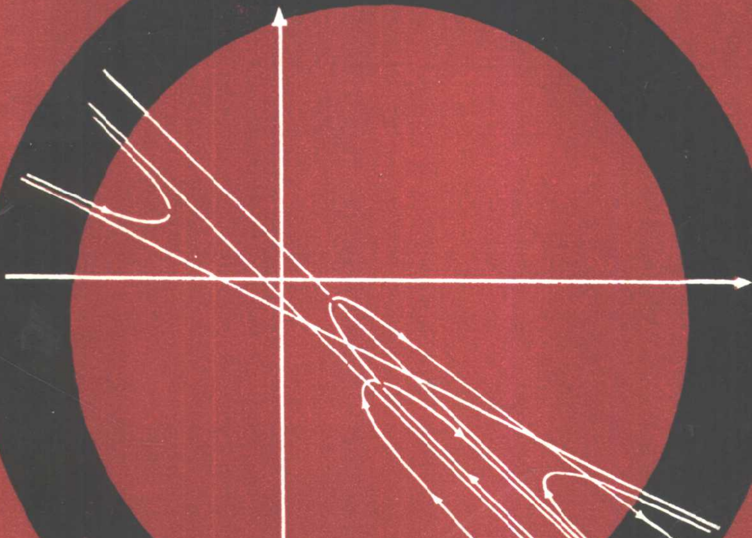
DAISHUQUXIANDE

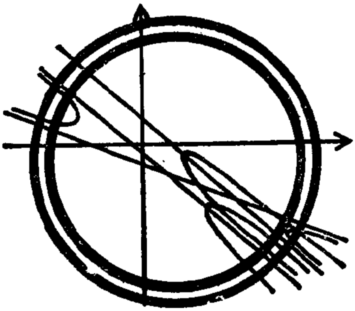
代数曲线的渐近线

JIANJINXIAN

赵慈庚著



湖南科学技术出版社



赵慈庚 著

代数曲线的渐近线

湖南科学技术出版社

一九八一年·长沙

代数曲线的渐近线

赵 蕴 康
责任编辑：胡海清

湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
＊
1981年1月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32 印张：2.125 字数：47,000
印数：1——11,500
统一书号：13204·26　定价：0.24元

前　言

学过一点解析几何的人，都会以为曲线的切线明确易懂，而渐近线有几分神秘。指定了切点去求切线的斜率，好象是有把握的工作。渐近线没有这种方便条件，于是觉得哪怕是渐近线的方向也是难于捉摸的东西。所以多数人认为渐近线神秘。造成这种隔膜的原因是解析几何所用的工具力量薄弱。如果有一点射影几何的知识，便能把这两种看来不同的概念统一起来。这就是编写这个小册子的目的。

切线与渐近线的共同难处，是曲线上的奇点，而渐近线另多一层障碍，那就是曲线在无穷远处的性质与状态不得窥见。把这两个基本问题解决了，就能顺利理解其间的一切奥妙。切线与渐近线实际是孪生兄弟，没有射影变换就不能认识它们之间的血统关系。这几个问题就是本书第三、四、五节所讲的内容。

本书初稿是很久以前给中学教师讲解时编的，那时没有这里的第三、四两节。为了使读者不必去翻阅其他书籍，现在把本题用到的一点射影几何知识写在这两节里，为的是给读者提供一点方便。

误谬之处，在所难免，希望读者指正。

编　者

一九八〇年四月

目　　录

一 引 言

这里所说的代数曲线，是说它的方程可以变作 $F(x,y)=0$ 的形式，其中$F(x,y)$是x与y的多项式。

一般解析几何课本对于曲线的讨论，往往把渐近线列为一项，而许多书只论述纵渐近线与横渐近线。但是斜渐近线对于曲线作图的帮助也很大，教科书或置之不理，或说得很略；讲的方法不足以应付一般情形，说的理论也不完备。教师在这地方时常为难。这里将此问题约略地说一下。

二 初等方法及其间的问题

普通课本说到渐近线的定义，总是说“假若曲线能延伸到无穷远，而动点沿着曲线向无穷远移动时，它与某一定直线的距离越来越近，终而以零为极限，便说这直线是曲线的渐近线。”说到求纵渐近线的方法时，便说“由有理方程 $F(x,y)=0$解得 $y=\varphi(x)/\psi(x)$，若$\varphi(x)/\psi(x)$是最简分式，而 $\psi(x)=(x-a)^r\cdot\psi_1(x)$，$r>0$，$\psi_1(a)\neq0$。那么$x-a=0$便是纵渐近线。”横渐近线的求法与此相仿。这方法固然简便，但是往往不加证明，这是其间的第一个问题。其次只用初等方法，未必能由 $F(x,y)=0$ 解得y(或x)，这是其间的第二个问题。即使能解，而一般解得的是x(或y)的无理分式。分母的根往往使分式之值不定，那就未

见得是无穷大，因而不见得有渐近线；于是不能不用极限来判断它的值。这是其间的第三个问题。

例 1 为了从

$$x^2y-3xy-6=0$$

求横渐近线，解得

$$x=\frac{3y\pm\sqrt{9y^2+24y}}{2y}.$$

当$y\to0$时，两个x的值都是不定式(图2—1)。

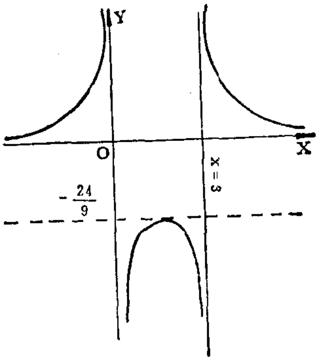


图2—1

其他象下列曲线都有这样的问题：

$$x^2y-y=2x,$$

$$y=(2x+3)/(x^2-3x+2),$$

$$y=(x^2-4x+4)/(x^2+5x+6),$$

$$(x^2+y^2-1)y=ax,$$

$$x(y-x)^2-b^2y=0,$$

$$x(y^2-9)=y.$$

关于斜渐近线，解析几何讲的固然不够，而微积分讲的方法，对于复杂的隐函数或曲线有不同方向的渐近线时就麻烦了。

例 2　有的书求曲线

$$y^2-x^2+2x+2y+4=0 \tag{2.1}$$

的渐近线时，先设渐近线的方程为

$$y=mx+c \tag{2.2}$$

然后由这两个方程消y，再令所得方程的前两系数等于零：

$$m^2-1=0,\ mc+m+1=0. \tag{2.3}$$

从这两个方程解得$m=1$，-1；$c=-2$，0代入(2.2)，求得两条渐近线$y=x-2$，$y=-x$。

在这解法里，当假定(2.2)时，还不知道渐近线之有无。(2.3)的两方程有解、无解或者相因，都不能预料。尤其重要的是根据(2.2)与(2.1)有两个交点在无穷远，便接受(2.2)为渐近线，这一点不能不让人纳闷，它具备渐近线定义所要求的性质吗？这是初等方法中的第四个问题。试看

例 3　如果也照例2那样求曲线

$$x(y-x)^2-b^2y=0 \tag{2.4}$$

的渐近线，消y之后得

$$(m-1)^2x^3+2c(m-1)x^2+(c^2-mb^2)x-b^2c=0 \tag{2.5}$$

只需$m=1$，前两个系数就都等于零。然而不能说"不论c是什么数，$y=x+c$都是渐近线"。实际(2.1)是二次曲线，一条直线最多和它有两个交点。只要两个交点重于无穷远便是渐近线。现在(2.4)是三次曲线，每条直线和它交于三点(或实或虚)，只有两个交点重于无穷远，未必是渐近线，可能要求三个交点重于无穷远才行。如此来说，便不能不求助于(2.5)的第三个系数了。再添上$c^2-mb^2=0$，求得两组解$m=1$，$c=\pm b$。所以有两条斜率为1的渐近线$y=x\pm b$(图2.2)。

可见用这种试探的方法求渐近线时，应该由$F(x,y)=0$及

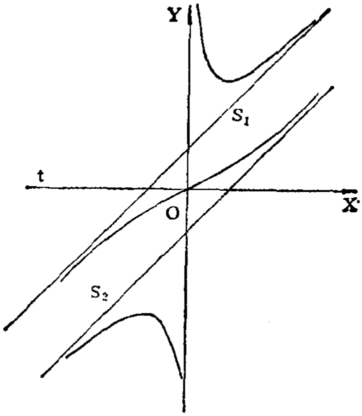


图2—2

(2.2)消y，得

$$x^n\varphi_0(m)+x^{n-1}\varphi_1(m,c)+\cdots+\varphi_n(m,c)=0.$$

若$\varphi_0(m)=\prod\limits_{i=1}^{k}(m=m_i)^{r_i}\psi(m)$，其中$r_i>0$，$\psi(m)$不能分解成实系数一次因式，任一$m-m_i=0$若与$\varphi_1=0,\cdots$，$\varphi_{s-1}=0$ 相因而与$\varphi_s=0$有公共解，则每组实解决定一条斜率为m_i的渐近线。若$m-m_i=0$与$\varphi_1=0,\cdots$，$\varphi_{s-1}=0$相因，而与$\varphi_s=0$矛盾，便没有斜率为m_i的渐近线。

这里的m_i可以是零，这方法包括求横渐近线，但是不能包括纵渐近线。实际上，(2.4)也有纵渐近线，可以照例1那样求出来。

下面的两个例题，也指出了求渐近线的初等方法。

例4　求曲线$y=(2x^3-5x^2+4x+1)/(2x^2-x-1)$的斜渐近线。可以变原式右端为带分式

$$y=x-2+\frac{3x-1}{2x^2-x-1},$$

其中 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x^2-x-1}=0$，所以$y=x-2$是渐近线(图2.3)。

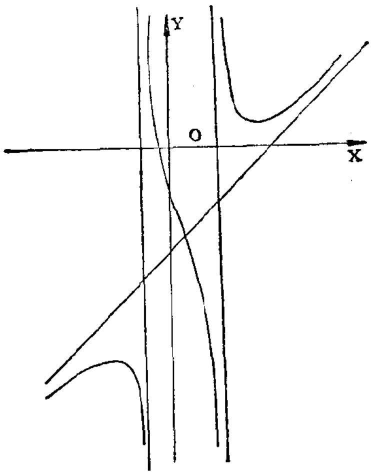


图2—3

若斜渐近线不止一条，一般不能用这种方法。下一个例题，情形较为特殊，可以同时求两条斜渐近线。

例5 求曲线$x^2-4y^2+16y=0$的渐近线。

由原方程解x(或解y或$y-2$)

$$\pm x=2y\sqrt{1-\frac{4}{y}}=2y-4-\frac{2}{y}\left(2+\frac{4}{y}+\cdots\right)$$

右端括号里的级数当$y>4$时收敛，那么

$$\lim_{y\to\infty}\frac{2}{y}\left(2+\frac{4}{y}+\cdots\right)=0$$

由此知道

$$\pm x=2y-4$$

是渐近线。

这两个例题的解法都与渐近线的定义符合。实际以上许多例题都可以概括在下边这条定理之中。

假若曲线（代数的或非代数的）的方程能变成

$$(lx+my+n)^p g(x,y)=h(x,y),$$

$$p>0,\ l^2+m^2>0;(2,6)$$

而且当(x,y)沿着曲线的一支趋于无穷远时，使得$\lim[h(x,y)/g(x,y)]=0$，那么L：$lx+my+n=0$是渐近线。

这因为曲线上的动点$P(x,y)$满足

$$lx+my+n=\sqrt[p]{h(x,y)/g(x,y)}.$$

P对于L的距离是

$$\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+n^2}}=\frac{\sqrt[p]{\dfrac{h(x,y)}{g(x,y)}}}{\sqrt{l^2+m^2}}.$$

但是右端的极限是零，所以L是渐近线。

前边五个例题的方程可以分解为

$$x(x-3)y=6,$$

$$(y-x+2)(y+x)=-4,$$

$$x(y-x+b)(y-x-b)=b^2(y-x),$$

$$(-x+y+2)(2x+1)(x-1)=3x-1,$$

$$(x-2y+4)(x+2y-4)=-16.$$

每个方程左端的各一次因式都符合这定理的条件。这方法中的困难是不知道如何分解因式。浅近而较为有效的方法是利用直线的参数方程

$$x=x_1+\rho\cos\alpha$$

$$y=y_1+\rho\sin\alpha \qquad (2.7)$$

来试探渐近线。

例6　用参数方程解例4.

将曲线的方程变成整式的，然后把（2.7）代进去，再令其ρ^3、ρ^2、ρ的系数等于零，得

$$2\cos^2\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)=0,$$

$$\cos\alpha[(6x_1-2y_1-5)\cos\alpha-(4x_1-1)\sin\alpha]=0,$$

$$(6x_1{}^2-4x_1y_1-10x_1+y_1+4)\cos\alpha$$
$$+(-2x_1{}^2+x_1+1)\sin\alpha=0.$$

用前两式的公因式 $\cos\alpha=0$ 代入第三式，化简去掉足码，得 $2x^2-x-1=0$，这是两条渐近线。再取第一式的因式 $\cos\alpha-\sin\alpha=0$代入第二式，化简去足码，又得一条渐近线$x-y-2=0$。

这方法比例3所用的方法又好一些，因为它能求纵渐近线。

习题2.1 讨论下列方程的曲线并作图：

(a) $x^2y-2x-y=0$;

(b) $(x^2-3x+2)y-2x-3=0$;

(c) $(x^2+5x+6)y=x^2-4x+4$;

(d) $(x^2+y^2-1)y-ax=0$;

(e) $x(x^2-9)-y=0$.

习题2.2 讨论下列方程的曲线并作图；其中 a、b、m、p 都是正数。

(a) $x^4-ax^2y+by^3=0$; （图2—4）

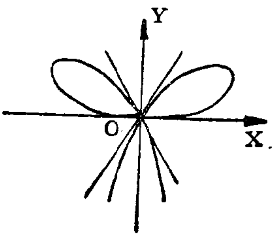


图2—4

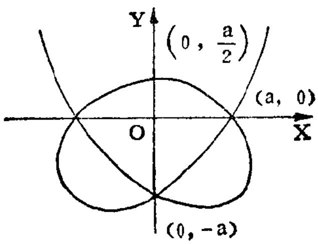


图2—5

(b) $(x^2-a^2)^2=ay^2(3a+2y)$；　　　　(图2—5)

(c) $x^4-2ax^2y+2x^2y^2+ay^3+y^4=0$；　　　　(图2—6)

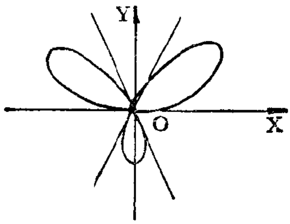


图2—6

(d) $(x^2+y^2-px)^2=m^2(x^2+y^2)$；按$p>m$，$p=m$，$p<m$分别讨论。(图2—7)

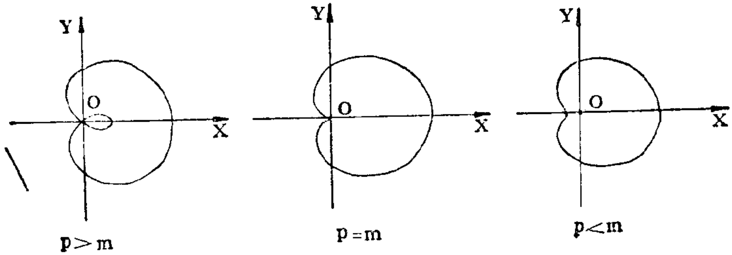


图2—7

(e) $ay^2-x^3\pm bx^2=0$。

三　无穷远点与齐次坐标

3.1　平面上的无穷远点

为了讨论渐近线，需要先把无穷远点的概念说一下。我们时常说"两条平行直线交于无穷远"，或者"两条直线的交点在无穷

远时，这两条直线就变得平行了”。这说法好象在无穷处有点存在。每条直线有它的无穷远点。虽说这是虚构的说法，在解析几何里却可以得到合理的解释。现在先说一条直线的无穷远点。有许多方法可以说明一条直线应该有无穷远点。比如从直线的两点式参数方程

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r},$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r} \tag{3.1}$$

来说，除去(x_2,y_2)一点而外。直线上的每个点对应着一个实数r(图3—1)。从极限的观点来看，(x_2,y_2)应该对应着一个虚构的数∞，这时唯有$r=-1$没有对应点。再从极限的观点来看

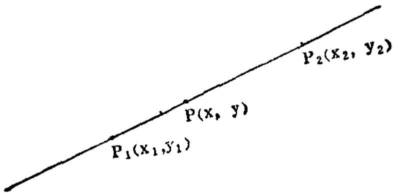


图3—1

$$\lim_{x\to\infty}r=\lim_{x\to\infty}\frac{x_1-x}{x-x_2}=-1,$$

$$\lim_{y\to\infty}r=\lim_{y\to\infty}\frac{y_1-y}{y-y_2}=-1.$$

所以当直线用(3.1)表示时，要想直线上的点与一切实数之间建立一一对应的关系，就不得不添一个虚构的数∞和直线上无穷远处的一点——这直线的**无穷远点**，让这无穷远点对应于-1。没有这个无穷远点，就没有实数-1的几何对象。这说明

在几何领域里有必要开辟无穷远点这个范畴。从这例题来说，每个实数r只能和直线的一个点对应，那么-1也不该例外。所以我们规定**一条直线仅有一个无穷远点**。对应于(x_2, y_2)的无穷大。是由$\pm\infty$合并而成的。以后总是认为$\pm\infty$是参数的一个值，记作∞。

每条直线仅有一个无穷远点，然而一个无穷远点却在无穷多条直线上；即是一族平行直线有一个共同的无穷远点。其实这个无穷远点就是这族平行直线的共性，就是他们的公共方向。所以不妨说无穷远点决定于平面上的方向。于是约定平面上**每个方向对应着一个无穷远点**。还可以更具体地说，围绕着原点的每个方向有一个无穷远点。

3.2 齐次坐标

紧跟着无穷远点概念而来的问题，是怎样用解析方法来表示它。这需要用**齐次坐标**。因为现在只讨论平面曲线，所以这里只谈平面上的齐次坐标。这种坐标与笛卡儿坐标(x, y)有密切关系，相对地说把笛卡儿的旧坐标叫做**非齐次坐标**。

平面上有限点(x, y)的齐次坐标(ξ, η, τ)是任何满足

$$\xi/\tau = \chi,\quad \eta/\tau = y$$

的三个数。例如$(x, y, 1)$，$(-3x, -3y, -3)$都是(x, y)的齐次坐标。一般地说，只要$r \neq 0$，(rx, ry, r)都是(x, y)的齐次坐标。每个有限点的齐次坐标无穷多。其中任何两组成比例，每组第三坐标不等于零。反过来说，任何三数(ξ, η, τ)，只要$\tau \neq 0$，便决定一个有限点，它的笛卡儿坐标是$(\xi/\upsilon, \eta/\tau)$，例如$(5, -7, 4)$是有限点$(5/4, -7/4)$的齐次坐标。特别地$(0, 0, r)$或$(0, 0, 1)$是原点的齐次坐标。

这样来说，凡是$\tau \neq 0$的齐次坐标(ξ, η, τ)都是对应于有限点的，其余形式为$(\xi, \eta, 0)$的齐次坐标该对应于什么点呢？自然

该想到无穷远点了。

假定某个方向的斜率是m，这方向对应着一个无穷远点l。通过l的一族平行直线都以m为斜率，方程是

$$y = mx + b, \qquad (3.2)$$

其中b是参数。已经知道这族直线有一个共同的无穷远点l，那么让直线上的有限点P (x,y) 沿直线向无穷远移动时，（图3—2），如果它的齐次坐标有一个与b无关的极限，那么就应该承认这极限是 l 的坐标。

P的非齐次坐标$(x, mx+b)$，当$x\to+\infty$及$x\to-\infty$时，

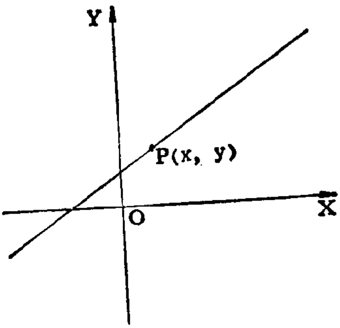


图3—2

P点各按一个走向沿着直线向无穷远移动。P有一组齐次坐标是$(x, mx+b, 1)$，当$x\to\infty$时，前两个坐标都变成无穷大，这正好说明P将要移动到无穷远。但是从另一组齐次坐标 $\left(1,\ m+\frac{b}{x},\ \frac{1}{x}\right)$ 来看，不论x趋于$+\infty$还是$-\infty$，这组坐标的极限都是$(1,m,0)$而且与b无关。因此我们规定$(r,rm,0)$ $(r\neq0)$ 作为直线族(3.2)的公共无穷远点l的坐标。

例如斜角为$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{2\pi}{3}$的方向，分别以$(r\sqrt{3},r,0)$，$(r,r,$

0)，$(r, -r\sqrt{3}, 0)$为无穷远点，或者用最简单的形式$(\sqrt{3}, 1, 0)$，$(1, 1, 0)$，$(1, -\sqrt{3}, 0)$来写。一般地说，斜角为α时，对应的无穷远点是$(1, \operatorname{tg}\alpha, 0)$。

上边讲的不包括y轴上的无穷远点。略加思考就知道它的齐次坐标是$(0, 1, 0)$或$(0, r, 0)$。

包括一切无穷远点的平面叫做**增广平面**。增广平面的一切点都有齐次坐标，而且一切可能的有序三数组，除去$(0, 0, 0,)$以外都是点的齐次坐标。约定不用$(0, 0, 0)$作为任何点的齐次坐标。

从以上关于无穷远点的讨论，可以提取几句时常用到的话：

一、斜率为m的无穷远点是$(1, m, 0)$。

二、无穷远点$(\xi, \eta, 0)$的对应斜率是η/ξ。

三、直线$Ax + By + C = 0$的无穷点是$(B, -A, 0)$。

四、在有限点P的齐次坐标(ξ, η, τ)里令$\tau = 0$，所得的$(\xi, \eta, 0)$就是直线OP的无穷远点。

下边的定理是显而易见的：

定理 1 两点$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$，$(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$相同，必然且只需

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

3.3 直线的齐次方程、无穷远线.

现在自然又会发生一点疑问：增广平面的一切无穷远点究竟怎样排列着呢？下面回答这个问题。

在直线l的方程

$$ax + by + c = 0 \tag{3.3}$$

里，令$x = \xi/\tau$，$y = \eta/\tau$，然后用τ乘全式，得到

$$a\xi + b\eta + c\tau = 0. \tag{3.4}$$

这叫做直线l的**齐次坐标方程**，简称**齐次方程**。要确立这件事，