张量分析及其应用

王甲升 编著

上海机械学院

前　　言

“张量分析”是研究固体力学、流体力学及连续介质力学的重要数学工具。它具有高度概括、形式简洁的特点。一些先进国家将“张量分析”作为大学高年级学生及研究生的常规课或选修课开设。

近几年来，随着我国对外学术交流的加强，不少院校邀请外籍专家来华讲授连续介质力学等课程；随着硕士研究生和博士研究生的招收，许多教师和科技工作者希望了解和熟悉“张量分析”的有关知识。为适应新形势下的要求，有些高等院校正在开设“张量分析”课程。

1978年以来，编者结合研究生培养编写了有关讲义，并于1979年为本院研究生开设“张量分析”课程。数年来曾在上海交通大学、华东化工学院、西南石油学院、重庆建筑工程学院及一些研究单位作汇报讲授，在汇报过程中，得到广大教师、科技工作者的热情支持和鼓励，望希改编成册，铅印出版，以应当前教材之急需。

经过近一年的整理、改编，本书力求由浅入深、密切联系工程实际。为便于阅读，本书尽量选用其他参考书常用的符号。

限于编者水平，疏误之处欢迎有关专家和读者批评指正。

编　者

1982年10月

目　录

第一章　预备知识

第一节　概　　述

任一物理现象都是按照一定的客观规律进行的，它们是不以人们的意志为转移的。但是，在研究、分析这一物理现象时，人们采用的方法则是由人们的意志决定的。无数事实证明，研究方法的选用与当时人们对客观事物的认识水平有关，而研究方法的好坏则直接关系到求解问题的繁简程度。

在有关力学问题中，这类事例是屡见不鲜的。流体力学问题的求解，首先遇到的是：如何针对所提出的问题选用合理的坐标系。因为坐标系选择正确与否直接影响到问题的求解，下面试举数例加以说明。

设流体以等速度**V**自左向右运动（图1—1），如选用笛卡尔坐标系，并取ox 轴沿速度**V**方向，对于这一坐标系而言，则

$$V_x = V = \text{const},\quad V_y = 0,\quad V_z = 0$$

但是，如果选用极坐标系，流场上一点P的速度，其沿径向、周向速度分量V_r、V_φ则分别是

$$V_r = V\cos\varphi;\quad V_\varphi = -V\sin\varphi$$

由上例可见，即使合速度

$$\sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} = \sqrt{V^2\cos^2\varphi + V^2\sin^2\varphi} = V$$

不变，仍然是常值，但其在极坐标系下的分速度则不同于笛卡尔坐标系下的分速度，它们不再是常值，而是坐标φ的函数。

与此相反，对于不可压缩流体的点源流动，如果采用极坐标系（图1—2），则

$$V_r = V(r) = \frac{A}{r},\quad V_\varphi = 0$$

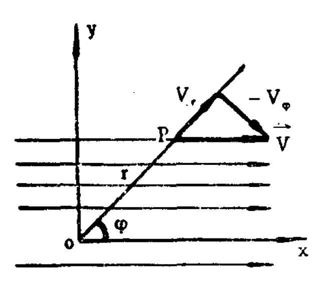


图1—1

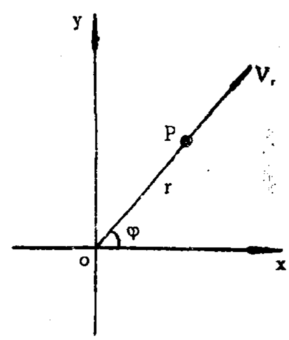


图1—2

即速度V 的周向分量为零，且只是 r 的函数。但如选用笛卡尔坐标系，则为

$$V_x = V\cos\varphi, \quad V_y = V\sin\varphi$$

或

$$V_x = V_r\cos\varphi = A\frac{\cos\varphi}{r}; \qquad V_y = V\sin\varphi = \frac{A\sin\varphi}{r}$$

上式表明，在笛卡尔坐标系下，速度V 的分量V_x、V_y都是笛卡尔坐标x、y的函数。

以上两例说明，由于选用的坐标系不同，虽然所反映的客观规律并不改变（仍是等速直线运动和点源流动），但其速度分量则有较大区别。如果坐标系选择适当，其速度分量可能是常值或为零。反之，则变成一个坐标乃至多个坐标的函数，速度分量的函数关系越复杂，求解也越困难。

这里是以速度为例，说明速度分量和坐标系选择密切相关，其实，所有的物理量都有类似的性质。

由于物理量的分量和坐标系选择有关，所以由物理量的分量表示的力学基本方程，其形式也必然与坐标系选择有关。每选用一种坐标系都需要作一些繁琐的推导以建立力学的基本方程。

现在提出的任务是：运用一些数学知识，建立起统一的、普遍适用的力学基本方程。为了完成这一任务，先分析以上两例，并从中得出可供参考的规律性。

从以上两例得出：尽管速度分量随坐标选择而异，但

1. 速度V本身并不因坐标系选择不同而异；

2. 两类坐标系下的速度V 诸分量虽然不同，但它们之间是相互有联系的。

下面就以此为出发点，逐步加以讨论。附带说明一点，以上提出的任务将是本书讨论的中心内容。

第二节　物理恒量(Physical Identity)

在力学研究中，人们总希望以某种方式来表示物理量，并希望在以这种方式表示物理量时，要求与坐标系选取无关。

所有与坐标选取无关的物理量，统称为物理恒量。

由于物理恒量的概念和坐标系选取有关，而坐标系的不同选取，又可看成坐标系的变换。因此，为了弄清物理恒量的概念，首先要弄清坐标系的变换问题。

这里先以笛卡尔坐标系为例，介绍笛卡尔坐标系变换的有关知识。

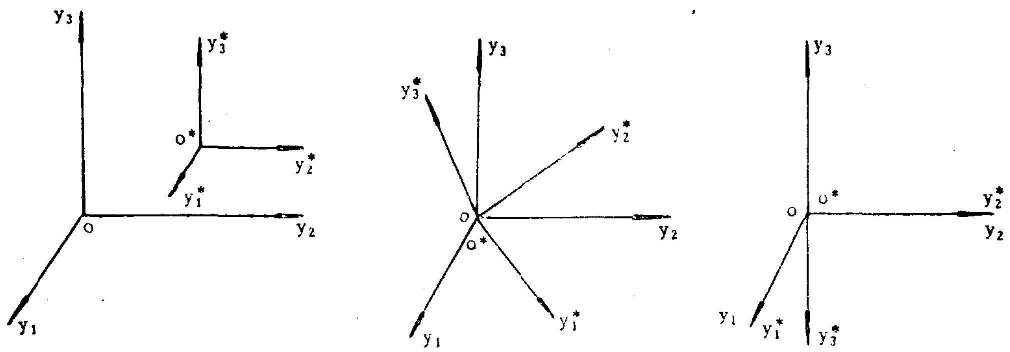
任取一笛卡尔坐标系 $oy_1y_2y_3$*)。这一坐标系可通过平移、旋转、反射等三种变换形式变换为其他笛卡尔坐标系（图1—3）。

所谓平移变换，就是各坐标轴方向不变，将坐标系 $oy_1y_2y_3$平行移动到新的位置；旋转变换则不同，旋转变换时原点不动，各坐标轴同时转过一个相同的角度；至于反射变换，其原点和两条坐标轴不动，只是第三条坐标轴转过180°角，反射变换后的新坐标系$o^*y_1^*y_2^*y_3^*$

*) 为讨论方便起见，以$y_1y_2y_3$代替 x、y、z。

和 $oy_1y_2y_3$ 形成镜面反射，故称反射变换。

对于后两种变换，其特点在于：旋转变换不改变坐标系性质，即原来是左手坐标系经变换后仍为左手坐标系，反之亦然；反射变换则相反，坐标系经反射变换后将改变其性质。旋转变换又称为确当变换（Proper Transformation）；而反射变换则称为不确当变换（Improper Transformation）。



(a)平移　　(b)旋转　　(c)反射

图1—3

所谓物理量与坐标变换无关，这里讲的坐标变换自然应当包括以上三种变换在内。

除此以外，既然讨论涉及物理量，就应当对物理量本身作些探讨。

研究固体力学和流体力学的两个主要任务是：1.根据普遍定律，揭示介质的力学性质；2.建立介质内部应力和应变的关系，即所谓本构关系。无论是前者还是后者，都必须用一些物理量加以表述，例如，以速度和加速度表示介质的运动性质；以温度、密度、应力表示介质的静态性质等。

在这些物理量中，比较熟悉的是温度、密度、速度以及加速度。对于前两者，只有大小没有方向，统称为标量(Scalar)；至于后两者，则既有大小又有方向，通称为矢量(Vector)；而关于介质中的一点应力，已非熟悉的标量和矢量所能包括的了。

为了加深物理量的理解，先通过对标量、矢量的讨论以及坐标变换的性质，提出绝对标量（Absolutes Scalar）、绝对矢量（Absolute Voctor）的概念，并在此基础上引进张量（Tensor）这一更为概括的名称。

（一）、绝对标量

在一定单位制下，只需指明其大小即足以说明的物理量，统称为标量。流场中流体的密度可以随空间位置和时间变化，但在给定瞬时、给定空间位置，流体密度 ρ 是固定的实数，这一实数值和选取的单位制有关。水在 4℃ 时的密度值可表示为 1（gm/cm^3）和 62.427（$1b/ft^3$）两个不同的数值，然而，它们都代表 4℃时水的密度。由此可见，同一密度 ρ，采用不同的单位制，可以有不同的值，但单位制一旦给定，密度值也就给定了。

密度没有方向，谈论密度的方向是没有意义的；密度的大小可能和空间位置有关，但和确定空间位置的方式（即坐标选取）无关。

显然，密度是一种无须指定方向的物理恒量，这种物理恒量又称绝对标量。也有另一类标量，虽然也只有大小没有方向，但当坐标系作反射变换时，此标量的绝对值不变，而符号发生变化，这种标量称伪标量（Pseudoscalar）。关于伪标量，将通过实例加以说明。

根据绝对标量的定义，如果设 ϕ 为某一坐标系（y_1，y_2，y_3）下的标量，ϕ^* 为另一坐标系（y_1^*，y_2^*，y_3^*）的同一标量，则

$$\phi(y_1, y_2, y_3) = \phi^*(y_1^*, y_2^*, y_3^*) \tag{1—1}$$

式（1—1）为绝对标量 $\phi(y_1, y_2, y_3)$ 的解析定义式。

（二）、绝对矢量

和标量不同，对于矢量，除指明其大小外还应指出其方向。对这类物理量，当所选用的单位制改变时，其大小的实际数值也将改变。

以力 **F** 为例，它的方向可用某一指定的坐标系确定。如令 α_{F1}、α_{F2}、α_{F3} 为力**F**和 oy_1、oy_2、oy_3 夹角的方向余弦，如图1—4 a 所示，由笛卡尔坐标系 $oy_1y_2y_3$ 可定出力**F**的方向，而其大小则可由力**F**在此坐标系下的三个投影分量（Projective Component）F_1、F_2、F_3、来确定

如取另一坐标系 $o^*y_1^*y_2^*y_3^*$（由 $oy_1y_2y_3$ 经反射变换而得）来表示力 **F**（图1—4 b），由于 $o^*y_1^*$、$o^*y_2^*$ 和 oy_1、oy_2 方向相同，$o^*y_3^*$ 和 oy_3 方向相反，力**F** 在 $o^*y_1^*y_2^*y_3^*$ 下的投影分量应当是

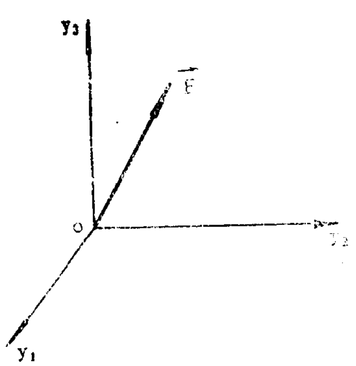


图1—4 a

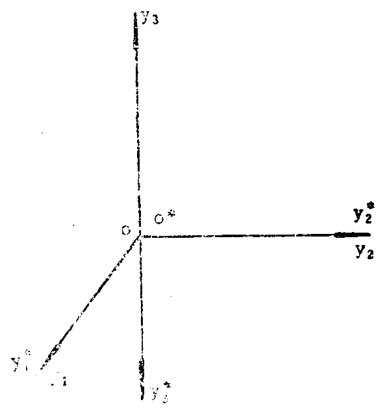


图1—4 b

$$F_1^* = F_1, \quad F_2^* = F_2, \quad F_3^* = -F_3 \tag{a}$$

由以上讨论可知，虽然是同一矢量**F**，但如采用不同坐标系，其投影分量可能不同。

根据矢量定义，如以 $\mathbf{u}_1$、$\mathbf{u}_2$、$\mathbf{u}_3$ 分别代表老坐标轴 oy_1、oy_2、oy_3 的单位矢量；以 $\mathbf{u}_1^*$、$\mathbf{u}_2^*$、$\mathbf{u}_3^*$ 表示新坐标轴 $o^*y_1^*$、$o^*y_2^*$、$o^*y_3^*$ 的单位矢量，则老坐标系下的矢量**F**应是

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{u}_1 + F_2\mathbf{u}_2 + F_3\mathbf{u}_3 \tag{b}$$

新坐标系下的矢量**F***应是

$$\mathbf{F}^* = F_1^*\mathbf{u}_1^* + F_2^*\mathbf{u}_2^* + \mathbf{F}_3^*\mathbf{u}_3^* \tag{c}$$

由图1—4 b 可知

$$u_1^* = u_1, \quad u_2^* = u_2, \quad u_3^* = -u_3 \tag{d}$$

以式(a)、(d)代入式(c)得

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^*(y_1^*, \ y_2^*, \ y_3^*) = \mathbf{F}(y_1, \ y_2, \ y_3)$$

上式表明力矢量**F**与坐标选取无关（采用其他形式的变换也可得相同结果）。

有许多矢量具有类似性质，对于和坐标系选取无关的矢量，统称为绝对矢量。

总结以上讨论可得出：

一、绝对矢量是物理恒量。

二、不是所有的矢量都是物理恒量。有一类矢量，当坐标系进行反射变换后，矢量改变符号，这类矢量统称为伪矢量（Pseudo Vector），这类矢量将以实例说明。

三、即使是绝对矢量，其投影分量的大小和坐标系选择有关，不指明所采用的单位制谈矢量大小是无意义的；同样，不指明所选用的坐标系谈矢量分量的值也是无意义的。

第三节　充要条件

以上通过绝对标量和绝对矢量的讨论引入物理恒量的概念。现在提出新的问题：满足什么条件才能保证物理量为物理恒量？作为物理恒量的充要条件是什么？

回答这个问题，首先要从矢量的讨论引入。如图1—5所示，取笛卡尔坐标系$o^*y_1^*y_2^*y_3^*$及$oy_1y_2y_3$，以α_{11}、α_{12}、α_{13}分别表示$o^*y_1^*$与oy_1、oy_2、oy_3夹角的方向余弦（其余各轴依此类推），其中第一个下标指定为新坐标轴，第二个下标为老坐标轴；以A_1、A_2、A_3表示矢量**A**在老坐标系下的投影分量，以A_1^*、A_2^*、A_3^*表示$\mathbf{A}^*$在新坐标系下的投影分量。现在证明

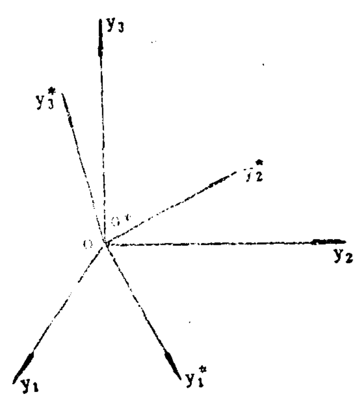


图1—5

$$\left.\begin{aligned} A_1^* &= \alpha_{11}A_1 + \alpha_{12}A_2 + \alpha_{13}A_3 \\ A_2^* &= \alpha_{21}A_1 + \alpha_{22}A_2 + \alpha_{23}A_3 \\ A_3^* &= \alpha_{31}A_1 + \alpha_{32}A_2 + \alpha_{33}A_3 \end{aligned}\right\} \tag{1—2}$$

或

$$\begin{bmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ A_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \tag{1—2$'$}$$

成立是矢量**A**为物理恒量——绝对矢量的充要条件。

证：如果**A**为绝对矢量，则根据定义

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$$

或

$$A_1\mathbf{u}_1 + A_2\mathbf{u}_2 + A_3\mathbf{u}_3 = A_1^*\mathbf{u}_1^* + A_2^*\mathbf{u}_2^* + A_3^*\mathbf{u}_3^*$$

式中 $\mathbf{u}_1$、$\mathbf{u}_2$、$\mathbf{u}_3$及$\mathbf{u}_1^*$、$\mathbf{u}_2^*$、$\mathbf{u}_3^*$分别表示新、老坐标系的单位矢量。

以$\mathbf{u}^*_1$对上式各项作数性积，得

$$A_1^* = (\mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{u}_1)A_1 + (\mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{u}_2)A_2 + (\mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{u}_3)A_3$$

已知$\mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{u}_1 = \alpha_{11}$，$\mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{u}_2 = \alpha_{12}$、$\mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{u}_3 = \alpha_{13}$，于是

$$A_1^* = \alpha_{11}A_1 + \alpha_{12}A_2 + \alpha_{13}A_3$$

同理，如分别与$\mathbf{u}_2^*$、$\mathbf{u}_3^*$作数性积，则

$$A_2^* = \alpha_{21}A_1 + \alpha_{22}A_2 + \alpha_{23}A_3$$

$$A_3^* = \alpha_{31}A_1 + \alpha_{32}A_2 + \alpha_{33}A_3$$

由此可证，式（1—2）是矢量**A**为绝对矢量的必要条件。

如果**A**、**A***各分量满足式（1—2），则

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$$

即**A**为绝对矢量。

由式

$$\mathbf{A}^* = A_1^*\mathbf{u}_1^* + A_2^*\mathbf{u}_2^* + A_3^*\mathbf{u}_3^*$$

将式（1—2）代入上式，得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^* &= (\alpha_{11}A_1 + \alpha_{12}A_2 + \alpha_{13}A_3)\mathbf{u}_1^* + (\alpha_{21}A_1 + \alpha_{22}A_2 + \alpha_{23}A_3)\mathbf{u}_2^* + \\ &+ (\alpha_{31}A_1 + \alpha_{32}A_2 + \alpha_{33}A_3)\mathbf{u}_3^* = \\ &= A_1(\alpha_{11}\mathbf{u}_1^* + \alpha_{21}\mathbf{u}_2^* + \alpha_{31}\mathbf{u}_3^*) + A_2(\alpha_{12}\mathbf{u}_1^* + \alpha_{22}\mathbf{u}_2^* + \alpha_{32}\mathbf{u}_3^*) + \\ &+ A_3(\alpha_{13}\mathbf{u}_1^* + \alpha_{23}\mathbf{u}_2^* + \alpha_{33}\mathbf{u}_3^*)\end{aligned}$$

由新、老坐标系单位矢量间的关系式

$$\mathbf{u}_1 = \alpha_{11}\mathbf{u}_1^* + \alpha_{21}\mathbf{u}_2^* + \alpha_{31}\mathbf{u}_3^*$$

$$\mathbf{u}_2 = \alpha_{12}\mathbf{u}_1^* + \alpha_{22}\mathbf{u}_2^* + \alpha_{32}\mathbf{u}_3^*$$

$$\mathbf{u}_3 = \alpha_{13}\mathbf{u}_1^* + \alpha_{23}\mathbf{u}_2^* + \alpha_{33}\mathbf{u}_3^*$$

可得

$$\mathbf{A}^* = A_1\mathbf{u}_1 + A_2\mathbf{u}_2 + A_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{A}$$

以上证明了式（1—2）是矢量**A**为绝对矢量的充要条件。式（1—2）为绝对矢量的解析定义式；式中的诸方向余弦称为变换系数。

必须着重指出，式（1—2）是以老分量表示新分量的表达式，通过类似的讨论，也可求得以新分量表示老分量的表达式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_{11}A_1^* + \alpha_{21}A_2^* + \alpha_{31}A_3^* \\
A_2 &= \alpha_{12}A_1^* + \alpha_{22}A_2^* + \alpha_{32}A_3^* \\
A_3 &= \alpha_{13}A_1^* + \alpha_{23}A_2^* + \alpha_{33}A_3^*
\end{aligned}\right\}
$$

为了便于以后讨论，变换系数的下标顺序不变，即第一个下标为新坐标，第二个下标为老坐标。

由于标量在坐标系中没有分量（或分量就是此标量本身），因而，把式（1—1）看成绝对标量的解析定义式是很自然的。下面通过若干实例的讨论来加深对物理恒量的理解。

〔例题 1〕证明力 F 为一绝对矢量

证：设F_1、F_2、F_3为力 $\mathbf{F}$ 在老坐标系下的投影分量，由力学知识："一个力在某方向的投影，即等于诸分量在此方向的投影"。现取新坐标系下的$\mathbf{u}^*_1$为此方向，则

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_1^* &= \mathbf{F}_1\cdot\mathbf{u}_1^* + \mathbf{F}_2\cdot\mathbf{u}_2^* + \mathbf{F}_3\cdot\mathbf{u}_3^* = \\
&= F_1(\mathbf{u}_1^*\cdot\mathbf{u}_1) + F_2(\mathbf{u}_1^*\cdot\mathbf{u}_2) + F_3(\mathbf{u}_1^*\cdot\mathbf{u}_3)
\end{aligned}
$$

或

$$F_1^* = \alpha_{11}F_1 + \alpha_{12}F_2 + \alpha_{13}F_3$$

通过同样讨论，可求得其他两式。由此可见，力$\mathbf{F}$是绝对矢量。这一结果和前面讨论是一致的。

〔例题 2〕试证明运动速度$\mathbf{V}$和加速度$\mathbf{a}$是绝对矢量。

证：表征质点（或流体微团）空间位置的矢量，称位置矢量（Position Vector），并以$\mathbf{r}_p$表示，如果质点在空间作运动，则$\mathbf{r}_p$应是时间t的函数。即

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p(t)$$

可以证明，位置矢量在新、老坐标系下的分量y_1^*、y_2^*、y_3^*和y_1、y_2、y_3满足式(1—2)，即位置矢量$\mathbf{r}_p$为一绝对矢量。根据笛卡尔坐标系下质点的速度和加速度的定义，可写出

$$V_1 = \frac{Dy_1}{Dt}; \qquad V_1^* = \frac{Dy^*_1}{Dt} \tag{a}$$

$$a_1 = \frac{DV_1}{Dt} = \frac{D^2y_1}{Dt^2}; \qquad a_1^* = \frac{DV_1^*}{Dt} = \frac{D^2y_1^*}{Dt^2} \tag{b}$$

其余两式也可分别写出。

由于位置矢量$\mathbf{r}_p$是绝对矢量，所以

$$y_1^* = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3$$

代入式(a)，同时注意到α_{11}、α_{12}、α_{13}均为常数，于是

$$V_1^* = \alpha_{11}\frac{Dy_1}{Dt} + \alpha_{12}\frac{Dy_2}{Dt} + \alpha_{13}\frac{Dy_3}{Dt}$$

或

$$V_1^* = \alpha_{11}V_1 + \alpha_{12}V_2 + \alpha_{13}V_3 \tag{c}$$

由此可见，速度$\mathbf{V}$是绝对矢量，如以式(c)代入式(b)，同样可得

$$a_1^* = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \alpha_{13}a_3$$

因而加速度**a**也是绝对矢量。

〔例题 3〕试证明三个绝对矢量**A**、**B**、**C**的数性二重积$E = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$为伪标量

证：各图1—6所示，设新坐标系由老坐标系经反射而得。这种变换的变换系数应是

$$\alpha_{11} = 1; \quad \alpha_{22} = 1; \quad \alpha_{33} = -1 \qquad (a)$$

其余均为零。

由于**A**、**B**、**C**均为绝对矢量，因而它们的新、老分量满足式（1—2），计及式（a），应为

$$\left.\begin{array}{lll} A_1^* = A_1, & A_2^* = A_2, & A_3^* = -A_3 \\ B_1^* = B_1, & B_2^* = B_2, & B_3^* = -B_3 \\ C_1^* = C_1, & C_2^* = C_2, & C_3^* = -C_3 \end{array}\right\} \quad (b)$$

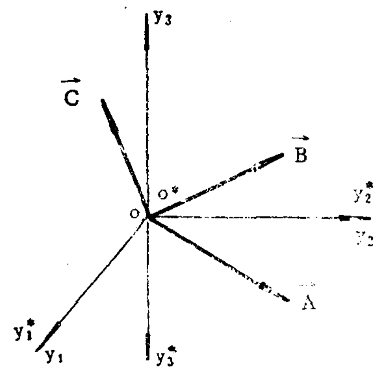


图1—6

由三个矢量的数性二重积的性质，标量E可写成

$$E = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}; \qquad E^* = \begin{vmatrix} A_1^* & A_2^* & A_3^* \\ B_1^* & B_2^* & B_3^* \\ C_1^* & C_2^* & C_3^* \end{vmatrix}$$

将式（b）代入上式，即得

$$E^* = -E$$

上式表明，三个绝对矢量的数性二重积为一伪标量。

〔例题 4〕证明两绝对矢量**A**、**B**的矢性积$\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$是伪矢量

证：和上例相类似，新、老坐标系仍按图1—6所示，于是

$$\left.\begin{array}{lll} A_1^* = A_1, & A_2^* = A_2, & A_3^* = -A_3 \\ B_1^* = B_1, & B_2^* = B_2, & B_3^* = -B_3 \end{array}\right\} \qquad (a)$$

由两矢量矢性积定义，可得

$$\left.\begin{array}{ll} C_1 = A_2B_3 - A_3B_2, & C_1^* = A_2^*B_3^* - A_3^*B_2^* \\ C_2 = A_3B_1 - A_1B_3, & C_2^* = A_3^*B_1^* - A_1^*B_3^* \\ C_3 = A_1B_2 - A_2B_1, & C_3^* = A_1^*B_2^* - A_2^*B_1^* \end{array}\right\} \qquad (b)$$

将式（a）代入式（b），即得

$$C_1^* = -C_1, \quad C_2^* = -C_2, \quad C_3^* = C_3 \qquad (c)^{*)}$$

---

*) 式（C）即足以表明矢量C不是绝对矢量，因为，如果矢量C是绝对矢量，则它们的分量必满足式（1—2），即应有

$$C_1^* = \alpha_{11}C_1 = C_1, \quad C_2^* = \alpha_{22}C_2 = C_2, \quad C_3^* = \alpha_{33}C_3 = -C_3$$

对于反射变换，单位矢量间满足

$$\mathbf{u}_1^* = \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2^* = \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3^* = -\mathbf{u}_3 \tag{d}$$

由矢量$\mathbf{C}^*$的分解式

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^* &= \mathbf{A}^* \times \mathbf{B}^* = C_1^*\mathbf{u}_1^* + C_2^*\mathbf{u}_2^* + C_3^*\mathbf{u}_3^* = \\ &= (-C_1)\mathbf{u}_1 + (-C_2)\mathbf{u}_2 + C_3(-\mathbf{u}_3) = \\ &= -\mathbf{C} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\end{aligned}$$

所以，$\mathbf{C} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$是伪矢量。

三个矢量的数性积可看成由三个矢量为棱边构成的体积；两个矢量的矢性积可看成由两个矢量为棱边构成的有方向的面积，因而，由以上讨论可见，体积是伪标量，而面积则是伪矢量。

第四节　物理恒量的一般概念

以上介绍了标量和矢量的一般知识，并引进了在笛卡尔坐标系下，这两类物理量为物理恒量的充要条件。引进绝对标量，使能建立起表述温度、密度等空间分布的标量场；引进绝对矢量的概念，又使能以矢量场的概念表述速度和加速度的空间分布。对于标量场，只需用一个实数函数表示；对于矢量场，因为矢量具有三个分量，所以，必须有三个实数函数才能表明。

当希望了解标量场的分布强度时，必须引进标量场梯度的概念。对于标量场的梯度，由于它本身是一个矢量，就要有三个实数函数来描述。如设标量函数为$\phi(y_1, y_2, y_3)$，则函数$\phi(y_1, y_2, y_3)$之梯度的三个分量应是

$$\frac{\partial\phi}{\partial y_1},\quad \frac{\partial\phi}{\partial y_2},\quad \frac{\partial\phi}{\partial y_3}$$

如果要了解矢量场中矢量函数的分布强度，由于矢量有三个分量，所以在三维笛卡尔坐标系下，必须有九个实数函数才能表述。以速度矢量$\mathbf{V}$为例，这九个实数函数应是

$$\begin{matrix}\dfrac{\partial V_1}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial V_1}{\partial y_2}, & \dfrac{\partial V_1}{\partial y_3} \\[2ex] \dfrac{\partial V_2}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial V_2}{\partial y_2}, & \dfrac{\partial V_2}{\partial y_3} \\[2ex] \dfrac{\partial V_3}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial V_3}{\partial y_2}, & \dfrac{\partial V_3}{\partial y_3}\end{matrix}$$

只有知道这九个实数函数，才能确定速度矢量场的分布强度。

除此以外，在研究粘性流体或固体中一点的应力时，也常常引进九个实数函数来表示这一点的应力状态；当分析应力场的强度时，应力场的梯度必将有27个实数函数作为它的分量。至于在描述非均匀、各向异性介质的本构关系时，其弹性模量或粘性系数常常要有81个分量才能说明。

综合以上讨论，可发现

（一）、在讨论力学问题时，仅引进标量和矢量的概念是不够的，有许多物理量已超出标量和矢量的范围，有的是为描写介质物理性质而引进的，有的则是在分析某物理性质时才引进的。

（二）、如以 r 表示维度，以 n 表示幂次，则对于三维空间，一切物理量的分量数可统一表示成

$$r^n$$

其中

标量只有一个分量，对应于$n=0$，$r^n=3^0=1$

矢量有三个分量，对应于$n=1$，$r^n=3^1=3$

应力有九个分量，对应于$n=2$，$r^n=3^2=9$

应力场梯度有27个分量，对应于$n=3$，$r^n=3^3=27$

弹性模量有81个分量，对应于$n=4$，$r^n=3^4=81$

为了便于讨论，现令 n 为这些物理量的阶次，并统一称这些物理量为张量。于是，称标量为零阶张量、矢量为一阶张量、应力为二阶张量、应力场梯度为三阶张量、弹性模量为四阶张量。

需要指出的是，二阶以上的张量已不可能象矢量那样有明显的几何意义，但它作为物理恒量，仍可按矢量那样，用分量间的变换关系式来解析定义。如果张量以笛卡尔坐标表示，则称笛卡尔张量或称仿射正交张量（Affined Orthogonal Tensor）。

第五节　矢量的分量和矢量的分解式、基本矢量（Basic Vector）和倒易基本矢量（Reciprocal Basic Vector）、矢量的协变分量（Covariant Component）和矢量的逆变分量（Contravariant Component）

（一）、矢量的分量和矢量的分解式

三维空间中的任一矢量可向不共面的三个任意方向分解。如图1—7所示，矢量**A**可按平行四边形规则，向任意给定的三个不共面的矢量方向（以$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$表示）分解，即矢量**A**可写成

$$\mathbf{A}=\mathbf{OQ}+\mathbf{OR}+\mathbf{OT} \qquad (1\text{—}3)$$

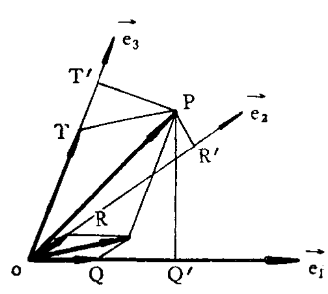


图1—7

式（1—3）中的**OQ**、**OR**、**OT**称矢量**A**沿$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$方向的可分解分量（Resolved Component）。如以$\boldsymbol{l}_1$、$\boldsymbol{l}_2$、$\boldsymbol{l}_3$表示$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$三个矢量的单位矢量，则

$$\mathbf{OQ}=|\mathbf{OQ}|\boldsymbol{l}_1,\quad \mathbf{OR}=|\mathbf{OR}|\boldsymbol{l}_2,\quad \mathbf{OT}=|\mathbf{OT}|\boldsymbol{l}_3$$

只要l_1、l_2、l_3给定（或$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$给定），则分解式（1—3）是唯一的。

除此以外，也可将矢量**A**向l_1、l_2、l_3方向投影，可得出所谓投影分量**OQ′**、**OR′**、**OT′**，在$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$为任意给定时，因为投影分量不满足平行四边形规则，所以不可能用投影分量写出矢量**A**的分解式。

只有当三个方向互成正交时，可分解分量和投影分量重合一致。由于这一原因，对于正交的笛卡尔坐标系不必区别可分解分量和投影分量。

（二）、基本矢量和倒易基本矢量

如令式（1—3）中$\mathbf{OQ}=\alpha\mathbf{e}_1$、$\mathbf{OR}=\beta\mathbf{e}_2$、$\mathbf{OT}=\gamma\mathbf{e}_3$则式（1—3）可改写成

$$\mathbf{A}=\alpha\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_2+\gamma\mathbf{e}_3 \tag{1—4}$$

或（1—4）也是矢量**A**的分解式，只要$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$给定，这一分解式也是唯一的。现在的问题是，已知$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$和**A**，如何求得α、β、γ。

为了回答这一问题，任取一笛卡尔坐标系$oy_1y_2y_3$，然后将矢量**A**及其可分解分量向坐标轴方向投影，则得

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\alpha e_{11}+\beta e_{21}+\gamma e_{31}\\A_2&=\alpha e_{12}+\beta e_{22}+\gamma e_{32}\\A_3&=\alpha e_{13}+\beta e_{23}+\gamma e_{33}\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

显然，式（a）是以α、β、γ为未知数的代数方程组，将式（a）中的α、β、γ解出，例如，解出α，则

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix}A_1&A_2&A_3\\e_{21}&e_{22}&e_{23}\\e_{31}&e_{32}&e_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e_{11}&e_{12}&e_{13}\\e_{21}&e_{22}&e_{23}\\e_{31}&e_{32}&e_{33}\end{vmatrix}}=\frac{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}$$

或

$$\alpha=\mathbf{A}\cdot\left[\frac{(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}\right] \tag{b}$$

由矢量代数可知，$\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)$是以$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$为棱边构成平行四边形的体积$v$；$\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3$是和$\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3$相垂直的某一矢量，因而

$$\left[\frac{(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}\right]$$

必然也是矢量，现令其为$\mathbf{e}^1$，于是

$$\mathbf{e}^1=\frac{(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)} \tag{c}$$

注意，此处$\mathbf{e}^1$中的“1”是作为标识的上指标，并非幂次。如果分别求出β、γ，则

$$\beta=\mathbf{A}\cdot\left[\frac{\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}\right],\qquad\gamma=\mathbf{A}\cdot\left[\frac{\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}\right]$$

同样，令

$$\mathbf{e}^2=\frac{\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)};\qquad \mathbf{e}^3=\frac{\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}\tag{c}$$

或统一写成

$$\mathbf{e}^k=\frac{\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j}{\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k)}\tag{1—5}$$

式中　i，j，k分别为1，2，3，并按偶顺序排列。

利用式（1—5），则式（a）可改写为

$$\mathbf{A}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}^1)\mathbf{e}_1+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}^2)\mathbf{e}_2+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}^3)\mathbf{e}_3\tag{1—6}$$

如已知$\mathbf{A}$、$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$，则矢量$\mathbf{A}$向$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$及$\mathbf{e}_3$方向的分解式，其系数α、β、γ可按式（b）一一求得。

式（c）中的$\mathbf{e}^1$、$\mathbf{e}^2$、$\mathbf{e}^3$称倒易基本矢量，倒易基本矢量的引进，对今后的讨论十分重要。为了较好地理解倒易基本矢量，下面进一步讨论它和基本矢量的一些关系如下：

一、由式（1—5）以及矢量数性积的性质，不难看出，$\mathbf{e}^1$垂直于$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$；$\mathbf{e}^2$垂直于$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_3$；$\mathbf{e}^3$垂直于$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$。

二、根据两类基本矢量的正交性，则

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}^1=\dfrac{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}=1;\qquad \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}^2=\dfrac{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}=0\\ \text{依此类推，可得}\\ \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}^2=1;\ \ \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}^3=1;\ \ \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}^3=0;\ \ \cdots\cdots\end{array}\right\}\tag{1—7}$$

三、因为$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$互成斜交，所以和正交情况不同，即使$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$为单位矢量，但由于这些单位矢量构成的体积为斜六面体，其体积不等于1。由式（1—5）可知，纵使$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$为单位矢量，但其倒易基本矢量并非单位矢量。

四、当$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$互成正交，则倒易基本矢量与对应的基本矢量方向一致（例为$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{e}^1$，余类推），但大小不等，由

$$\mathbf{e}^1=\frac{\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}$$

如果$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$互成正交，则

$$\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)=|\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2||\mathbf{e}_3|;\ \ \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=|\mathbf{e}_2||\mathbf{e}_3|\boldsymbol{l}_1$$

于是

$$\mathbf{e}^1=\frac{\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}=\frac{|\mathbf{e}_2||\mathbf{e}_3|\boldsymbol{l}_1}{|\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2||\mathbf{e}_3|}=\frac{\boldsymbol{l}_1}{|\mathbf{e}_1|}$$

或

$$|\mathbf{e}^1||\mathbf{e}_1|=1$$

式中　$\boldsymbol{l}_1$——基本矢量$\mathbf{e}_1$方向的单位矢量。

上式表明，在正交情况下，倒易基本矢量的大小和对应的基本矢量大小互为倒数。

当$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$互成正交且为单位矢量时（即$\mathbf{e}_1=\mathbf{u}_1$、$\mathbf{e}_2=\mathbf{u}_2$、$\mathbf{e}_3=\mathbf{u}_3$），得

$$\mathbf{e}^1=\frac{\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}=(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)=\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3=\mathbf{u}_1$$

同理，$\mathbf{e}^2=\mathbf{u}_2$、$\mathbf{e}^3=\mathbf{u}_3$。

这种特殊情况对应于笛卡尔坐标系的单位矢量，因此，对于笛卡尔坐标系，不必区别基本矢量和倒易基本矢量。

五、若令v'为三个倒易基本矢量为棱边所围成的体积，

则

$$v'=\mathbf{e}^1\cdot(\mathbf{e}^2\times\mathbf{e}^3)$$

由式（c）及矢量恒等式，得

$$v'=\frac{1}{[\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)]^3}\left\{(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)\cdot[(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)\times(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}=\frac{1}{v}\ ^*$$

或

$$v'v=1 \tag{1—8}$$

六、如果将矢量$\mathbf{A}$向三个倒易基本矢量方向分解，则由

$$\mathbf{A}=\alpha'\mathbf{e}^1+\beta'\mathbf{e}^2+\gamma'\mathbf{e}^3$$

可求得

$$\alpha'=\mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{e}^2\times\mathbf{e}^3}{\mathbf{e}^1\cdot(\mathbf{e}^2\times\mathbf{e}^3)};\qquad \beta'=\mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{e}^3\times\mathbf{e}^1}{\mathbf{e}^1\cdot(\mathbf{e}^2\times\mathbf{e}^3)}$$

$$\gamma'=\mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{e}^1\times\mathbf{e}^2}{\mathbf{e}^1\cdot(\mathbf{e}^2\times\mathbf{e}^3)}$$

由于

$$\mathbf{e}^1\cdot(\mathbf{e}^2\times\mathbf{e}^3)=v';\quad v'=\frac{1}{v};\quad \mathbf{e}^2=\frac{\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1}{v},\quad \mathbf{e}^3=\frac{\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2}{v}$$

因而

$$\frac{\mathbf{e}^2\times\mathbf{e}^3}{\mathbf{e}^1\cdot(\mathbf{e}^2\times\mathbf{e}^3)}=v\,\frac{[(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)\times(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)]}{v^2}=$$

$$=\frac{[\mathbf{e}_2\cdot(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)]\mathbf{e}_1-[\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)]\mathbf{e}_2}{v}$$

* 关于 $(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)\cdot[(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)\times(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)]$ 的计算

由 $(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)\times(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)=(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\times(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3)=$

$=[\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)]\mathbf{e}_1-[\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)]\mathbf{e}_3=$

$=\mathbf{e}_1[\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)]$

于是 $(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)\cdot[(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)\times(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)]=[\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)]^2$