目　　录

第一章　行　列　式

§1　行列式的概念

（教材$P.13$—$P.14$）

1．试用行列式解方程组：

（1）　$\begin{cases} x\operatorname{tg}\alpha + y = \sin(\alpha+\beta) \\ x - y\operatorname{tg}\alpha = \cos(\alpha+\beta) \end{cases}$

解：这时

$$D = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 \\ 1 & -\operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix} = -\operatorname{tg}^2\alpha - 1$$

$$= -\sec^2\alpha = -\frac{1}{\cos^2\alpha} \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \sin(\alpha+\beta) & 1 \\ \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$$

$$= -\operatorname{tg}\alpha\sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$= -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

$$-(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$

$$= -\frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\cos\alpha} - \sin\alpha\sin\beta$$

$$-\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$= -\frac{\sin^2\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$= -\frac{\cos\beta(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$= -\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & \sin(\alpha+\beta) \\ 1 & \cos(\alpha+\beta) \end{vmatrix}$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\cos(\alpha+\beta) - \sin(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$

$$-(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \frac{\sin^2\alpha\sin\beta}{\cos\alpha} - \sin\alpha\cos\beta$$

$$-\cos\alpha\sin\beta$$

$$= -\frac{\sin\beta(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$= -\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$$

因此，所给方程组的唯一解是

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}}{-\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \cos\alpha\cos\beta$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{-\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}}{-\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \cos\alpha\sin\beta$$

（2） $$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \omega y + \omega^2 z = \omega \\ x + \omega^2 y + \omega z = \omega^2 \end{cases}$$

解：这里ω是1的虚立方根，所以$\omega^3=1$.

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}=\omega^2+\omega^2+\omega^2-\omega-\omega-\omega^4$$

$$=3\omega^2-2\omega-\omega^3\omega$$

$$=3\omega^2-3\omega$$

$$\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\\omega&\omega&\omega^2\\\omega^2&\omega^2&\omega\end{vmatrix}=\omega^2+\omega^3+\omega^4-\omega^3-\omega^2-\omega^4$$

$$=0$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}=\omega^2+\omega^2+\omega^2-\omega-\omega-\omega^4$$

$$=3\omega^2-2\omega-\omega^3\omega$$

$$=3\omega^2-3\omega$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega\\1&\omega^2&\omega^2\end{vmatrix}=\omega^3+\omega^2+\omega-\omega-\omega^2-\omega^3$$

$$=0$$

所以，方程组有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D}=0$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{3\omega^2-3\omega}{3\omega^2-3\omega}=1$$

$$z=\frac{D_3}{D}=0$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

2. 写出4阶行列式中所有带负号并包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项。

解：由行列式的定义，4阶行列式中含 $a_{11}a_{23}$ 的一般项是

$$\pm a_{11}a_{23}a_{3p}a_{4q}$$

其中 pq 是数码2，4的排列，是2 4或4 2，所以包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项只有两个

$$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \quad 及 \quad a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$$

$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 在原行列式中位置如图1，互换第2、3列就可以把 a_{11}，a_{23}，a_{32}，a_{44} 都移到新行列式的主对角线上，如图2。因所需互换个数是1个，是奇数，所以取负号。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & * & * \\ * & * & a_{23} & * \\ * & a_{32} & * & * \\ * & * & * & a_{44} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & * & * & * \\ * & a_{23} & * & * \\ * & * & a_{32} & * \\ * & * & * & a_{44} \end{vmatrix}$$

图 1 图 2

$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 在原行列式中位置如图3，互换第2、3列，再互换第3、4列，就可以把 a_{11}，a_{23}，a_{34}，a_{42}都移到新行列式的主对角线上，如图4。因所需互换个数是2个，是偶数，所以带正号。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & * & * \\ * & * & a_{23} & * \\ * & * & * & a_{34} \\ * & a_{42} & * & * \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & * & * & * \\ * & a_{23} & * & * \\ * & * & a_{34} & * \\ * & * & * & a_{42} \end{vmatrix}$$

图 3 图 4

∴ 四阶行列式中带有负号并包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项只有 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

3. 用行列式的定义，计算：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解：由行列式的定义，5 阶行列式展开式中任一项是

$$\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5} \qquad (1)$$

其中$p_1p_2p_3p_4p_5$是数码 1，2，3，4，5 的一个排列。

因为（1）的因子在行列式的不同行、不同列，所以 p_3，p_4，p_5 中至少有一个数取 3，4，5 的某一个，因此（1）中至少有一个因子是零，所以每项都为零。故原行列式等于零。

4. 在一个 n 阶行列式中等于零的元如果比 n^2-n 还多，那末此行列式等于零。为什么？

答：n 阶行列式中有 n^2 个元，由题设，等于零的元比 n^2-n 还多，那么不为零的元就比 $n^2-(n^2-n)=n$ 还少，因此至少有一行或一列的元都是零。

又因为行列式的展开式中每一项都包含 n 个不同行、不同列的元，所以这 n 个元中至少有一个元等于零，从而每一项就等于零，故行列式等于零。

5. 行列式中任一项的各元是否都可以用互换两行或两列把它移到新行列式的主对角线上？

答：行列式中任一项的各元都可以用互换两行或两列把它移到新行列式的主对角线上，现用数学归纳法证明如下：

当 $n=1$ 时无需对换。

假设 $n=k-1$ 时命题成立。

当 $n=k$时，k 阶行列式的一般项是

$$\pm a_{1p_1}\cdots\cdots a_{k-1,p_{k-1}}a_{k,p_k} \quad (1)$$

其中，$p_1p_2\cdots p_{k-1}p_k$ 是 k 个数码1，2，$\cdots k$ 的一个排列

$\because$ （1）的 n 个元在行列式的不同行、不同列

$\therefore$ 数码 p_1，p_2，$\cdots$，p_{k-1}，p_k 中必有一个等于 k。不妨设 $p_1=k$。交换第1行与第 k 行，则 a_{1p_1} 在新行列式的第 k 行、第 k 列。而其他元都在前 $k-1$ 行、前$k-1$列，由归纳假设，这 $k-1$ 个元用交换两行或两列移到新行列式的主对角线上。

$\therefore$ 当 $n=k$ 时命题成立。

故命题对所有自然数 n 都成立。

6．假如把行列式中每项的 n 个元都移到次对角线上，是否也能得出它的符号规律？

答：把行列式中每项的 n 个元都移到次对角线上，也能得出它的一般的符号规律，论证如下：

1° 类似于课本第一章§1定理，可以证明

定理1′ 在 n 阶行列式中某项的 n 个元，如果用不同的方法互换两行或两列，把这 n 个元都移到两个新行列式的次对角线上，那末所用互换个数的奇偶性是一致的。（证明方法同定理1，略）

由定理1′，把行列式中某一项的 n 个元都移到新行列式的次对角线上，可以考虑成由以下两步完成的：

首先将 n 个元都移到主对角线上；

再将主对角线上这 n 个元移到次对角线上。

2° 下面给出如下的

引理 将 n 阶行列式主对角线上 n 个元逐次互换两行或两列移到次对角线上所需互换的个数

当$\frac{n}{4}$的余数是 0 或 1 时是偶数；

当$\frac{n}{4}$的余数是 2 或 3 时是奇数。

证明：用数学归纳法。

当 $n=1$ 时无须对换；

当 $n=2$ 时，对换第 1 、 2 列，需 1 次对换；

当 $n=3$ 时，对换第 1 、 3 列，需 1 次对换；

当 $n=4$ 时，对换第 1 、 4 列及对换第 2 、 3 列，需 2 次对换。

∴ $n\leqslant 4$ 时引理成立。

假设 $n=k$ 时引理成立。

当 $n=k+1$ 时

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix} \tag{I}$$

先将由前 k 行、前 k 列组成的 k 阶子式主对角线上元a_{11}，…，a_{kk}经互换两列移到 k 阶子式的次对角线上

$$\begin{vmatrix} & & & a_{11} & \\ & & a_{22} & & \\ & ⋰ & & & \\ a_{kk} & & & & \\ & & & & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix} \tag{II}$$

完成这一步所需对换的个数，由假设

$\frac{k}{4}$的余数是 0 或 1 时是偶数；

$\frac{k}{4}$的余数是 2 或 3 时是奇数。

再把第 $k+1$ 列依次与第 k、$k-1$、…、2、1列对换，完成这一步需 k 个对换。

这样将全部元都移到了次对角线上

$$\begin{vmatrix} & & & a_{11} \\ & & a_{22} & \\ & \diagup & & \\ a_{k+1,k+1} & & & \end{vmatrix} \qquad (\mathrm{III})$$

由（Ⅰ）到（Ⅲ）所需行或列的对换个数的奇偶性如下表：

$\frac{k+1}{4}$的余数	$\frac{k}{4}$的余数	k的奇偶性	由（Ⅰ）到（Ⅱ）对换个数	由（Ⅰ）到（Ⅲ）对换个数
0	3	奇数	奇数	偶数
1	0	偶数	偶数	偶数
2	1	奇数	偶数	奇数
3	2	偶数	奇数	奇数

∴ $n=k+1$时引理成立。

故引理对所有自然数都成立。

3。 下面建立

符号法则 行列式展开式中每项的符号可以这样来确定：逐次互换两行或两列，把其中 n 个元都移到次对角线上

时，

如果$\frac{n}{4}$的余数是 0 或 1，则当所需互换个数是偶数时带正号，奇数时带负号；

如果$\frac{n}{4}$的余数是 2 或 3，则当所需互换个数是奇数时带正号，偶数时带负号。

可以把课本第一章§1的法则称法则 1，这个结论称法则 $1'$。

4° 下面证明法则$1'$的结论与法则 1 是一致的。

$\frac{n}{4}$的余数	变到(Ⅰ)所需对换个数	由(Ⅰ)变到(Ⅱ)所需对换个数	变到(Ⅲ)所需对换总个数	应带符号	
				法则 1	法则$1'$
0 或 1	偶数	偶数	偶数	+	+
	奇数	偶数	奇数	−	−
2 或 3	偶数	奇数	奇数	+	+
	奇数	奇数	偶数	−	−

由上表，法则 1 与法则$1'$的结论是一致的。

以上讨论说明，把行列式中每项的 n 个元移到次对角线上时，一般的符号规律是存在的。当然，法则$1'$较法则 1 复杂，使用起来比较困难。

§2 行列式的基本性质

（教材$P.23$—$P.24$）

1. 计算行列式：

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

（1）
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解

$$\text{原式}\xlongequal[(4)-(1)]{(2)-(1)}{}^{*}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}\xlongequal{(3)-(2)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(3,\ 4)}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}=-(1\times1\times3\times7)$$

$$=-21$$

（2）
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

注： 本习题解中，记号
$(i)+k(j)$表示第i行加上第j行的k倍；$k(i)$表示第i行乘以k；$(i,\ j)$表示对换第i行与第j行；〔　〕表示相应的列变换。

解：

$$\text{原式}\xlongequal[(4)-(1)]{\substack{(2)-(1)\\(3)-(1)}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=1\times(-2)\times(-2)\times(-2)$$

$$=-8$$

（3）
$$\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$$

解：

$$\text{原式}\xlongequal{[1]+[2]+[3]+[4]}\begin{vmatrix}3&1&1&1\\3&0&1&1\\3&1&0&1\\3&1&1&0\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(4)-(1)]{\substack{(2)-(1)\\(3)-(1)}}3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=3\times1\times(-1)^3=-3$$

（4）$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

解：

$$原式\underline{\underline{(1)+(2)+(3)}}\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\substack{[2]-[1] \\ [3]-[1]}}}(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(-a-b-c)^2$$
$$=(a+b+c)^3$$

（5）$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & \cdots & 3 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & \cdots & n-1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & \cdots & 3 & n \end{vmatrix}$

解：

$$\text{原式}\xlongequal[\text{第 3 行}]{\text{各行减去}}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(3)+\frac{3}{2}(1)+3(2)}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-3 \end{vmatrix}$$

$$=(-2)\times(-1)\times 3\times(n-3)!$$

$$=6\cdot(n-3)!$$

（6）$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & b \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$

解：

$$\text{原式}\xlongequal[{[2]-[1]}]{\substack{[4]-[2]\\ [3]-[2]}}\begin{vmatrix} a & b-a & 0 & 0 \\ a & b-a & a-b & 0 \\ a & 0 & b-a & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(2)+(3)}\begin{vmatrix} a & b-a & 0 & 0 \\ 2a & b-a & 0 & 0 \\ a & 0 & b-a & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(1)-(2)}\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 2a & b-a & 0 & 0 \\ a & 0 & b-a & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$=a(b-a)^3$

2. 证明下列两式：

$$(1)\ \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}=a^4$$

证明：

$$左端\xlongequal[(4)-(1)]{(2)-(1)\ (3)-(1)}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(4)-3(2)]{(3)-2(2)}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(4)-3(3)}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$=a^4$

$\therefore$ 左端=右端

(2) $\begin{vmatrix} by+az & bz+ax & bx+ay \\ bx+ay & by+az & bz+ax \\ bz+ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$

证：

$$左端=\begin{vmatrix} by & bz+ax & bx+ay \\ bx & by+az & bz+ax \\ bz & bx+ay & by+az \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} az & bz+ax & bx+ay \\ ay & by+az & bz+ax \\ ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} by & bz & bx+ay \\ bx & by & bz+ax \\ bz & bx & by+az \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & ax & bx+ay \\ bx & az & bz+ax \\ bz & ay & by+az \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} az & bz & bx+ay \\ ay & by & bz+ax \\ ax & bx & by+az \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} az & ax & bx+ay \\ ay & az & bz+ax \\ ax & ay & by+az \end{vmatrix}$$

$$=b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix}+ab^2\begin{vmatrix} y & z & y \\ x & y & x \\ z & x & z \end{vmatrix}+ab^2\begin{vmatrix} y & x & x \\ x & z & z \\ z & y & y \end{vmatrix}+$$

$$+a^2b\begin{vmatrix} y & x & y \\ x & z & x \\ z & y & z \end{vmatrix}+a^2b\begin{vmatrix} z & x & x \\ y & z & z \\ x & y & y \end{vmatrix}+a^3\begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com