目 录

前言

第一篇 理论力学

第一章 静力学基础 …… 2
第一节 力的概念 …… 2
第二节 平面汇交力系的合成运算 …… 5
第三节 力对点之矩 …… 7
第四节 力偶的概念及其运算法则 …… 10
第五节 力的平移定理 …… 12
第六节 约束与约束反力 …… 13
第七节 受力图 …… 16
小结 …… 18
思考题 …… 19
习题 …… 20
第二章 平面力系 …… 24
第一节 平面任意力系的概念、简化及简化结果的讨论 …… 24
第二节 平面任意力系的平衡方程及其应用 …… 26
第三节 静定与静不定问题及物体系统的平衡 …… 32
第四节 平面静定桁架内力的计算 …… 35
小结 …… 37
思考题 …… 37
习题 …… 38
第三章 空间力系 …… 43
第一节 力在空间直角坐标轴上的投影 …… 43
第二节 空间汇交力系的合成与平衡 …… 45
第三节 力对轴之矩 …… 46
第四节 空间任意力系的平衡方程 …… 47
第五节 重心的概念 …… 52
第六节 重心坐标公式 …… 52
第七节 重心及形心位置的求法 …… 53
小结 …… 56
思考题 …… 56
习题 …… 56
第四章 摩擦 …… 61
第一节 滑动摩擦 …… 61
第二节 考虑滑动摩擦时的平衡问题 …… 64
第三节 滚动摩擦简介 …… 70
小结 …… 71
思考题 …… 72
习题 …… 73
第五章 点的运动 …… 76
第一节 用矢径法表示点的位置、速度和加速度 …… 76
第二节 用直角坐标法确定点的位置、速度和加速度 …… 77
第三节 用弧坐标法确定点的位置，用自然坐标法确定点的速度和加速度 …… 80
小结 …… 86
思考题 …… 86
习题 …… 86
第六章 刚体的基本运动 …… 89
第一节 刚体的平行移动 …… 89
第二节 刚体绕定轴转动 …… 90
第三节 定轴传动系统传动比的计算 …… 94
小结 …… 96
思考题 …… 97
习题 …… 97
第七章 点的合成运动 …… 99
第一节 点的合成运动概念 …… 99
第二节 点的速度合成定理 …… 100
第三节 点的加速度合成定理 …… 102
小结 …… 105
思考题 …… 105
习题 …… 105
第八章 刚体的平面运动 …… 108
第一节 刚体平面运动的运动方程 …… 108
第二节 求平面图形上各点速度的基点法与速度投影法 …… 110

第三节　用瞬心法求平面图形上各点的速度 …… 113
第四节　用基点法求平面图形上各点的加速度 …… 116
小结 …… 117
思考题 …… 118
习题 …… 118
第九章　动力学基础 …… 121
第一节　质点动力学基本方程 …… 121
第二节　质心运动定理 …… 124
第三节　动量定理 …… 127
第四节　动量矩定理 …… 130
第五节　刚体定轴转动微分方程 …… 135
小结 …… 136
思考题 …… 137
习题 …… 138
第十章　动静法 …… 142
第一节　惯性力的概念及质点动力学问题的动静法 …… 142
第二节　刚体惯性力系的简化 …… 144
第三节　质点系的动静法 …… 146
小结 …… 150
思考题 …… 151
习题 …… 152
第十一章　动能定理（能量法） …… 155
第一节　力的功 …… 155
第二节　动能 …… 161
第三节　动能定理 …… 163
第四节　功率与功率方程 …… 166
小结 …… 168
思考题 …… 168
习题 …… 168

第二篇　材料力学

第十二章　轴向拉伸与压缩 …… 175
第一节　轴向拉伸与压缩的概念 …… 175
第二节　截面法、轴力与轴力图 …… 175
第三节　横截面和斜截面上的应力 …… 177
第四节　拉压杆的变形及虎克定律 …… 180
第五节　材料在拉压时的力学性能 …… 182
第六节　拉压杆的强度计算 …… 186
第七节　拉压静不定问题 …… 188
小结 …… 190
思考题 …… 190
习题 …… 191
第十三章　剪切与挤压 …… 196
第一节　剪切的概念及剪切虎克定律 …… 196
第二节　剪切的实用计算 …… 197
第三节　挤压的实用计算 …… 198
第四节　应用实例 …… 199
小结 …… 202
思考题 …… 202
习题 …… 203
第十四章　扭转 …… 205
第一节　扭转的概念、扭矩与扭矩图 …… 205
第二节　圆轴扭转时的应力与强度计算 …… 207
第三节　圆轴扭转时的变形与刚度计算 …… 210
小结 …… 213
思考题 …… 213
习题 …… 214
第十五章　弯曲内力 …… 218
第一节　平面弯曲的概念 …… 218
第二节　梁的计算简图及分类 …… 219
第三节　梁的内力、剪力与弯矩计算 …… 220
第四节　弯矩、剪力与载荷集度间的关系 …… 222
第五节　剪力图与弯矩图的绘制 …… 223
小结 …… 226
思考题 …… 226
习题 …… 227
第十六章　梁弯曲时的强度与刚度计算 …… 230
第一节　实验观察与假设 …… 230
第二节　弯曲正应力的计算 …… 230
第三节　弯曲切应力简介 …… 232
第四节　梁的强度计算 …… 234
第五节　梁的弯曲变形概述 …… 236
第六节　用积分法求梁的变形 …… 237
第七节　用叠加法求梁的变形 …… 238
第八节　简单静不定梁 …… 242
第九节　提高梁的强度和刚度的措施 …… 243

小结 …… 244
思考题 …… 245
习题 …… 245
第十七章　应力状态和强度理论 …… 248
第一节　应力状态的概念 …… 248
第二节　平面应力状态分析（应力圆） …… 249
第三节　三向应力圆及最大切应力 …… 254
第四节　广义虎克定律 …… 255
第五节　强度理论简介 …… 255
小结 …… 260
思考题 …… 260
习题 …… 260
第十八章　组合变形的强度计算 …… 263
第一节　拉伸（压缩）与弯曲组合变形的强度计算 …… 263
第二节　弯曲与扭转组合变形的强度计算 …… 265
小结 …… 269
思考题 …… 270
习题 …… 271
第十九章　电测应力分析 …… 274
第一节　实验应力分析概述 …… 274
第二节　电测法的基本原理 …… 274
第三节　电测法的应用介绍 …… 277
小结 …… 281
思考题 …… 281
第二十章　动载荷 …… 282
第一节　构件作匀加速直线运动或匀速转动时的应力计算 …… 282
第二节　冲击载荷 …… 284
第三节　交变应力及其循环特征 …… 286
第四节　疲劳破坏和持久极限 …… 288
第五节　影响持久极限的因素及强度计算简介 …… 289
小结 …… 291
思考题 …… 292
习题 …… 292
第二十一章　压杆稳定 …… 295
第一节　压杆稳定的概念 …… 295
第二节　细长杆的临界压力 …… 295
第三节　欧拉公式的应用范围及经验公式简介 …… 298
第四节　压杆的稳定性校核 …… 300
第五节　提高压杆稳定性的措施 …… 302
小结 …… 303
思考题 …… 303
习题 …… 303
附录 A　工程力学综合练习 …… 306
附录 B　型钢表 …… 308
附录 C　习题答案 …… 312
参考文献 …… 318

第一篇　理论力学

理论力学是研究物体机械运动一般规律的一门科学。

运动是物质存在的形式，是物质的固有属性。它包括了宇宙中发生的一切变化与过程。因此，物质的运动形式是多种多样的，从简单的位置变化，到各种物理现象、化学现象、直至人的思维与人们的社会活动。

所谓机械运动，是指物体在空间的位置随时间的变化，如日月的运行，车船的行驶，机器的运转，河水的流动及物体的平衡等等，所谓物体的平衡，一般是指物体相对于地面静止或作匀速直线运动。

机械运动不仅广泛地出现在我们的周围，存在于人类的一切劳动生产过程之中，也普遍存在于研究其它运动形式的各门学科之中。因此，研究机械运动，不仅可以解释周围许多现象，为研究其它学科提供条件，更重要的还在于它是现代工程技术的重要理论基础，其中有些问题，还可以直接利用力学知识来解决。

理论力学的内容通常包括以下三个部分：

1）静力学　研究力系的简化与物体在力系作用下的平衡规律。

2）运动学　从几何学的角度来研究物体的运动规律。

3）动力学　研究作用于物体上的力与物体运动变化的关系。

理论力学的研究对象为刚体与质点，撇开物体受力时的变形面获得刚体的概念，不计物体的尺寸而得到质点的概念，这些理想化的力学模型都是将事物抽象化的结果，抽象可以使问题简化。但当研究物体的条件改变后，原来的模型就不再适用了。例如，在讨论物体内部受力情况和它的变形时，刚体模型不再适用，在材料力学中将建立另一种理想的弹性体模型。

理论力学是一门理论性较强的，在工程技术领域中有着广泛应用的技术基础课，它是近代工程技术的重要理论基础之一。同时，它又为工科院校中一系列后继课程，如材料力学、机械原理、机械设计等等，提供必要的基础知识。

理论力学的分析和研究方法在科学研究中有一定的典型性。通过对本课程的学习，有助于培养辩证唯物主义的世界观，有助于提高分析和解决实际问题的能力，为今后从事生产实践、科学研究打下良好的基础。

第一章　静力学基础

静力学是研究物体在力系作用下平衡规律的科学。力系是指作用于同一物体上的一组力。物体的平衡状态是指物体相对于地球处于静止或作匀速直线运动。物体处于平衡状态时，作用于该物体上的力系称为平衡力系。

静力学研究的主要内容之一就是建立力系的平衡条件，并借此对物体进行受力分析。静力学建立力系平衡条件的主要方法是力系的简化，所谓力系的简化就是用简单的力系代替复杂的力系，当然，这种代替必须在两力系对物体的作用效应完全相同的条件下进行。对同一物体作用效应相同的两力系，彼此称为等效力系。若一个力与一个力系等效，则此力称为该力系的合力。

综上所述，静力学将研究的主要问题是：

1）力系的简化。

2）建立物体在各种力系作用下的平衡条件。

第一节　力的概念

一、力的概念

力的概念产生于人类从事的生产劳动之中。当人们用手握、拉、掷及举起物体时，由于肌肉紧张而感受到力的作用，这种作用广泛存在于人与物及物与物之间。例如，奔腾的水流能推动水轮机旋转，锤子的敲打会使烧红的铁块变形等等。可见，力作用于物体将产生两种效果：一种是使机械运动状态发生变化，称为力的外效应；另一种是使物体产生变形，称为力的内效应。由于静力学以刚体为研究对象，故本篇只讨论力的外效应。

综上所述，在静力学分析的范畴内，力可定义为：力是物体间的相互作用，这种作用将引起物体机械运动状态发生变化。

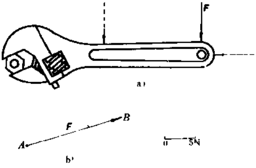


图 1-1　力的图示

1. 力的三要素

实践证明，力对物体的作用效应，是由力的大小、方向和作用点的位置所决定的，这三个因素称为力的三要素（图 1-1a）。例如，用扳手拧螺母时，作用在扳手上的力，因大小不同，或方向不同，或作用点不同，它们产生的效果就不同。

2. 力的单位

本书采用我国法定计量单位，力的单位用牛顿（N）或千牛顿（kN）。

3. 力的矢量表示

力是矢量，图示时，常用一个带箭头的线段表示（图 1-1b），线段长度 AB 按一定比例代

表力的大小，线段的方位和箭头表示力的方向，其起点或终点表示力的作用点。此线段的延伸称为力的作用线。用黑体字（如 **F**）代表力矢，并以明体字母 F 代表力的大小。

二、力的性质

性质 1（两力平衡公理） **作用于同一刚体上的两个力，使刚体处于平衡状态的必要与充分条件是：此两力必须等值、反向、共线。**

两力平衡公理是刚体受最简单的力系作用时的平衡条件，如一物体仅受两力作用而平衡，则两力的作用线必定沿此两力作用点的连线，如图 1-2d 所示，这类构件常被称为两力构件。

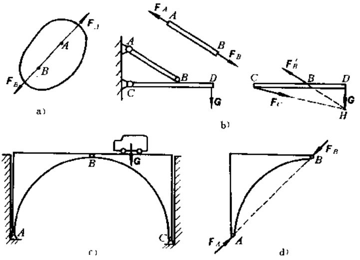


图 1-2 两力杆与三力杆

性质 2（加减平衡力系公理） **在已知力系上，加上或减去任一平衡力系，不会改变原力系对刚体的作用效应。**

推理 1（力的可传性原理） **作用于刚体上的力，可沿其作用线滑移到该刚体的任何位置而不会改变此力对刚体的作用效应。**

此原理证明如下：

1）设力 **F** 作用于刚体上 A 点（图 1-3a）。

2）在力 **F** 的作用线上任选一点 B，并在 B 点加一组沿 AB 线的平衡力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，且使 $\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}_1$（图 1-3b）。

3）除去 **F** 与 $\boldsymbol{F}_1$ 所组成的一对平衡力，刚体上只剩 $\boldsymbol{F}_2$，且 $\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}$（图 1-3c）。

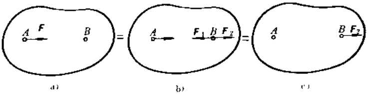


图 1-3 力的可传性

此原理说明，力是滑移矢量，它可以沿其作用线滑移但不能任意移至作用线以外的位置。

必须指出，力的可传性原理不适应于研究物体的内效应。例如，一根直杆受一对平衡力 **F**、**F′** 作用时，杆件受压（图 1-4a）；若将两力互沿作用线移动而易位，则杆变为受拉作用（图 1-4b），但拉伸和压缩是两种不同的内效应。因此，研究物体的内效应时，力应作固定矢量处理。

性质 3（力的平行四边形法则）， **作用于物体上某点两力的合力也作用于该点，其大小和方向可用此两力为邻边所构成的平行四边形的对角线来表示**（图 1-5）。

力是矢量，其运算也应按矢量运算法则进行，其矢量合成式为

$$\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$$

反之，一个力也可以分解为两个分力，分解也按力的平行四边形法则来进行。显然，由

已知力为对角线可作无穷多个平行四边形（图 1-6），故必须附加一定条件，才可能得到确切的结果。附加条件可能为：①规定两个分力的方向；②规定其中一个分力的大小和方向等等。

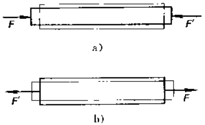


图 1-4　拉杆与压杆

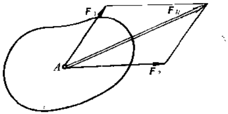


图 1-5　力的平行四边形法则

例如，在进行直齿圆柱齿轮的受力分析时，常将齿面的法向正压力 $\boldsymbol{F}_n$ 分解为推动齿轮旋转的即沿齿轮分度圆圆周切线方向的分力——圆周力 $\boldsymbol{F}_t$ 与指向轴心的压力——径向力 $\boldsymbol{F}_r$（图 1-7）。若已知 $\boldsymbol{F}_n$ 与分度圆圆周切向所夹的压力角为 α，则有

$$F_t = F_n\cos\alpha \quad F_r = F_n\sin\alpha$$

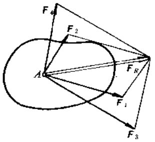


图 1-6　力的分解

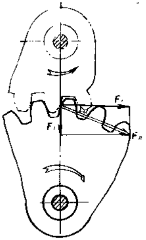


图 1-7　齿轮的受力分析

推理 2（三力平衡定理）　**若刚体在三个共面而又互不平行的力作用下处于平衡状态，则此三力必汇交于一点。**

证明：

1）设刚体上 A、B、C 三点有共面力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 的作用，按力的可传性原理将 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_3$ 移至 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_3$ 作用线交点 O，并根据性质 3，将 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 合成为 $\boldsymbol{F}_R$。

2）现刚体上只有两力 $\boldsymbol{F}_3$ 与 $\boldsymbol{F}_R$ 作用，根据性质 1，$\boldsymbol{F}_R$ 与 $\boldsymbol{F}_3$ 必在同一直线上，所以 $\boldsymbol{F}_3$ 必通过 O 点，于是 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 均通过 O 点。

刚体只受同一平面三个力作用而平衡，称为三力构件。若三个力中已知两个力的交点及第三个力的作用点，即可判断出第三个力作用线的方位。例如，图 1-2b 所示的起重机架，其中撑杆 AB 为二力构件，若不计横梁 CBD 的自重，则横梁只可能在 C、B、D 三点受力而成为三力构件。又如图 1-2b 所示，横梁上 B、D 两点作用力的方向为已知，D 点受重力 G 的作用，而 B 点则受杆 AB 的拉力 $\boldsymbol{F'}_B$，G 与 $\boldsymbol{F'}_B$ 二力交于 H 点，则据三力平衡定理，作用于C 点

的约束反力 F_C 也必通过 H 点，在 CH 的连线上。

性质 4（作用与反作用公理） **若将两物体间相互作用之一称为作用力，则另一个就称为反作用力，两物体间的作用力与反作用力必定等值、反向、共线，分别同时作用于两个相互作用的物体上。**

本公理阐明了力是物体间的相互作用，作用与反作用的称呼是相对的，力总是以作用与反作用的形式存在的，且以作用与反作用的方式进行传递。

这里应该注意两力平衡公理与作用与反作用公理之间的区别，前者叙述了作用在同一物体上两个力的平衡条件，后者却是描述两物系间相互作用的关系。

有时我们考察的对象是物系，物系外的物体与物系间的作用力称为外力，而物系内部物体间的相互作用力称为内力。内力总是成对出现且等值、反向、共线，所以对物系而言，内力的合力总是为零。因此，内力不会改变物系的运动状态。但内力与外力的划分又与所取物系的范围有关，随着所取对象范围的不同，内力与外力是可以互相转化的。

第二节　平面汇交力系的合成运算

为便于讨论，将力系按各力作用线的分布状况进行分类，凡力系中各力作用线在同一平面且汇交于一点者称为平面汇交力系。

力是矢量，故平面汇交力系的合成亦按矢量运算法则进行。

一、几何法

1. 两汇交力合成的三角形法则

设力 F_1 与 F_2 作用于某刚体上的 A 点，则由前述可知，以 F_1、F_2 为邻边作平行四边形，其对角线即为它们的合力 F_R，并记作 $F_R=F_1+F_2$，如图 1-8a 所示。

为简便起见，作图时可省略 AC 与 DC，直接将 F_2 连在 F_1 的末端，通过△ABD 即可求得合力 F_R，如图 1-8b 所示。此法就称为求两汇交力合力的三角形法则。按一定比例作图，可直接量得合力 F_R 的近似值。

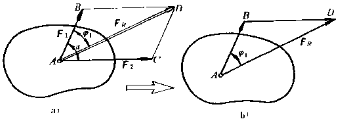


图 1-8　力三角形法则

2. 多个汇交力合成的力多边形法则

设在刚体某平面上有一汇交力系 F_1、F_2…F_n 作用，力系作用线汇交于 O 点，其合力 F_R 即可连续使用上述力三角形法则来求得（图 1-9）。其矢量式表示为

$$F_R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \Sigma F \tag{1-1}$$

由图 1-9 可见，为求合力 F_R，只需将各力 F_1、…、F_4 首尾相接，形成一条折线，最后连接封闭边，从首力 F_1 的始端 O 点向末力 F_4 的终端所形成的矢量，即为合力 F_R 的大小与方向。此法称为力多边形法则。

综上所述，平面汇交力系合成的一般结果为一合力 F_R，合力 F_R 为力系中各力的矢量和，其作用点仍为各力的汇交点，而且合力 F_R 的大小和方向与各力合成的顺序无关。

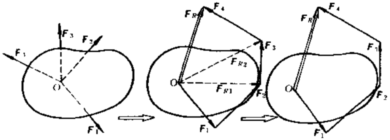


图 1-9　力多边形法则

例 1-1　一固定于房顶的吊钩上有三个力 F_1、F_2、F_3，其数值与方向如图 1-10 所示。试用几何法求此三力的合力。

解　1) 选取以某一长度代表 2000N 的力的大小。

2) 按相同比例首尾相接地画出 F_1、F_2、F_3，连其封闭边即可得到合力 F_R。

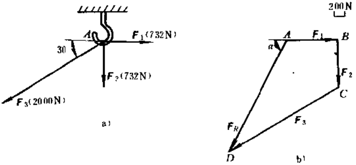


图 1-10　吊钩合力

3) 量出代表合力 F_R 的长度 AD，通过比例换算，得 $F_R=2000\text{N}$。

4) 用量角器量得 $\alpha=60°$，合力 F_R 的方向可定。

若某一平面汇交力系是平衡力系，其合力为零，则此力系组成之力多边形自行封闭。

二、解析法

1. 力在直角坐标轴上的投影

力 F 在坐标轴上的投影定义为：过 F 两端向坐标轴引垂线（图 1-11）得垂足 a、b 和 a'、b'。线段 ab、$a'b'$ 分别为 F 在 x 轴和 y 轴上投影的大小，投影的正负号规定为：从 a 到 b（或 a' 到 b'）的指向与坐标轴正向相同为正，相反为负。F 在 x 轴和 y 轴上的投影分别记作 F_x、F_y。

若已知 F 的大小及其与 x 轴所夹的锐角 α，则有

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F\cos\alpha \\ F_y &= -F\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

如将 F 沿坐标轴方向分解，所得分力 F_x、F_y 的值与 F 在同轴上的投影 F_x、F_y 相等；力的分力是矢量，力的投影是代数量。

若已知 F_x、F_y 值，可求出 F 的大小及方向，即

$$\left.\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2+F_y^2} \\ \mathrm{tg}\alpha &= |F_y/F_x| \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

2. 平面汇交力系合成的解析法

设在刚体上 A 点有平面汇交力系 F_1、F_2、…、F_n 的作用，据式 (1-1) 有

$$F_R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \Sigma F$$

将上式两边分别向 x 及 y 轴投影，即有

$$\left.\begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \Sigma F_x \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \Sigma F_y \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}4)$$

式（1-4）即为合力投影定理：**力系的合力在某轴上的投影等于力系中各力在同轴上投影的代数和。**

若进一步按式（1-3）运算，即可求得合力 F_R 的大小及方向，即

$$\left.\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} \\ \mathrm{tg}\alpha &= |\Sigma F_y / \Sigma F_x| \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}5)$$

例 1-2 试用解析法求例 1-1 中吊钩所受合力的大小及方向（图 1-12）。

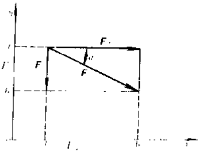


图 1-11 力的投影

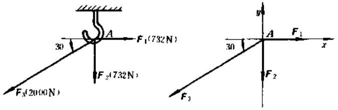


图 1-12 吊钩合力

解 建立直角坐标系 Axy，并应用式（1-4），求出

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ &= (732 + 0 - 2000\cos 30°)\mathrm{N} \\ &= -1000\mathrm{N} \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \\ &= (0 - 732 - 2000\sin 30°)\mathrm{N} \\ &= -1732\mathrm{N} \end{aligned}$$

再按式（1-5）得

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} = 2000\mathrm{N} \\ \mathrm{tg}\alpha &= |\Sigma F_y / \Sigma F_x| = 1.732 \\ \alpha &= 60° \end{aligned}$$

第三节 力对点之矩

一、力矩的概念

当用扳手拧紧螺母时（图 1-13），若作用力为 F，转动中心 O（称为矩心）到力作用线的垂直距离为 s，s 称为力臂，由经验可知，扳动螺母的转动效应不仅与 F 的大小有关，且与力臂 s 的大小有关，故力 F 对物体转动效应的大小可用两者的乘积 Fs 来度量，当然，若力 F 对物体的转动方向不同，其效果也不相同。表示力使物体绕某点转动作用的量称为力对点之矩。

由大量实例可归纳出力对点之矩的定义为：

力对点之矩为一代数量，它的大小为力 F 的大小与力臂 s 的乘积，它的正负号表示力矩在平面上的转向。一般规定，力使物体绕矩心逆时针方向旋转者为正，顺时针为负，如图 1-14 所示，并记作

$$m_O(\boldsymbol{F}) = \pm\ Fs \tag{1-6}$$

$\boldsymbol{F}$ 对点 O 的力矩值，也可用$\triangle OAB$ 面积的二倍来表示，如图 1-14 所示，即

$$m_O(\boldsymbol{F}) = \pm\ 2\triangle OAB \tag{1-7}$$

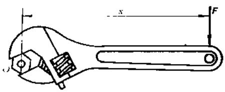


图 1-13　力对点之矩

由力矩的定义和式（1-6）易知：

1）当力的作用线通过矩心时，力臂值为零，力矩值也必定为零。

2）力沿其作用线滑移时，不会改变力对点之矩的值，因为此时并未改变力、力臂的大小及力矩的转向。

力矩的单位为牛顿·米（N·m）。

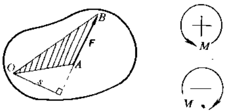


图 1-14　力矩图示

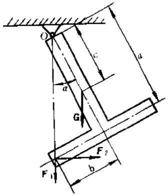


图 1-15　力矩计算

例 1-3　丁字杆与顶面铰接，受力情况如图 1-15 所示，图上所注之力、距离、角度等均为已知。试求各力对转动中心 O 之矩。

解

$$m_O(\boldsymbol{F}_1) = 0$$

$$m_O(\boldsymbol{G}) = -\ Gc\sin\alpha$$

$$m_O(\boldsymbol{F}_2) = F_2\sqrt{a^2 + b^2}$$

二、合力矩定理

合力矩定理　平面汇交力系的合力对平面上任一点之矩，等于所有各分力对同一点力矩的代数和。

证明：如图 1-16 所示，设力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 作用于刚体上的 A 点，其合力为 $\boldsymbol{F}_R$，任取一点 O 为矩心，过 O 作 OA 之垂线为 x 轴，并过各力矢端 B、C、D 向 x 轴引垂线，得垂足 b、c、d，按投影法则有

$$Ob = cd = F_{1x},\quad Oc = F_{2x},\quad Od = F_{Rx}$$

按合力投影定理，有

$$Od = Ob + Oc$$

各力对 O 点之矩，可用力与矩心所形成的三角形面积的二倍来表示，故有

$$m_O(\boldsymbol{F}_1) = 2\triangle OAB = OA \times Ob$$

$$m_O(\boldsymbol{F}_2) = 2\triangle OAC = OA \times Oc$$

$$m_O(\boldsymbol{F}_R) = 2\triangle OAD = OA \times Od$$

显然

$$m_O(\boldsymbol{F}_R) = m_O(\boldsymbol{F}_1) + m_O(\boldsymbol{F}_2)$$

若在 A 点有一平面汇交力系 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、…、$\boldsymbol{F}_n$ 作用，则多次重复使用上述方法，可得

$$m_O(\boldsymbol{F}_R) = \Sigma m_O(\boldsymbol{F}) \tag{1-8}$$

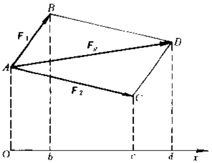


图 1-16　合力矩定理

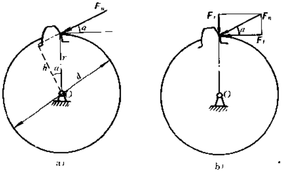


图 1-17　齿轮力矩的计算

上述合力矩定理不仅适用于平面汇交力系，对于其它力系，如平面任意力系、空间力系等，也都同样成立。

在计算力矩时，有时力臂值未在图上标出，计算亦较繁，应用这个定理，可将力沿图上标注尺寸的方向作正交分解，分别计算各分力的力矩，然后相加求出原力对该点之矩。

例 1-4　图 1-17a 所示圆柱直齿轮的齿面受一啮合角 $\alpha=20°$的法向压力 $\boldsymbol{F}_n=1$kN 的作用，齿面分度圆直径 $d=60$mm。试计算力对轴心 O 的力矩。

解 1　按力对点之矩的定义，有

$$m_O(\boldsymbol{F}_n) = F_n h = F_n \frac{d}{2}\cos\alpha = 28.2\text{N}\cdot\text{m}$$

解 2　将 $\boldsymbol{F}_n$ 沿半径 r 的方向分解成一组正交的圆周力 $\boldsymbol{F}_t=\boldsymbol{F}_n\cos\alpha$ 与径向力 $\boldsymbol{F}_T=\boldsymbol{F}_n\cos\alpha$。按合力矩定理，有

$$\begin{aligned} m_O(\boldsymbol{F}_n) &= m_O(\boldsymbol{F}_t) + m_O(\boldsymbol{F}_r) \\ &= \boldsymbol{F}_t r + 0 = \boldsymbol{F}_n\cos\alpha\, r \\ &= 28.2\text{N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

例 1-5　一轮在轮轴 B 处受一切向力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，如图 1-18a 所示。已知 $\boldsymbol{F}$、R、r 和 α。试求此力对轮与地面接触点 A 的力矩。

解　由于力 $\boldsymbol{F}$ 对矩心 A 的力臂未标明且不易求出，故将 $\boldsymbol{F}$ 在 B 点分解为正交的 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$，再应用合力矩定理，有

$$m_A(\boldsymbol{F}) = m_A(\boldsymbol{F}_x) + m_A(\boldsymbol{F}_y)$$

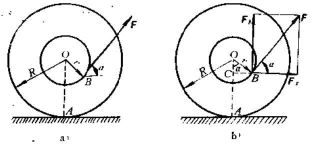


图 1-18　车轮力矩

$$
\begin{aligned}
m_A(F_x) &= -F_x CA \\
&= -F_x(OA - OC) \\
&= -F\cos\alpha(R - r\cos\alpha) \\
m_A(F_y) &= F_y r\sin\alpha \\
&= F\sin\alpha r\sin\alpha \\
&= Fr\sin^2\alpha \\
m_A(F) &= -F\cos\alpha(R - r\cos\alpha) + Fr\sin^2\alpha \\
&= F(r - R\cos\alpha)
\end{aligned}
$$

第四节　力偶的概念及其运算法则

一、力偶的定义

在日常生活及生产实践中，常见到物体受一对大小相等、方向相反但不在同一作用线上的平行力作用。例如图 1-19 所示的开门锁、转动驾驶盘及拧水龙头等。

一对等值、反向、不共线的平行力组成的力系称为力偶，此二力之间的距离称为力偶臂。由以上实例可知，力偶对物体作用的外效应是使物体单纯地产生转动运动的变化。

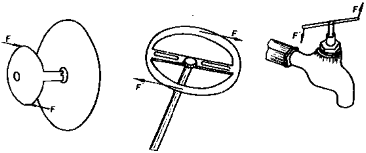


图 1-19　力偶实例

二、力偶的三要素

由实践可知，在力偶的作用面内，力偶对物体的转动效应，取决于组成力偶两反向平行力的大小 F、力偶臂 d 的大小以及力偶的转向。在力学上，以 F 与 d 的乘积冠以适当的正负号作为量度力偶在其作用面内对物体转动效应的物理量，称为力偶矩，并记作 m（F、F'）或 M。即

$$m(F,F') = M = \pm Fd$$

力偶矩的大小也可以通过力与力偶臂组成的三角形面积的二倍来表示，如图 1-20 所示，

即

$$M = \pm 2\triangle OAB$$

一般规定，逆时针转动的力偶取正值，顺时针取负值。

力偶矩的单位为 N·m 或 N·cm 或 N·mm。

力偶对物体的转动效应取决于下列三要素：

1）力偶矩的大小。

2）力偶的转向。

3）力偶作用面的方位——它表征作用面在空间的位置及旋转轴的方向；作用面方位由垂直于作用面的垂线指向来表征。凡空间相互平行的平面，它们的方位均相同。

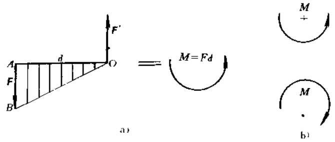


图 1-20　力偶矩

三、力偶的等效条件

凡三要素相同的力偶则彼此等效，即它们可以置换，这一点不仅由力偶概念可以说明，还可通过力偶的性质作进一步证明。

四、力偶的性质

性质 1　力偶对其作用面内任意点的力矩恒等于此力偶的力偶矩，而与矩心的位置无关。

证明：设在刚体某平面上 A、B 两点作用一力偶 $M=Fd$，现求此力偶对任意点 O 的力矩。取 x 表示矩心 O 到 F' 之垂直距离，按力矩定义，F 与 F' 对 O 点的力矩和为

$$m_O(\boldsymbol{F}) + m_O(\boldsymbol{F}') = F(d - x) + Fx$$
$$= Fd$$

即

$$m_O(\boldsymbol{F}) + m_O(\boldsymbol{F}')$$
$$= m(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}')$$

不论 O 点选在何处，力偶对该点的矩永远等于它的力偶矩，面与力偶对矩心的相对位置无关。

性质 2　由图 1-21 可见，力偶在任意坐标轴上的投影之和为零，故力偶无合力，力偶不能与一个力等效，也不能用一个力来平衡。

力偶无合力，故力偶对物体的平移运动不会产生任何影响，力与力偶相互不能代替，不能构成平衡。因此，可以将力与力偶同时看成力系的两种基本元素。

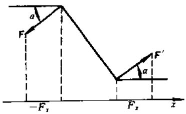


图 1-21　力偶的投影

由于性质 1、2 的存在，对力偶可作如下处理：

1）力偶在它的作用面内，可任意转移位置。其作用效应和原力偶相同，即力偶对于刚体上任意点的力偶矩值不因易位面改变。

2）力偶在不改变力偶矩大小和转向的条件下，可同时改变力偶中两反向平行力的大小、方向以及力偶臂的大小。而力偶的作用效应保持不变。

图 1-22a、b、c 中力偶的作用效应都相同。力偶的力偶臂、力及其方向既然可改变，就可简明地以一个带箭头的弧线并标出值来表示力偶，如图 1-22d 所示。

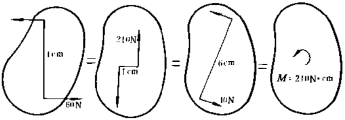
五、平面力偶系的合成

设在刚体某平面上有力偶 M_1、M_2 的作用，如图 1-23a 所示，现求其合成的结果。

在平面上任取一线段 $AB=d$ 当作公共力偶臂，并把每一个力偶化为一组作用在 A、B 两点的反向平行力，如图 1-23b 所示，根据力系等效条件，有

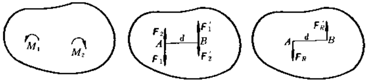
$$F_1 = M_1/d, \quad F_2 = M_2/d$$

于是在 A、B 两点各得一组共线力系，其合力各为 $\boldsymbol{F}_R$ 与 $\boldsymbol{F'}_R$，如图 1-23c 所示，且有



a)　b)　c)　d)

图 1-22　等效力偶



a)　b)　c)

图 1-23　力偶合成

$$F_R = F'_R = F_1 - F_2$$

$\boldsymbol{F}_R$ 与 $\boldsymbol{F'}_R$ 为一对等值、反向、不共线的平行力，它们组成的力偶即为合力偶，所以有

$$M = F_R d = (F_1 - F_2)d = M_1 + M_2$$

若在刚体上有若干个力偶作用，采用上述方法叠加，可得合力偶矩为

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \Sigma M \tag{1-9}$$

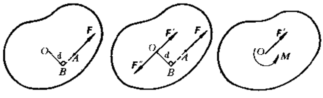
平面力偶系合成的结果为一合力偶，合力偶矩为各分力偶矩的代数和。

第五节　力的平移定理

图 1-24 描述了力向作用线外一点的平移过程。欲将作用于刚体上 A 点的力 $\boldsymbol{F}$ 平移到平面上任一点 O（图 1-24a），则可在 O 点施加一对与 $\boldsymbol{F}$ 等值的平衡力 $\boldsymbol{F'}$、$\boldsymbol{F''}$（图 1-24b），$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F''}$ 为一对等值反向不共线的平行力，组成一个力偶，称为附加力偶，其力偶矩等于原力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点的力矩，即

$$M = m_O(\boldsymbol{F}) = \pm Fd$$

于是作用在 A 点上的 $\boldsymbol{F}$，就与作



a)　b)　c)

图 1-24　力的平移

用于 O 点的平移力 F' 和附加力偶 M 的联合作用等效，如图 1-24c 所示。

由此可见：**作用于刚体上的力，均可平移到刚体内任一点，但同时附加一个力偶，力偶矩等于原力对该点之矩。此即力的平移定理。**

力的平移定理表明了力对绕力作用线外的中心转动的物体有两种作用，一是平移力的作用，二是附加力偶对物体产生的旋转作用。如图 1-25 所示。圆周力 F 作用于转轴的齿轮上，为观察力 F 的作用效应，将力 F 平移至轴心 O 点，则有平移力 F' 作用于轴上，同时有附加力偶 M 使齿轮绕轴旋转。再以削乒乓球为例（图 1-26），分析力 F 对球的作用效应，将 F 平移至球心，得平移力 F' 与附加力偶，平移力 F' 决定球心的轨迹，而附加力偶则使球产生旋转。

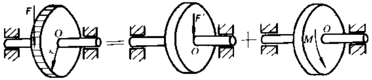


图 1-25　圆周力对轴的两种作用

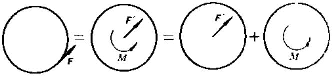


图 1-26　偏心力的作用

第六节　约束与约束反力

在各类工程中，构件总是以一定的形式与周围其它构件相互联结的，例如房梁受立柱的限制，使其在空间得到稳定的平衡；转轴受到轴承的限制，使其只能产生绕轴心的转动；小车受到地面的限制，使其只能沿路面运动等等。

一物体的运动受到周围物体的限制时，这种限制就称为约束，约束限制了物体本来可能产生的某种运动，因此约束有力作用于物体，这种力称为约束力。

于是，就可以将物体所受的力分为两类：一类是使物体产生可能运动的力，称为主动力；另一类则是约束限制某种可能运动的力，称为约束力，又因它是由主动力引起的反作用力，故其全称应是约束反作用力，简称约束反力。

约束反力总是作用在被约束物体与约束物体的接触处，其方向也总是与该约束所能限制的运动或运动趋势的方向相反。据此，即可确定约束反力的位置及方向。

一、柔性约束

由柔索、胶带、链条等所形成的约束为柔性约束。这类约束只能限制物体沿柔索伸长方向的运动，因此它对物体只有沿柔索方向的拉力，如图 1-27 所示，常用代号为 F_T。

当柔索绕过轮子时，常假想在柔索的直线部分处截开柔索，将与轮接触的柔索和轮子一起作为考察对象。这样处理，就可以不考虑柔索与轮子间的内力，此时作用于轮子的柔索拉

力即沿轮缘的切线方向。

二、光滑面约束

当两物体直接接触，并可忽略接触处的摩擦时，约束只能限制物体在接触点沿接触面的公法线指向约束物体的运动，不能限制物体沿接触面切线方向的运动，故约束反力必过接触点沿接触面法向并指向被约束物体，简称法向压力（图 1-28a），通常用符号 $\boldsymbol{F}_N$ 表示此类约束反力。

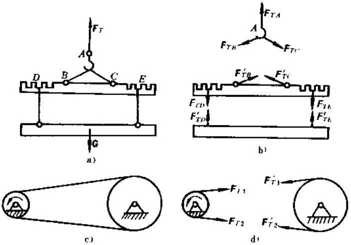


图 1-27　柔性约束

图 1-28b 为直杆与方槽在 A、B、C 三点接触，三处的约束反力沿二者接触点的公法线方向作用。

例 1-6　如图 1-29 所示，木棍在水沟中挑起一重量为 G 的球。试分别用图表示木棍、球的受力情况。

解　1）图 1-29a 表示球的受力情况。作用于球的力有：球的重量 $\boldsymbol{G}$，B 点处木板的约束反力 $\boldsymbol{F}_{NB}$，A 点沟壁的约束反力 $\boldsymbol{F}_{NA}$。$\boldsymbol{F}_{NB}$、$\boldsymbol{F}_{NA}$均垂直于接触表面并指向球心。

2）图 1-29b 表示木棍的受力情况。作用于木棍的力有：B 点处球的压力 $\boldsymbol{F}'_{NB}$，沟边棱角 C 点处的约束反力 $\boldsymbol{F}_{NC}$，主动力 $\boldsymbol{F}$ 及 $\boldsymbol{F}'_{NB}$、$\boldsymbol{F}_{NC}$均垂直于木棍接触表面。

3）若取图 1-29c 球与棍为一个物系，则 A、C 处为外约束，而 B 点处为内约束，故内力 $\boldsymbol{F}_{NB}$、$\boldsymbol{F}'_{NB}$不予画出。

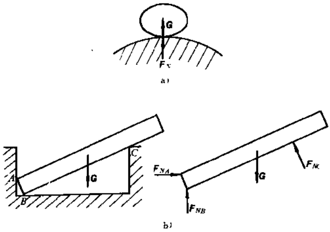


图 1-28　光滑面约束

三、铰链约束

两构件采用圆柱销所形成的联接为铰链联接。其结构为一圆柱销与一构件固联，插入另一个构件的插孔（图 1-30a、c）。若相联的构件有一个固定，则称为固定铰链；若均不固定，则称为中间铰链，铰链简称为铰。

这类约束的本质即为光滑面约束，因其接触点位置未定，故只能确定铰链的约束反力为一通过圆销中心的大小、方向均未定的力，通常此力就用两个大小未知的正交分力来表示（图 1-30d）。

如属于下列情况，固定铰链及中间铰链的约束反力方向可确定为：

1）铰链所联接的构件中，有一个是二力构件，如图 1-2b 所示的 $\boldsymbol{F}_A$，它必与构件 AB 共线。