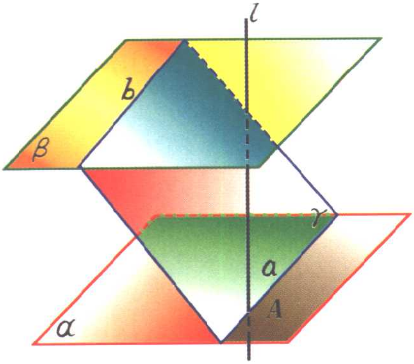
名师解惑丛书



线面体

孔繁铃　编著

山东教育出版社

名师解惑丛书

线　面　体

孔[illegible]铃　编著

山东教育出版社

名师解惑丛书

线面体

孔繁铃　编著

出 版 者：山东教育出版社
（济南市纬一路 321 号　邮编：250001）
电　　话：(0531)2023919　传真：(0531)2050104
网　　址：http://www.sjs.com.cn
发 行 者：山东教育出版社
印　　刷：山东新华印刷厂临沂厂
版　　次：2001 年 7 月第 1 版
2001 年 7 月第 1 次印刷
规　　格：787mm×1092mm　32 开本
印　　张：8.5
字　　数：162 千字
书　　号：ISBN 7－5328－3117－5/G·2815
定　　价：7.90 元

再版说明

“名师解惑丛书”出版发行以来，以其新颖的编写体例和缜密的知识阐述，深受广大读者青睐，曾连续多次重印．

近几年来，基础教育正发生深刻的改革：“科教兴国”战略深入人心，素质教育全面推进，与此同时，以“普通高等学校招生全国统一考试试卷”为主要载体，所反映出的高考招生改革信息和发展趋势，迫切需要广大教师和莘莘学子以新的视角和思维，关注并投身到这场改革之中．

有鉴于此，我们对“名师解惑丛书”进行了全面修订．此次修订将依然保持被广大读者认同的，每一册书为一个专题讲座的模式，围绕“如何学”，“如何建立知识间的联系”，“如何学以致用”等，帮助广大学生读者解决在学习知识和考试答卷过程中可能遇到的疑难问题．更重要的是，最新修订的“名师解惑丛书”在如何培养学生的创新精神和创造能力，联系现代科学技术及其在日常生产生活中的应用方面，做了较大的充实和修订……

丛书的编写者和出版者相信，您正在翻阅的这本书，将有助于您目前的学习．

作 者 的 话

直线、平面、简单几何体构成了中学立体几何的全部内容，它体现了人类认识由一维向二维，三维的跃进，它对于培养学生空间想像能力、运算能力以及逻辑思维能力具有非常重要的作用．对高中学生而言，线、面、体的基础知识及与之相关的数学能力体现了中学数学教学大纲和高考数学试题命题的双重要求．

为了拓宽学生视野，激发学生的学习兴趣，帮助他们更加系统、深入地梳理直线、平面、简单几何体的相关知识，特编写了这本小册子．在编写过程中，注意了立足教材、拓宽加深、揭示内在规律、剖析思想方法．本书具有如下特点：

1．对各单元重点知识内容进行了深入的挖掘，揭示了知识的蕴含和联系，对学生容易出错和忽略的问题进行了典型剖析，以帮助他们建立正确的解题思路．

2．对于通性通法进行重点诠释，揭示规律，注重导评．

3. 注重一题多解和数学思想方法的渗透，着重培养学生灵活运用知识解决问题的能力.

希望本书成为学生学好直线、平面、简单几何体，解决与之有关的疑难问题，发展数学思维能力的良师益友.在本书编写过程中，全国著名特级教师李应林先生等曾提出很多好的建议，在此一并致谢.

2000 年 10 月

作者简介 孔繁铃，1941 年生，中学高级教师，山东省特级教师，现任泰安市泰山区教研室主任，泰安市教育学会中学数学教学研究会副理事长.近年来，先后在省级以上刊物发表论文 10 余篇，出版《解析几何分类解题指导》、《高中数学解题思路》等著作 4 部，参与编写中学数学教学辅导材料多种.

目　录

引 子

人们生活在三维空间里,我们日常生活或生产实践中所接触到的东西,皆呈现为“线”、“面”、“体”等几何图形.所以,掌握好“线、面、体”的相关知识,对于我们学习其它各种科学知识,以及参加生产实践都是完全必要的.

要学好“线、面、体”,必须掌握科学的思想方法.

第一,建立立体观念,培养空间想像能力.空间想像能力是最重要、最基本的数学能力之一,它是学好立体几何的基础.为此,要多观察身边的事物,善于由实物模型抽象出几何图形.要学会识别图形,辨识几何体的形状、大小;判断几何体间的位置关系,几何体中各元素在平面上、空间中的相互位置关系,以及相对于特定位置的排列顺序,要把概念与图形结合起来.立体几何中的概念是发挥空间想像能力的基础,只

有正确理解概念，才能在头脑中想像并勾画出相应的几何图形，才能进一步研究各几何元素的大小及位置关系.

第二，弄清基本概念的内涵与外延，牢记各种定义、公理、定理、公式等，掌握它们之间的内在联系.

第三，学会构造几何图形和联想一些具体、简单的立体几何模型.例如，在求二面角时往往用三垂线定理构造出平面角.再如，由于正方体和长方体中包含着立体几何中所研究的点、线、面的各种位置关系，所以，在解决有关线、面、角之间关系的客观题时，常常借助正方体或长方体模型，使问题得到迅速解决.

第四，掌握转化、化归的思想方法.如线线平行或垂直与线面平行或垂直，面面平行或垂直间的相互转化；点到线的距离，线到线的距离，线到面的距离，面到面的距离之间的相互转化……化归思想的运用在立体几何解题中几乎无处不在，必须切实掌握.

第五，注意联系平面几何知识，用联想对比的方法，区别异同，交互为用.有些立体几何问题可采用与平面几何中类似的方法解决，有些则可降维转化为平面几何问题去解决.

第六，要学会正确处理图形.包括对图形的分割，补全，折叠，展开等变形，以及对图形的平移变形，平面外处理，复杂图形简单化，非标准图形标准化等.

以上几点，作为学习“线、面、体”(立体几何)的建议，希望能对读者有所帮助.

一、平面与空间直线

点动成线，线动成面，以点作为元素，直线和平面都是由点构成的集合.

平面是最基本的几何概念，平面的特征是平直性和无限延展性.

(一)平面的基本性质

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

用符号表示为

$$A\in l, B\in l, A\in \alpha, B\in \alpha \Rightarrow l\subset \alpha.$$

从集合的角度看，这个公理就是说，如果一条直线(点集)中有两个元素(点)属于一个平面(点集)，那么这条直线就是这个平面的真子集.

公理 1 的作用是既可判定直线是否在平面内，又能检验平面.

公理 2　如果两个平面有一个公共

点，那么它们有一条过这个公共点的直线.

用符号表示为

$$P\in\alpha\cap\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l\text{ 且 }P\in l.$$

它反映了面面相交成线，即两个平面的交集为一直线.

公理 3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

公理 3 提供了确定平面的最基本的依据.

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面.

公理 3 和三个推论中“有且只有一个”的含义为：“有”是说图形存在，“只有一个”是说图形唯一，它们是确定平面的依据.

1. 准确把握确定平面的条件

例 1　在空间内可以确定一个平面的条件是(　　).

(A)两两相交的三条直线

(B)三条直线，其中的一条与另外两条分别相交

(C)三个点

(D)三条直线，它们两两相交，但不交于同一点

(E)两条直线

分析：误选(A)，是忽视了三条直线交于同一点，而不在同一平面内的情况；误选(B)或(E)，是忽视了两直线异面的情况；误选(C)，是忽视了三点共线的情况；只有条件(D)中的三条直线，它们两两相交，且不交于同一点，因而其三个交点

不在同一条直线上，由公理 3 知其确定一个平面.

例2 异面直线 a,b 与异面直线 c,d 分别相交，由 a,b,c,d 最多可以确定(　　)平面.

(A)3 个　　(B)4 个　　(C)5 个　　(D)6 个

分析: 两条相交直线可以确定一个平面，所以，a,b,c,d 最多可以确定 4 个平面，故正确答案为(B).

例3 设直线 a 上有 6 个点，直线 b 上有 9 个点，则这 15 个点能确定______个平面.

分析: 当直线 a,b 共面时可确定一个平面；当直线 a,b 异面时，直线 a 与直线 b 上的 9 个点分别可确定 9 个不同的平面；直线 b 与直线 a 上的 6 个点分别可确定 6 个不同的平面，所以一共可确定 15 个平面. 故应填写：1 个或 15 个.

2. 掌握有关点共线、线共点及共面问题的证明思路与方法

(1)证明空间三点共线.

基本方法：应用公理 2，只需证明三点都是两个平面的公共点，即可推出三点在两个平面的交线上.

例4 如图1-1，E、F、G、H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 上的点，且 EF 与 GH 交于 P 点.

求证：A、C、P 三点共线.

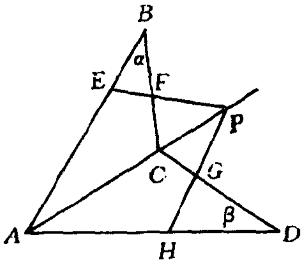


图1-1

分析: $\because AC=$ 平面 $ACB\cap$ 平面 ACD，$\therefore$ 只需证 $P\in$ 平面 ACB 且 $P\in$ 平面 ACD.

证明：设相交直线 AB 与 BC 确定平面 α，AD 与 AC 确定平面 β，则 $\alpha\cap\beta=AC$.

$\because E\in AB, AB\subset\alpha$,

$\therefore E\in\alpha$.

同理，$F\in\alpha$,

$\therefore EF\subset\alpha$.

同理，$HG\subset\beta$.

又 $EF\cap HG=P$,

$\therefore P\in\alpha, P\in\beta$,

$\therefore P\in\alpha\cap\beta=AC$,

$\therefore A, C, P$ 三点共线.

(2)证明空间三线共点.

基本方法：先证明两条直线相交于一点，再证明这个点在第三条直线上.而证明点在直线上常用公理 2，即只需证明这个点是两个平面的公共点，这条直线是两个平面的交线.

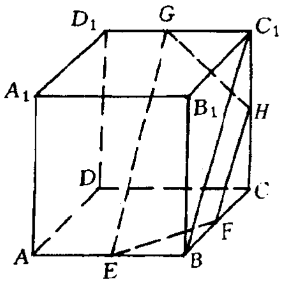


图 1－2

例 5 如图 1－2，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G、H 分别为棱 AB, BC, C_1D_1, CC_1 的中点，

求证：EF、GH、DC 延长后相交于一点.

证明：$\because H$、F 分别为 CC_1, BC 之中点，

$\therefore HF \parallel BC_1, HF = \frac{1}{2}BC_1,$

又 $BC_1 \underline{\underline{\parallel}} EG,$

$\therefore HF \parallel EG$，且 $HF = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{1}{2}EG,$

故 $EFHG$ 为梯形，

设 EF, GH 延长后相交于一点 P.

$\because EF \subset$ 平面 $ABCD, P \in EF,$

$\therefore P \in$ 平面 $ABCD$.

同理，$P \in$ 平面 DCC_1D_1.

$\therefore P \in$ 平面 $ABCD \cap$ 平面 $DCC_1D_1 = DC,$

$\therefore EF, GH, DC$ 延长后相交于一点.

(3)证明点共面或线共面.

证明的理论依据是公理 3 及其推论，证明方法是直接根据公理 3 及其推论进行证明.既可利用已知的部分条件确定一个平面，证明其它元素在该平面内，也可分别利用已给的部分元素确定几个平面，然后证明它们重合.

例 6　如图 1－3，已知 $ABCDEF$ 是对边平行且相等的空间六边形，G, H, K, M, N, P 分别是 AB, BC, CD, DE, EF, FA 的中点.

求证：G、H、K、M、N、P 共面.

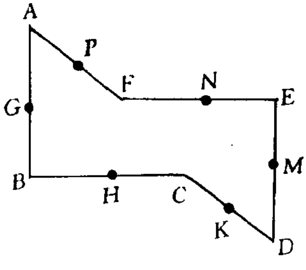


图 1－3

分析:因已知中给出了平行且相等的关系及六点皆为中点的条件,故不难想到利用三角形中位线性质,先证明 H、K、P、N 四点共面 α, G、P、H、N 共面 β, H、K、M、N 共面 γ,而后证明 α、β、γ 三平面重合.

证明:$\because AB \underline{\underline{//}} DE$,

$\therefore ABDE$ 是平行四边形,

$\therefore BD \underline{\underline{//}} AE$.

又 H、K、N、P 分别是 BC, CD, EF, AF 的中点,

$\therefore HK \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}BD$, $PN \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}AE$,

$\therefore HK \underline{\underline{//}} PN$,

$\therefore H$、K、N、P 四点共面,设此平面为 α.

$\because FN \underline{\underline{//}} BH$,

$\therefore BHNF$ 为平行四边形,

$\therefore HN // BF$.

又 $GP // BF$,

$\therefore GP // HN$.

$\therefore G$、P、H、N 四点共面,设此平面为 β.

$\because$ 不共线的三点 P、H、N 既在平面 α 内,又在平面 β 内,

$\therefore$ 平面 α 与平面 β 重合.

同理, $KM // HN$, K、M、N、H 四点共面,设此平面为 γ.

又不共线的三点 K、H、N 既在 α 内,又在 γ 内,

$\therefore \gamma$ 与 α 重合.