目　录

绪　论

§1　工程力学与数值方法

在工程力学的研究和应用领域中，有许多问题最终都归结为求解各种数学问题，如方程求根、计算积分、构造逼近函数和求解矩阵特征值等。这些数学问题，仅仅依靠传统的解析方法多半是不可能解决的，唯有借助于计算机才能求其数值解。

数值方法，即研究利用计算机求解各种数学问题的理论和方法。它把求解一般数学问题的过程，转化为编制和运行只作四则运算和逻辑运算的计算机程序的过程。例如求解方程

$$e^x + 10x - 2 = 0$$

计算积分

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sqrt{x}}{x+4}dx$$

等问题，都可由计算机程序来完成。因此，对于力学工作者，学习数值方法是十分必要的。

为研究大型工程结构的静态和动态特性，以及为选取最优设计参数，需要进行大量的力学分析。目前国内外已经有很多这类专用程序供采用，但这些程序的核心内容是力学概念与进行力学分析所常用的数值方法的结合。作为力学工作者，不应满足于能找到解决问题的程序，而应了解程序所体现的数值方法及其实施手段，以便针对实际问题对现有程序进行维护和开发，从而扩大程序处理问题的范围和提高程序解决问题的功能。如有必要，还需研制新程序。因此，只有专业理论是不够的，还应当具有数值方法的知识和设计程序的能力。

数值方法自始至终与数字打交道，本书就从数字谈起。

§2 近似数的表示

2.1 近似数

在工程问题和科技计算中出现的数往往是近似数。所谓近似数，是与准确值相接近且在计算中以代替准确值的数。

产生近似数的情况有：

（1）实验或观测得到的数。由于受到实验条件和测试手段的限制，必然是近似数。它与准确值的差异称为观测误差。

如表示一个构件几何尺寸的数：长1.5m、宽0.2m；表示一个物理量大小的数：速度30m/s、质量60kg等，都是观测得到的近似数。

（2）作数值计算时产生的数。若算式中出现无理数或循环小数，运算前要化为有限小数，即近似数。此数与原数的差异称为舍入误差。

例如算式中的π用3.1416来取代，其中就有舍入误差。

（3）由极限过程定义的数值化为有限过程来计算，也只能得到它的近似数。它与原数值的差异称为截断误差。

例如，利用级数

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots$$

求e的近似数，如取$n=3$，则有

$$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\approx2.667$$

第一个近似等式产生截断误差，第二个近似等式产生舍入误差。因此近似数2.667中包含了截断误差和舍入误差。

实际上，不论是计算机运算或是人工计算，其数字总是有限位的，运算次数也总是有限次的，计算的结果亦必然受到上述误差的影响，而得到近似数。为了表示近似数的准确程度，现引进绝对误差、相对误差和有效数字的概念。

2.2 绝对误差和相对误差

设准确值x^*的近似数为x，其差

$$e_a = x^* - x$$

称为近似数x的绝对误差。

一般地说，准确值x^*是未知的，因而误差e_a的准确值也不得而知。但可根据具体情况估计$|e_a|$的上界ε_a，即

$$|e_a| = |x^* - x| \leqslant \varepsilon_a$$

ε_a称为近似数x的绝对误差限。在实际应用时，常将上式表示成

$$x^* = x \pm \varepsilon_a$$

例如用毫米刻度的米尺测量长度为x^*的杆件，读数是834mm，显然它的误差限是0.5mm，其长度可以记作

$$x^* = 834 \pm 0.5 (\text{mm})$$

由此可见绝对误差是具有量纲单位的。

在许多情况下，绝对误差的大小还不足以刻划近似数的准确程度。例如近似数500和近似数100的绝对误差都是1，就不能简单地认为它们的准确程度相同，应该认为500比100更准确。因此描述一个近似数的准确程度，除了绝对误差之外，还需考虑量本身的大小。

近似数x的绝对误差e_a与其自身x之比

$$e_r = \frac{e_a}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

称为近似数x的相对误差。由于e_a以及x不能准确地求得，需要估计$|e_r|$的上界ε_r，即

$$|e_r| = \left|\frac{x^* - x}{x}\right| \leqslant \varepsilon_r$$

ε_r称为近似数x的相对误差限，通常以百分数表示。

例如，上面提到的近似数500和近似数100的绝对误差都是1，它们的相对误差分别是1/500（即0.2%）和1/100(即1%)，这表明近似数500比近似数100更准确。显然，相对误差是无量纲

单位的。

2.3 有效数字

在实践中，人们要求近似数本身能反映它的误差大小，用有效数字表示近似数使得这一要求得以实现。

若近似数 x 的绝对误差限不超过某位的半个单位，且该位到 x 的第一位非零数字共有 n 位，则说近似数 x 有 n 位有效数字，或说 x 精确到该位。

例如，将数12.03456写成具有3位、4位和5位有效数字的近似数，只需按四舍五入规则分别舍入成12.0、12.03和12.035即可。因为按四舍五入规则截取的近似数，其误差不超过末位的半个单位，因而各位数字都是有效数字。容易证明，同一数的近似数，有效数字位数越多，它的绝对误差和相对误差就越小。

应当指出，有效数字是对近似数而言。如0.1和0.10表示不同的近似数，原因是有效数字位数不同。另外，1/2的准确值0.5应视为具有无穷多位有效数字的近似数。在此约定，本书算例中出现的数，未作特别声明时，它的各位数字均为有效数字。

§3 近似数的运算

3.1 近似数的运算规则

在数值计算中，经常有一些位数不等的近似数在一起运算，若能遵循一定的规则进行，可使计算结果达到尽可能高的精度并避免一些无谓的运算。这里提出几项运算规则供参考。

（1）近似数相加减，先将小数部分位数较多的近似数四舍五入，使之比小数部分位数最少的近似数多一位小数，然后再运算。计算结果保留的小数位数与原近似数中最少的小数位数相同。

例如，计算近似数12.34，0.0052与6.788之和。先舍入再计算，得

$$12.34+0.005+6.783=19.128$$

其和取为19.13。

（2）近似数相乘除，先将有效数字位数较多的近似数四舍五入，使之比有效数字位数最少的近似数多一位数字，然后再运算。计算结果保留的有效数字位数与原近似数中最少的有效数字位数相同。

例如，计算近似数0.0123，34.564与7.0896之积。先舍入再计算，得

$$0.0123\times34.56\times7.090\approx3.014$$

其积取为3.01。

（3）近似数乘方、开方或取对数，其结果保留的有效数字位数与原近似数的有效数字位数相同。

例如，近似数12.34^2之值取为152.3，$\sqrt{12.34}$之值取为3.513，lg12.34之值取为1.091。

（4）近似数作混合运算，中间结果保留的位数一般要比按照上述取位规则多一位。

例如，计算$3.28\times2.15+4.8409\times2.7$。作

$$\begin{aligned}&3.28\times2.15+4.8409\times2.7\\ \approx\;&3.28\times2.15+4.84\times2.7\\ \approx\;&7.052+13.1\approx7.1+13.1\approx20。\end{aligned}$$

3.2 近似数对算法的要求

一个工程问题或科学问题，往往要有千万次的近似数运算，每一次运算都可能产生误差。为了抑制误差的增长，保证结果的精度，设计数值稳定性好的算法是十分重要的。关于算法设计，提出如下注意事项：

（1）算法中尽量避免两相近数相减。

相近数相减会严重损失有效数字，使其误差急剧增加，精度显著降低。

例如，计算相近数$\sqrt{8765}$与$\sqrt{8764}$之差。以它们5位有效数字的近似数相减，得

$$\sqrt{8765}-\sqrt{8764}\approx 93.622-93.616=0.006$$

可见两个具有5位有效数字的近似数，相减的结果至多具有1位有效数字（事实上，近似数0.006没有1位有效数字，因为$\sqrt{8765}-\sqrt{8764}=0.00534\cdots$）。

避免两个相近数相减的常用方法是变换算式，例如，

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \quad (\text{当} x \text{很大时})$$

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2} \quad (\text{当} |x| \text{很小时})$$

$$\lg x-\lg y=\lg\frac{x}{y} \quad (\text{当} x,\ y \text{是相近的正数时})$$

一般地，两个相近的函数值$f(x_1)$与$f(x_2)$相减，可用Taylor（泰勒）展开式来计算，即

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(x_2)(x_1-x_2)+\frac{f''(x_2)}{2!}(x_1-x_2)^2+\cdots$$

如果难以变换相减的算式，就要增加相减数的有效数字位数。

（2）算法中尽量避免绝对值小的数作分母。

例如，$x^*=1$，$y^*=0.001$，有$x^*/y^*=1000$。若取y^*的近似数$y=0.0011$，则$x^*/y\approx 909.09$。虽然分母的绝对误差很小，可是商的绝对误差却很大，原因在于小数作分母放大了近似数的误差。

（3）算法中尽量避免数量级相差很大的数直接进行加减运算。

由于计算机字长有限，在进行对阶运算时可能将数量级小的数视为机器零，造成结果失真。

例如，求A，B，C三数之和，其中

$$A=10^{15},\quad B=300,\quad C=-A$$

若依 $(A+B)+C$ 的次序计算，机器计算结果可能是零；若依 $(A+C)+B$ 的次序计算，机器计算结果接近于300，成为正确的答案。因此，设计算法时，合理安排运算次序是个不容忽视的问题。

（4）算法中尽量避免使用数值不稳定的计算公式。

所谓数值不稳定的公式，是指计算过程中舍入误差不断增长的公式。否则，则谓数值稳定的公式。例如，计算积分

$$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx$$

在 $n=0,1,2,\cdots,20$ 时的近似值。

由 $$I_n+5I_{n-1}=\int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+5)}{x+5}\,dx=\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n}$$

和 $$I_0=\int_0^1 \frac{1}{x+5}dx=\ln 6-\ln 5\approx 0.182322$$

可得递推公式

$$\begin{cases} I_n=\frac{1}{n}-5I_{n-1} & n=1,2,\cdots,20 \\ I_0\approx 0.182322 \end{cases}$$

利用上式计算各积分时，每递推一次误差增大5倍，递推 n 次的误差达到 I_0 误差的 5^n 倍。随着 n 的增大，结果误差是不可控制的，这是数值不稳定的计算公式。

如改用它的逆递推公式

$$\begin{cases} I_{n-1}=\frac{1}{5n}-\frac{1}{5}I_n & n=20,19,\cdots,1 \\ I_{20}\approx 0.008730 \end{cases}$$

每递推一次误差缩小5倍，随着递推次数的增加，结果愈加精确，这是数值稳定的计算公式。式中 I_{20} 可如此定值，

由 $I_n>I_{n+1}>0$，得

$$6I_n>I_{n+1}+5I_n>5I_n$$

即

$$6I_n > \frac{1}{n+1} > 5I_n$$

故

$$\frac{1}{5(n+1)} > I_n > \frac{1}{6(n+1)}$$

取 $n=20$，有

$$I_{20} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6\times 21}+\frac{1}{5\times 21}\right) \approx 0.008730.$$

§4 应 用 举 例

问题 1　已知正方形边长约为 100cm，欲使计算得到的面积误差不超过 10cm^2，那么测量正方形边长时允许有多大误差？

解　设边长 $x^* \approx 100(\text{cm})$，面积 $y^* = x^{*2}$，由题意得

$$|y^* - y| = |x^{*2} - x^2| = |(x^* - x)(x^* + x)| \leqslant 10$$

于是

$$|x^* - x| \leqslant \frac{10}{|x^* + x|} \approx \frac{10}{100+100} = 0.05(\text{cm})$$

因此，测量正方形边长时允许误差是 0.05cm。

问题 2　作自由落体运动的某物体下落时间 $t=2.00\text{s}$，取 $g=9.81\text{m/s}^2$，试求由公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 计算位移 h 的误差。

解　利用 Taylor 展开式估计误差。设

$$h = f(g,t) = \frac{1}{2}gt^2$$

由

$$\begin{aligned}
|h^* - h| &= |f(g^*,t^*) - f(g,t)| \\
&\approx |f'_g(g,t)\cdot(g^* - g) + f'_t(g,t)\cdot(t^* - t)| \\
&= \left|\frac{1}{2}t^2(g^* - g) + gt(t^* - t)\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{2}\times 2.00^2 \times 0.005 + 9.81 \times 2.00 \times 0.005\right| \\
&\approx 0.11(\text{m})
\end{aligned}$$

因此，位移 h 的误差约为 0.11m。

第一章　代数插值法

在科技问题中出现的函数，有许多是以数表形式提供的。例如，某合金的抗拉强度 y 与合金中含碳量 x 之间的关系有如下试验数据（表1—1）：

表1—1

$x(\%)$	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20
y(MPa)	420	450	460	490	540	650

这是变量 x 与 y 的函数表，但不知道具体的函数关系式 $y=f(x)$。为了刻划这种数表函数所反映的变量关系或者确定未列入表中的某函数值（如 x 为0.15时的 y 值），就要寻求它的近似表达式。另外，对于表达式比较复杂的函数，为了便于分析它的性质或者进行运算，也常常要求它的近似表达式。这类问题可以通过插值法或数据拟合法（第二章将讨论）解决。

所谓插值法，就是构造完全适合给定函数表的简单易算的近似函数的方法。本章只限于讨论最常用的代数插值法，即以代数多项式作为近似函数的方法，这不仅因为多项式计算简单，而且它具有很好的分析性质。

§1　代数插值的基本理论

1.1　代数插值问题

给定函数（表1—2）若有代数多项式 $P(x)$，满足

$$P(x_i)=y_i \qquad i=0,\ 1,\ \cdots,\ n \qquad (1-1)$$

则称$P(x)$为函数$f(x)$的插值多项式，x_i为插值节点，两端节点所界定的区间$\left(\min_i(x_i),\ \max_i(x_i)\right)$为插值区间，式（1—1）为插值条件。

表1—2

x	x_0	x_1	……	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	……	y_n

代数插值的几何意义，就是通过函数表1—2给出的$n+1$个点$(x_i, y_i)(i=0, 1, \cdots, n)$，作一条代数曲线$y=P(x)$，以此代替曲线$y=f(x)$，如图1—1所示。

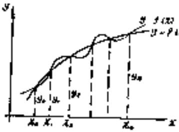

图 1—1

现在的问题是：适合函数表1—2的插值多项式是否存在？如果存在，它的次数是多少？是否唯一？如何构造它以及它与给定函数的误差有多大？下面逐一回答。

1.2 插值多项式存在的唯一性

设n次多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

满足$n+1$个插值条件（1—1），这等价于它的$n+1$个系数a_0，a_1，…，a_n适合下列线性方程组

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

该方程组的系数行列式是Vandermonde（范德蒙）行列式

$$V(x_0,\ x_1,\ \cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{0\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

由于x_i互异，系数行列式不为零，故方程组有唯一解（a_0^*，a_1^*，…，a_n^*），这证明了满足$n+1$个插值条件的多项式存在，且次数不超过n的插值多项式是唯一的。

1.3 插值多项式的余项

用插值多项式$P_n(x)$近似函数$f(x)$，在节点处与$f(x)$的值相等，但在非节点处两者值一般是不等的，甚至可能相差很大。就是说，用$P_n(x)$近似$f(x)$要产生截断误差，有必要估计它的大小。称截断误差

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

为插值多项式$P_n(x)$的余项。

虽然次数不超过n的插值多项式$P_n(x)$是唯一的，但适合函数表1—2的函数$f(x)$却有很大的任意性。所以要对余项作出估计，需要有更多关于$f(x)$的信息。

定理 设$f^{(n)}(x)$在$[a,b]$上连续，$f^{(n+1)}(x)$在(a,b)内存在，且x_0，x_1，…，x_n是$[a,\ b]$上互异的节点，$P_n(x)$是满足插值条件(1—1)的n次多项式，则对任何$x\in[a,\ b]$，插值余项