各项的符号这样确定:逐次互换两行或两列,把其中 n 个元素都移到新行列式的主对角线上,所需互换两行或两列的次数如果是偶数,则取正号,如果是奇数,则取负号;

(3) 这样的项共有 $n!$ 项.

注 利用定义计算行列式的值比较复杂,因此,这里只把定义介绍给读者,具体计算方法将在后面讨论.

二、行列式的性质

为简化行列式的计算,我们介绍行列式的一些性质.

性质 1 行列式中某一行(列)的公因子可以提到行列式号的外面.

特别地,当公因子为零时,行列式的值为零.因此,如果行列式中有一行(列)的所有元素为零,则此行列式的值为零.

性质 2 若行列式中某一行(列)的每一个元素都可以写成两项之和:

$$a_j = b_j + c_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 3 如果将行列式的任意两行(列)互换,那么,此行列式只改变符号.由性质 3 可得到下面两个推论:

推论 1 若行列式有两行(列)完全相同,则此行列式的值为零;

推论 2 若行列式有两行(列)各对应元素成比例,则此行列式的值为零.

性质 4 若行列式的某行(列)中各元素都乘以同一个数后,加另一行(列)各对应元素上,则此行列式的值不变.

性质 5 把一个行列式 D 的各行与各列互换,不改变其顺序,所得到的行列式(称为 D 的转置行列式,记作 D' 或 D^T)与原行列式相等,即 $D = D^T$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 3 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 297 & 101 & 99 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

分析 此行列式的第二行的三个元素可分别写成 $300 - 3$ 、 $100 + 1$ 、 $100 - 1$, 利用性质 2 可把行列式 D 化为

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 300 & 100 & 100 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{与} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} \text{之和.}$$

由于 D_1 的第一、第二行各元素对应成比例,故 $D_1 = 0$.

对于 D_2 ,可以利用性质 4,把第一行加到第二行上,

得到 $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, 这时,可直接利用三阶行列式的展开式求得

$$D = D_2 = 2.$$

例 4 计算行列式

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

分析 该行列式的特点是各列四个元素之和均为 11, 我们可以把 1、2、3 行的元素都分别加到第 4 行上, 提出公因子 11, 然后把 -2 乘以第 4 行后分别加到第 1、2、3 行上, 即得出结果.

$$\begin{aligned} \text{解 } A &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 11 \times \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 11 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 11 \times (-1) \times 3 \times 1 \times 3 \times 3 = -297. \end{aligned}$$

三、行列式的展开

行列式的计算是一个较复杂的问题. 利用行列式的性质可以简化计算, 另一方面, 阶数较低的行列式计算比阶数较高的行列式计算更容易. 因此, 我们考虑, 能否把较高阶的行列式转化为较低阶的行列式.

1. 代数余子式

定义 2 n 阶行列式(6-5)中, 划去 a_{ij} 所在第 i 行和第 j 列, 剩下的元素按原来顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} , 并把 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如, 三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中, 元素 a_{12} 的余子式为

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ 其代数余子式为}$$

$$A_{12} = (-1)^{2+1} \cdot M_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. 行列式按行(列)展开

法则 1 n 阶行列式(6-5)(记作 D)等于它的任何一行(列)中所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad (6-6)$$

$$\text{或 } D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n). \quad (6-7)$$

法则 2 n 阶行列式(6-5)的任何一行(列)中的元素与另一行(列)的相应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即当 $i \neq j$ 时,

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad (6-8)$$

$$\text{或 } a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0. \quad (6-9)$$

例 5 利用行(列)展开法则计算行列式 D 的值:

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 1 按第一行展开. 因为

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

所以

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= (-3)(-2) + 1 \times 1 + (-2) \times 0 = 7.$$

解 2 先利用性质 4, 将第三行乘以 3 和 (-3) 后分别加到第一行和第二行上, 使 D 的第一列上前两个数都化为 0, 即

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

然后按第一列展开, 即

$$D = 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

说明 行列式的计算可通过按行(列)展开的法则 1 把它降阶, 从而简化计算. 在具体计算时, 往往利用行列式的性质先对它进行变换, 使某行(列)含有较多的零, 然后按该行(列)展开, 这样能使运算较简便.

例 6 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 先把行列式 D 的第一行乘以 (-1) 后分别加到第二行、第四行上, 然后按第一列展开, 使其降为三阶行列式, 即

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

再将所得的三阶行列式的第一行乘以 (-1) 加到第二行上, 然后按第一列展开, 使其降为二阶行列式, 最后计算得出结果, 即

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -21.$$

实训题 6-1

1. 利用行列式的定义, 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}.$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$(4) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. 利用行列式的性质, 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. 按第 2 行展开, 并求行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

的值.

4. 按第 3 列展开, 并求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & 1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$$

的值.

5. 求下列各行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 3 & 5 & 9 \\ 6 & 13 & 21 \end{vmatrix}.$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$(4) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$(6) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

第二节 向量及其线性关系

在力学、物理学和其它应用学科中所遇到的量,可分为两大类:一类是只有大小没有方向的量,称为数量;另一类是不仅有大小而且有方向的量,称为向量(也称为矢量).

本节我们将引入 n 维向量的概念,介绍向量的运算法则,进而讨论向量的线性相关性.

一、向量的概念

我们知道,在给定的直角坐标系下,平面上的一个点 P 与两个有序实数 (x, y) 成一一对应. 连接原点 O 与 P 点形成一个有向线段 OP (如图 6-2), 我们把它叫做向量. 于是一个从原点出发的向量与一个有序实数组 (x, y) 成一一对应, 我们称有序实数组 (x, y) 为二维向量, 记作 $\mathbf{a} = (x, y)$. x, y 称为向量 $\mathbf{a}$ 的分量.

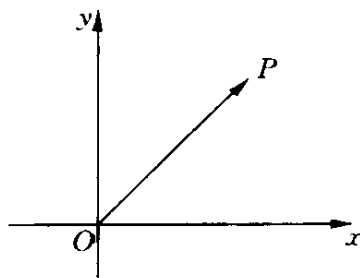


图 6-2

一般地, 有下面 n 维向量的定义.

定义 1 n 个有序的数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 所构成的数组

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (6-10)$$

称为 n 维向量. 数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 的分量(或坐标).

分量都是零的向量称为零向量, 记作 $\mathbf{0}$, 即

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0).$$

n 维向量 $\mathbf{a}$ 的各分量的相反数所构成的向量, 称为 $\mathbf{a}$ 的负向量, 记作 $-\mathbf{a}$, 即

$$-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n).$$

有时把向量写成一列

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (6-11)$$

(6-10) 叫做行向量, (6-11) 叫做列向量. 把行(列)向量写成列(行)向量可以用转置的记号, 例如, 式(6-11)可写成

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T.$$

两个 n 维向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 、 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 当且仅当 $a_i = b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 时, 称向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 相等, 记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

二、向量的运算

1. 向量的加减法

定义 2 两个 n 维向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 、 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 的各对应分量之和所构成的 n 维向量称为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和, 记作 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n). \end{aligned}$$

由向量加法和负向量的概念, 可定义向量的减法为

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \mathbf{b} &= \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (-b_1, -b_2, \dots, -b_n) \end{aligned}$$

$$= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n).$$

2. 数与向量的乘法

定义 3 n 维向量 a 的各分量的 k 倍所构成的 n 维向量, 称为数 k 与向量 a 的乘积, 记作 ka , 即

$$ka = k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n).$$

例 1 已知 $a_1 = (1, 2, -1)$, $a_2 = (2, -3, 1)$, 求 $2a_1 - a_2$.

解 $2a_1 - a_2 = 2(1, 2, -1) - (2, -3, 1)$

$$= (2, 4, -2) - (2, -3, 1)$$

$$= (0, 7, -3).$$

不难验证, 数与向量的乘法及向量的加法运算满足下面的运算律:

$$(1) a + b = b + a;$$

$$(2) (a + b) + c = a + (b + c);$$

$$(3) a + 0 = a;$$

$$(4) a + (-a) = 0;$$

$$(5) k(ma) = (km)a \quad (k, m \text{ 为实数});$$

$$(6) k(a + b) = ka + kb \quad (k \text{ 为实数});$$

$$(7) (k + m)a = ka + ma \quad (k, m \text{ 为实数});$$

$$(8) 1 \cdot a = a.$$

例 2 已知向量 $a = (0, 3, -2, 4)$, $b = (-1, 4, 5, 0)$, $c = (2, -1, 0, 3)$, 求满足 $3(a + x) + (x - b) + 2(c - x) = 0$ 的向量 x .

解 根据向量的运算律, 可得

$$3a + 3x + x - b + 2c - 2x = 0,$$

$$\text{所以 } x = -\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b - c$$

$$= -\frac{3}{2}(0, 3, -2, 4) + \frac{1}{2}(-1, 4, 5, 0) - (2, -1, 0, 3)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(0, -\frac{9}{2}, 3, -6\right) + \left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}, 0\right) - (2, -1, 0, 3) \\
 &= \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{11}{2}, -9\right).
 \end{aligned}$$

三、向量间的线性关系

1. 线性组合

在本节例 1 中, 如果设 $\boldsymbol{b} = (0, 7, -3)$, 那么,

$$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2.$$

这时, 我们就说向量 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 的线性组合.

一般地, 有

定义 4 对于已知向量 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ 如果存在一组数 $k_1, k_2, \dots, k_n$, 使

$$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + k_n\boldsymbol{a}_n$$

成立, 则称向量 $\boldsymbol{b}$ 是向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合或线性表示.

显然, 任何一个 n 维向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 都是 n 维向量组 $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ 的线性组合.

2. 线性相关与线性无关

若向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ 中没有一个向量能由其余向量线性表示, 则称该向量组线性无关; 否则称该向量组线性相关. 线性无关或线性相关是向量组的一种重要性质. 为了叙述方便, 我们用另一种说法给出向量组的两种线性关系的定义.

定义 5 对于向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$, 如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_n$, 使关系式

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + k_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0} \quad (6-12)$$