

材料热加工过程的 数值模拟

张凯锋 魏艳红 魏尊杰 闫牧夫 编著

哈尔滨工业大学出版社

材料热加工过程的 数值模拟

张凯锋 魏艳红 编著
魏尊杰 闫牧夫

哈尔滨工业大学出版社
哈尔滨

内 容 简 介

本书重点介绍了材料热加工数值模拟的基本知识,包括基本理论、方法、应用等。根据材料加工学科中包括铸造、塑性加工、焊接和热处理等四个专业领域的情况,本书覆盖材料热加工中的应力应变场、温度场、流场和扩散场数值模拟等四个方面的内容,其中也包括了作者的一部分研究工作。本书是适应材料加工工程学科硕士研究生课程教学的需要而编写的,也可供从事材料热加工的技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

材料热加工过程的数值模拟/张凯锋编著. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社, 2000. 10
ISBN 7-5603-1525-9

I. 材... II. 张... III. 金属材料-热加工-数值模拟
IV. TG306

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 48490 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号 邮编 150006
传 真 0451—6414749
印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开 本 850×1168 1/32 印张 5.875 字数 165 千字
版 次 2001 年 2 月第 1 版 2001 年 2 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 7-5603-1525-9/TG·54
印 数 1~3 000
定 价 10.00 元

前 言

材料热加工是一项古老的技术,这项技术源远流长,最早可以追溯到青铜器时代。时代发展至今,材料加工工程已经形成一个与经济发展、国防建设紧密相关的技术学科,并纳入到先进制造技术领域之中。它包括铸造、塑性加工、焊接和热处理等诸多领域。

材料加工工程学科在发展过程中不断吸取并融入其他学科的成果,尤其是现代先进科学技术的新成就。进入 20 世纪 70 年代以来,计算机的软硬件技术取得了前所未有的进展,并渗透到各个领域。在先进制造技术领域,计算机技术引发了虚拟制造技术的热潮,至今方兴未艾。这其中就包括材料热加工过程的数值模拟,亦称为虚拟热加工。

若干有关材料热加工过程数值模拟的商业软件已经面世多年。数值模拟亦已成为材料热加工 CAD/CAE/CAM 系统的一个重要环节。软件模拟材料热加工过程突破了经典的解析解法只能分析稳态的平面或轴对称问题的局限,很多三维的非稳态问题已经可以分析。数值模拟不仅给人们带来了许多通过实验不能得到的信息,而且能够在某种程度上给生产实践以指导。甚至某些企业已将数值模拟作为一道必要的工序。

材料热加工过程的数值模拟是一项发展中的技术,因为人们正在使用的软件中也有很多有待解决的问题。材料热加工是一个非常复杂的过程,它包括固体的变形、流体的流变、热能的传递、材料的性变,还有其他各种物理化学场的交互作用等。要模拟这样复杂的过程,就涉及到塑性力学、流变学、传热学、材料物理化学和材料学等各个基础学科,并需要以大量的和精细的热加工实验技术为前提。生产实践中对于数值模拟最基本的要求就是准确,而这又是最难做到

的。对于材料热加工这样的复杂过程进行数值模拟,不进行若干简化是不可能的,但是又难以估计简化带来的误差是在工程上可以接受的还是致命的。在无法通过数值化的方法来准确地分析和估计误差的现状下,实验是检验准确性的惟一标准。这便是一些有关数值模拟的国际会议上以实验结果作为标准考题的标准答案的原因。此外,像弹性恢复计算、逆向模拟算法等问题,虽经许多研究者多年探索,但至今仍未取得理论和技术上的根本性解决。

目前,高等学校材料加工工程学科的很多教师和研究生都在从事数值模拟方面的研究工作,一些企业的材料热加工技术人员也在使用数值模拟软件。无论是使用或是编制软件,都需要一些有关材料热加工数值模拟的基本知识。本书是为适应材料加工工程学科硕士研究生课程教学的需要而编写的,也可供从事材料热加工的技术人员参考。根据铸造、塑性加工、焊接和热处理四个专业领域的情况,本书重点介绍材料热加工中的应力应变场、温度场、流场和扩散场数值模拟等四个方面的内容,相应地分为材料热加工过程的应力应变场数值模拟、材料热加工温度场数值模拟、金属热成形过程流场数值模拟和金属中的扩散及扩散过程的数值模拟等四章。

本书作者为哈尔滨工业大学材料科学与工程学院的张凯锋(第一章)、魏艳红(第二章)、魏尊杰(第三章)、和闫牧夫(第四章)。

本书力求在适应教学需要的同时能够反映一些本领域的最新成果,同时书中还融入了作者的一部分研究工作。由于本书专业领域覆盖面广,加之作者水平有限,书中疏漏之处在所难免,恳请读者予以指正。

在本书撰写和出版过程中承蒙哈尔滨工业大学材料科学与工程学院、教务部和出版社的大力支持,谨致谢意。

编 者

2000 年 10 月

目 录

第一章 材料热加工过程的应力应变场数值模拟	(1)
1.1 材料热加工过程的固体应力应变数值分析的基本问题和基本方法	(1)
1.2 矩阵分析方法	(2)
1.3 弹性平面问题的有限元法	(6)
1.4 非线性方程组的解法	(19)
1.5 固体单元的刚粘塑性有限元法	(22)
1.6 壳单元的刚粘塑性有限元法	(31)
1.7 小变形弹塑性有限元法	(40)
参考文献	(51)
第二章 材料热加工温度场数值模拟	(53)
2.1 温度场及传热的基本概念	(53)
2.2 传热问题的数值计算	(60)
2.3 温度场数值模拟在热加工中的应用	(87)
参考文献	(95)
第三章 金属热成形过程流场数值模拟	(96)
3.1 金属液充型过程数值模拟方法	(97)
3.2 铸件充型流动的数学模型及数值模拟的前处理	(100)
3.3 数学模型的离散	(106)
3.4 边界条件	(119)
3.5 数值稳定性条件	(123)
3.6 固相析出的处理	(124)
3.7 充型过程流场模拟程序编制	(126)
参考文献	(127)

第四章 金属中的扩散及扩散过程的数值模拟	(129)
4.1 扩散的原子理论	(129)
4.2 扩散过程的宏观描述	(135)
4.3 扩散系数的理论计算与实验测定	(140)
4.4 扩散方程的解及浓度分布的数值模拟	(153)
4.5 扩散的一般性处理	(176)
参考文献	(181)

第一章 材料热加工过程的应力应变场数值模拟

1.1 材料热加工过程的固体应力应变数值分析的基本问题和基本方法

一、材料热加工中固体应力应变分析的基本问题

材料的热加工离不开设备、工具和所加工的材料这三大基本条件。这三大基本条件可以作单独分析,也可以综合起来分析。在正常热加工状态下,设备和工具作刚体运动,或有弹性变形,被加工的材料有弹性或塑性变形。

设备和工具本身是由各个零部件组成的,它们在运动过程中给出特定的运动轨迹和所需的能量。若假设它们是刚体,将不会有应力和应变发生,而实际上在很多情况下,设备和工具在加载时要产生弹性变形。

被加工的材料在固体状态下由于外加载荷或热场等条件的作用,必将发生变形,将有应力和应变发生。若为可恢复变形,其应力应变将是弹性的;若为永久变形,其应力应变将是弹塑性的。

这样,从力学方面看,热加工的分析,大体上有刚体力学、弹性力学、塑性力学三大类。其中刚体力学即传统上的理论力学,不涉及到应力应变问题。

二、材料热加工中固体应力应变分析的基本方法

除了非常简单的经典问题能够得出显式的解析解之外,材料热加工中的固体应力应变分析问题一般要采用数值解法。主要的数值解法有有限元法(FINITE ELEMENT METHOD)和有限差分法(FINITE DIFFERENCE METHOD)。其中常用的是有限元法。

在实际问题的分析中,对象的分析往往不是孤立的。如被变形的材料要与工具成对进行分析。但此时工具可以被认为是刚性的,也可以被认为是柔性的。因此就有了不同情况的组合方法:刚体与刚体有限元法;刚体与柔体有限元法;柔体与柔体有限元法。柔体包括弹性体与塑性体。相应地,要采用弹性有限元法或塑性有限元法。

1.2 矩阵分析方法

矩阵分析方法是 1956 年由 Turner 等人提出的,称为直接刚度法。该方法将与外载荷对应的位移作为未知量,进行数值解析,被公认为有限元法的雏形,实际上,矩阵分析方法和有限元法的区别只在于分析对象的不同。矩阵分析方法是**以计算机为基础的分析框架一类构造的数值分析方法,而现在通常所指有限元法是对二维和三维连续体离散化后进行数值分析的方法。二者除了离散化的方法不同之外,其他方面是相同的。所以通常以较简单的二维骨架结构矩阵分析作为有限元法的入门。

如图 1.1 所示,有等截面杆件 a 和 b 在节点 2 处铰接,形成一简单杆系。在节点 2、3 处分别作用外载荷 F_2 和 F_3 。用矩阵分析方法求节点 2 和 3 的位移 u_1 和 u_2 ,杆 a 和 b 中的应力以及支反力 F_1 。

一、离散化(划分单元)

将上述杆系离散化为图 1.1 所示的单元 a 和 b 。节点 1 和 2 对单元 a 的作用力为 F_{a1} 和 F_{a2} ,节点 2 和 3 对单元 b 的作用力为 F_{b1} 和

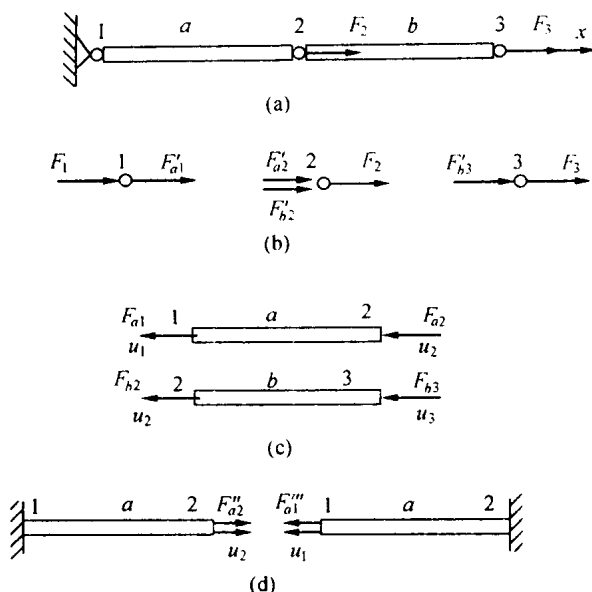


图 1.1 二杆结构及其离散化

F_{b2} , 单元 a 、 b 对节点 1、2、3 的反作用力分别为 F'_{a1} 、 F'_{a2} 、 F'_{b2} 、 F'_{b3} , 根据作用力反作用力原理, 可知 $F_{a1} = F'_{a1}$, $F_{a2} = F'_{a2}$, $F_{b2} = F'_{b2}$, $F_{b3} = F'_{b3}$ 。在节点 1、2、3 处分别作用外力 F_1 、 F_2 、 F_3 。

二、节点的力与位移的关系

位移法: 求出节点位移和节点力的关系, 用节点位移表示节点力, 将节点位移作为未知变量。以下分析中, 以图 1.1(a) 中 x 的方向为正向。

首先不考虑实际的边界条件, 假设单元 a 的 1 端固定 (图 1.1(d)) 有 $u_1 = 0$, 2 端有位移 u_2 , 则 1、2 节点力分别为

$$\left. \begin{aligned} F''_{a2} &= k_a u_2 \\ F''_{a1} &= -F''_{a2} = -k_a u_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

式中 k_a ——杆 1 的刚度, 它的含义是使杆产生单位变形所需施加

的力。

再假设 2 端固定, 则有 $u_2 = 0$, 1 端有位移 u_1 , 则 1, 2 节点力分别为

$$\left. \begin{aligned} F_{a1}''' &= k_a u_1 \\ F_{a2}''' &= -F_{a1}''' = -k_a u_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

杆 1 的各节点所受到总节点力为

$$\left. \begin{aligned} F_{a1} &= F_{a1}''' + F_{a1}'' = k_a u_1 - k_a u_2 \\ F_{a2} &= F_{a2}''' + F_{a2}'' = -k_a u_1 - k_a u_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} F_{a1} \\ F_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

还可以简写为

$$F_{ai} = k_{ij} u_j \quad i, j = 1, 2$$

对于单元 b , 同样有

$$\left. \begin{aligned} F_{b2} &= k_b u_2 - k_b u_3 \\ F_{b3} &= -k_b u_2 + k_b u_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} F_{a2} \\ F_{a3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

还可以简写为

$$F_{ai} = k_{ij} u_j \quad i, j = 2, 3$$

三、建立节点力的平衡方程

节点 1 的平衡方程为

$$F_1 + F'_{a1} = 0$$

即

$$F_1 = -F'_{a1} = F_{a1} = k_a u_1 - k_a u_2$$

节点 2 的平衡方程为

$$F_2 + F'_{a2} + F'_{b2} = 0$$

即

$$F_2 = -F'_{a2} - F'_{b2} = F_{a2} + F_{b2} = (-k_a u_1 + k_a u_2) + (k_b u_2 - k_b u_3) = -k_a u_1 + (k_a + k_b)(u_2 - k_b u_3)$$

节点 3 的平衡方程为

$$F_3 + F'_{b3} = 0$$

即

$$F_3 = -F'_{b3} = F_{b3} = -k_b u_2 + k_b u_3$$

在上述各式中,除各节点位移 u_1 、 u_2 、 u_3 外,均已知。根据上述三方程即可求解。写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & k_a & 0 \\ -k_b & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{22} & k_{22} \\ k_{22} & k_{22} & k_{22} \\ k_{22} & k_{22} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

可写成

$$F = Ku$$

或

$$Ku = F$$

式中 F ——载荷列阵;

K ——总体刚度矩阵;

u ——节点位移列阵。

四、代入位移边界条件求解

已知位移边界条件为 $u_1 = 0$, 载荷向量中只有 F_1 未知。将位移边界条件代入后, 上式成为

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & k_a & 0 \\ -k_b & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

上式为一线性方程组, 可以用矩阵代数方法求解。

通过上述示例,可以归纳有限元法求解步骤如下:

- (1) 将结构离散化,各单元之间以节点连接;
- (2) 求出各单元的刚度矩阵;
- (3) 集成总体刚度矩阵。总体刚度矩阵的主要特点是:有对称性;有正定性;为奇异阵(其对应行列式的值为零);任意行或列元素之和为零;
- (4) 代入位移边界条件;
- (5) 求解线性方程组。

1.3 弹性平面问题的有限元法

一、单元

将连续体离散化经常采用的二维单元有:平面三角形单元,四边形等参单元。

二、位移插值函数

在有限元法中,位移函数对精度有很大影响。单元的位移函数必须满足三个条件:

- (1) 包括单元的刚体位移;
- (2) 包含单元的常应变;
- (3) 单元内的位移必须连续,相邻单元之间的位移要协调。

条件(1)和(2)是有限元解正确性的必要条件,称为完备性条件;条件(3)是充分条件,称为协调性条件。在有些问题中,满足协调性条件较为困难,可采用完备而不协调单元。

一个单元内各点的位移包括该单元自身变形引起的部分和由于其他单元变形通过节点传递给它的部分。后者即所谓刚体位移部分。

单元内各点处的应变包含与坐标无关的常应变和与坐标有关的

变应变两部分。当单元划分很小时,单元内的应变变化较小,常应变是主要部分。

变形后各单元之间的边界和节点不允许脱开。在单元内位移必须连续。

位移函数的确定可以采用两种方法。其一是采用有若干待定系数的多项式,这些系数确定后就成为相应的节点位移参数。其二是采用形函数来描述,形函数通常是用插值多项式表示。位移函数除应满足完备和协调性之外,其待定系数的数目应和节点自由度数相同,以便由节点位移惟一确定全部系数。

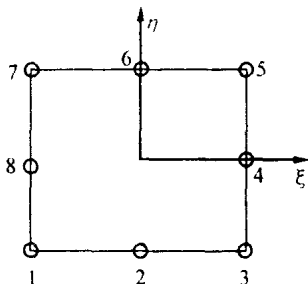


图 1.2 四边形 8 节点等参元

如图 1.2 所示为四边形 8 节点等参单元。该单元每边上有 3 个节点,位移函数在边上成二次曲线变化。位移函数写成用坐标表示的多项式

$$u(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2$$

$$v(\xi, \eta) = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi^2 + b_5\xi\eta + b_6\eta^2 + b_7\xi^2\eta + b_8\xi\eta^2$$

可写为

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= N_i(\xi, \eta) u_i \\ v(\xi, \eta) &= N_i(\xi, \eta) v_i \end{aligned} \right\}$$

式中 N_i 是针对具体单元和节点确定的多项式。

N_i 的确定原则为:

(1) N_i 是坐标的双二次函数;

(2) N_i 在节点 i 等于 1, 在其余的节点 $N_i = 0$ 。即

$$N_i(\xi_i, \eta_i) = 1, \quad N_i(\xi_j, \eta_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

下面以 $N_1(\xi, \eta)$ 为例说明建立形函数方法。在节点 2 ~ 8 上, $N_1(\xi, \eta) = 0$, 3 条直线 $\overline{35}, \overline{57}, \overline{28}$ 通过 7 个节点, 方程为

$$\xi - 1 = 0 \quad \eta - 1 = 0, \quad \xi + \eta + 1 = 0$$

多项式 $(\xi-1)(\eta-1)(\xi+\eta+1)$ 在节点 2~8 上为 0。再利用 $N_1(\xi_1, \eta_1) = 1$ 的条件,有

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{(\xi-1)(\eta-1)(\xi+\eta+1)}{[(\xi-1)(\eta-1)(\xi+\eta+1)]_{-1,-1}} = \frac{1}{4}(1-\xi)(\eta-1)(-\xi-\eta-1)$$

同样可以得到

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi+\eta-1)$$

再求 $N_2(\xi, \eta)$, $N_2(\xi, \eta)$ 在节点 1, 3~8 为 0。直线 $\overline{17}, \overline{35}, \overline{57}$ 通过 7 个节点, 方程为

$$\xi+1=0, \quad \xi-1=0, \quad \eta-1=0$$

多项式 $(\xi+1)(\xi-1)(\eta-1) = (\xi^2-1)(\eta-1)$ 在上述节点为 0。再利用 $N_2(\xi_2, \eta_2) = 1$ 的条件, 有

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{(\xi^2-1)(\eta-1)}{[(\xi^2-1)(\eta-1)]_{0,-1}} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

同样可得

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)$$

注意到 8 个节点的局部坐标系, 可以得到统一表达式为

$$\begin{aligned} N_i(\xi, \eta) = & (1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1)\xi_i^2\eta_i^2/4 + \\ & (1-\xi^2)(1+\eta_0)(1-\xi_i^2)\eta_i^2/2 + \\ & (1-\eta^2)(1+\xi_0)(1-\eta_i^2)\xi_i^2/2 \end{aligned}$$

式中 $\xi_0 = \xi_i \xi$, $\eta_0 = \eta_i \eta$ 。

局部坐标系和整体坐标系间的变换关系为

$$\begin{cases} x = N_i(x, y) x_i \\ y = N_i(x, y) y_i \end{cases}$$

三、应变-位移矩阵

按照应变与位移的关系和位移插值函数的定义有

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial(N_i, u_i)}{\partial x} \\ \frac{\partial(N_i, v_i)}{\partial y} \\ \frac{\partial(N_i, u_i)}{\partial y} + \frac{\partial(N_i, v_i)}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

记

$$\{\delta\}^e = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4, u_5, v_5, u_6, v_6, u_7, v_7, u_8, v_8]^T$$

$$[B] = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4 \quad B_5 \quad B_6 \quad B_7 \quad B_8]$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}$$

则有

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\}^e \quad (1.5)$$

式中 $\{\epsilon\}$ ——应变向量；

$\{\delta\}^e$ ——节点位移向量；

$[B]$ ——应变-位移矩阵，通常简称 B 矩阵。但是， B 矩阵中 N_i 是局部坐标的函数，因此还要进行转换。由复合函数求导，有

$$N_{i,\xi} = N_{i,x}x_{,\xi} + N_{i,y}y_{,\xi}$$

$$N_{i,\eta} = N_{i,x}x_{,\eta} + N_{i,y}y_{,\eta}$$

写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix}$$

记雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix}$$

雅可比矩阵的逆阵为

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix}$$

式中 $|J|$ ——雅可比矩阵的模。矩阵的各元素可以通过插值函数对局部坐标的导数和节点坐标得到

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= N_{i,\xi} x_i, & x_{,\eta} &= N_{i,\eta} x_i \\ y_{,\xi} &= N_{i,\xi} y_i, & y_{,\eta} &= N_{i,\eta} y_i \end{aligned}$$

按照形函数的统一算式,有

$$\begin{aligned} N_{i,\xi} &= (1 + \eta_0)(2\xi + \xi_i \eta_0) \xi_i^2 \eta_i^2 / 4 - \xi(1 + \eta_0)(1 - \xi_i^2) \eta_i^2 + \\ &\quad \xi_i(1 - \eta^2)(1 - \eta_i^2) \xi_i^2 / 2 \\ N_{i,\eta} &= (1 + \eta_0)(2\eta + \eta_i \xi_0) \xi_i^2 \eta_i^2 / 4 + \eta_i(1 - \xi^2)(1 - \xi_i^2) \eta_i^2 / 2 - \\ &\quad \eta(1 + \xi_0)(1 - \eta_i^2) \xi_i^2 \end{aligned}$$

四、应力的矩阵表示

按照虎克定律,并将式(1.5)代入,有

$$\{\sigma\}^e = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [D]^e \{\epsilon\}^e = [D]^e [B] \{\delta\}^e \quad (1.6)$$

式中 $[D]$ ——弹性矩阵;