现代图论基础

[日] 前田　渡　伊東正安　共著
陶思雨　王緝惠　合译

高等教育出版社

内容简介

本书介绍了图论的基础知识及其主要应用。全书共分八章，分别介绍图的概念、图论的一般应用，图的定义和基本性质，路径和割集、关联矩阵和割集矩阵，回路的诸性质图论在电路方面的应用，连接矩阵以及用连接矩阵分析开关电路，用图求解联立方程的方法及图论在系统控制方面的应用；逻辑电路的图论解析等。此外，有三个附录，汇集了本书所使用的线性代数、排列与组合、布尔代数等公式。书后还有习题详解。

本书阐述详细、通顺，可作为电工、电子技术、通讯、数理信息、电子计算机工程、管理工程、系统工程等专业学生的参考书，也可作为有关领域技术人员的自学读物。

责任编辑　王忠民

现代图论基础

［日］前田　渡　伊東正安　共著

隋邑雨　王緝惠　合译

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

祝桥新华印刷厂印装

开本 850×1168　1/32　印张 8.875　字数 210,000

1987年3月第1版　1987年8月第1次印刷

印数 00,001—4,610

书号 15010·0646　定价 2.00元

序　言

所谓图，通常是指用点和线表示的线状图。图论，就是研究这种点和线的联接关系的学问。图不仅是处理和表达问题的一种手段，而且在现代理、工科领域中已成为对具有系统功能的模型进行分析与设计等不可缺少的理论。

图论的主要应用，若举例来说，与电子学有关的，有复杂的电子线路[如大规模集成电路(LSI)等]的分析与设计，印刷电路板的设计与布线，逻辑电路的分析与故障诊断等，以及电子计算机应用程序的研制；在系统及控制方面，用信号流图分析是有效的；在传送网与通讯网方面，要用到割集的概念。

另一方面，就社会上来说，交通、通讯、医疗、教育、流通机构等各种各样系统，都朝着大规模和复杂化的趋向发展，作为处理这些问题的新的科学方法——图论的研究法正在受到重视。此外，图论还应用于政治、经济、心理、语言等方面，适用的范围极其广泛。

图论的历史之长，出乎意料。它起源于1730年的“哥尼斯堡桥的问题”。这是个数学难题。所以即使从图论的发展过程来看，它与数学的关系也非常之深。在本书中也将学习关于欧拉图、一笔画问题、图与线性代数等图论的有关知识。

考虑到上述这些情况，本书对于基础图论及其主要应用给予通顺易懂的阐述，以期作为电工、电子技术、通讯、数理信息、电子计算机工程及管理、系统工程等专业学生的教科书，也可兼作有关领域技术人员的自学读物。

本书的结构，在学习图论的基础知识方面所必需的概念和应用是按章展开的，尽力使读者能够充分理解这些内容。特别是在讲

解上下功夫，使初学者也有兴趣而喜爱学习。所选例题是按逐步加深理解的顺序来安排的。因此，读者将能体会图论的妙趣。

在第一章的绪论中，从我们周围的图的表现开始，介绍图的概念和图论的应用。第二章引出图的定义和简单的性质。第三章定义路径和割集，学习关联矩阵和割集矩阵等用矩阵表示图的方法，说明作为割集应用之例的通讯网络。第四章论及回路的诸性质，特别是割集与回路的正交性，解决根据欧拉图得出的一笔画问题。第五章是关于在电路方面的应用。第六章是关于行列式的展开和用相应的连接矩阵分析开关电路。第七章学习用图求解联立方程的方法，并且论述在系统控制方面的部分应用。第八章论述逻辑电路的图论解析。

为方便读者，在附录中汇集了本书所使用的线性代数、排列与组合、布尔代数等公式。在一本书中全部包罗图论及其应用是不可能的，还因为本书题材所限，所以对于想进一步深入学习的读者，可阅读章末所列的适当的参考书和文献。

读者假如能通过本书对图论的基础有较好掌握，并进一步加深对高深理论的兴趣和加强对应用的关心，将会感到满意。我们期待着，由于图论引起了认识上的飞跃，能够借助图论解决具体问题的日子将早日到来。

作　　者

1978年10月

符 号 表

G	图
H	图G的子图
H^c	子图H的补图（即 $G-H$）
$G_{i(j)}$	把G的顶点 i 和 j 短接后所得的图
$G(\overline{P}_1)$	从G中把路径 P_1 及联接在 P_1 上的边全部去掉后所得的图
P_i	路径
(a, b, c)	由边 a, b, c 组成的路径
$((a)(b)(c))$	路径(a, b, c)中边的加权的总乘积
$[a, b, c]$	由边 a, b, c 组成的回路
$[(a)(b)(c)]$	回路$[a, b, c]$的边的加权的总乘积
C_i	关于补树的连支 i 的基本回路
T	树
T^c	补树
T_2	2-树
Q	割集(或互质割集的并集)
$r(G)$	图的秩
$\varphi(G)$ 或 φ	图的连通片的个数
$n(G)$	图的零度
n	图的顶点(节点)数,参考点
b	图的边数
f	平面图的区域数
$d(v_i)$	顶点 v_i 的次数
$d^+(v_i)$	顶点 v_i 的出次数
$d^-(v_i)$	顶点 v_i 的入次数
Ω	顶点的集合
$E(\Omega_1\times\Omega_2)$	连接 Ω_1 的顶点与 Ω_2 的顶点的边集合

G^*	平面图G的对偶图
$\overset{2}{\cong}$	2-同构
D_m	全顶点循环(P-集循环)
L_m	没有共同顶点的m个顺向回路中全部边的加权的乘积
A_e, A	关联矩阵,基底关联矩阵
Q_e, Q	割集矩阵,基底割集矩阵
B_e, B	回路矩阵,基底回路矩阵
B_f	基本回路矩阵
T	端子间容量矩阵
t_{ij}	顶点 i, j 间的端子间容量
C	连接矩阵
I_e	支路电流向量,即 $I_e=[i_1, i_2,\cdots, i_b]^t$
V_e	支路电压向量,即 $V_e=[v_1, v_2 \cdots, v_b]^t$
V_n	相对于参考点(例如节点 n)的节点电压向量,即 $V_n=[v_{1n}, v_{2n},\cdots, v_{n-1,n}]^t$
J_s, J	电流源(或等效电流源)的电流向量
E_s, E	电压源(或等效电压源)的电压向量
Y	节点导纳矩阵
Z_l	回路阻抗矩阵
$G_1\cup G_2$	表示 G_1 与 G_2 并集的图
$G_1\cap G_2$	表示 G_1 与 G_2 交集（公共部分)的图
G_1-G_2	不属于 G_2 而由 G_1 的元素组成的图
$G_1\oplus G_2$	$G_1\cup G_2-G_1\cap G_2$

目　录

第一章　何谓图论

【要点】 什么是图？图论的应用范围又大概怎样？在我们的周围，巧妙地利用点和线表示了各式各样的图。首先我们将通过一些例子观察这些图，讲述图在现今应用的成效。再者，本章出现的有关图论的基本术语，在第二章以后还将进一步加以阐明。

1.1　在我们周围图的表示

我们经常看到，导游图、铁路和公路的路线图、系统图和流程图等都是用图形表示的。这些图形都以某种形式简捷地表现其对象的本质和关键，从而让人们通过观察，能很好地了解该图所表示的事物。

[1] 何谓图

我们的周围，除上述图形外，还有家谱图和工序图；稍微专门一些，并被广泛地使用着的，则有电路接线图、自动装置和语言的文法结构图等。这些图都是由用点和线组成的图形将“关系”、“连接”、“顺序”等概念变成为模型。图 1.1 是某航空公司的主要航空路线图。图 1.2 是语言的模型图，若沿着一条从始点到终点的路线循行，就得到一句话(例如，“The man was there”，“The old men were there”等)。图 1.3 是把自然数从 1 到 10 相加，求其总和的程序图。图 1.4 是自动装置理论中经常出现的状态转换图的例子。图 1.5 是表示甲烷族碳氢化合物（链烷属烃）的分子符号

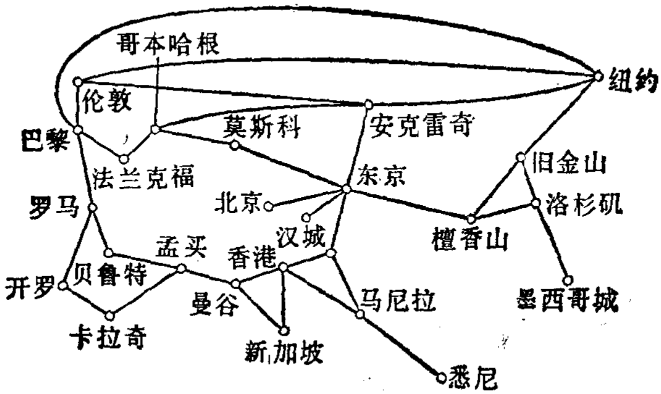


图 1.1 航空路线图的一例

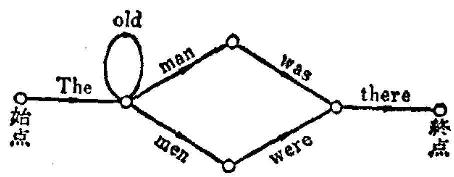


图 1.2 语言模型

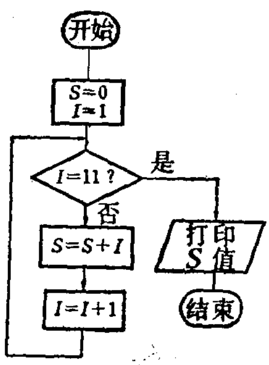
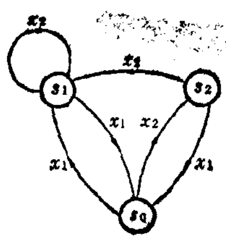
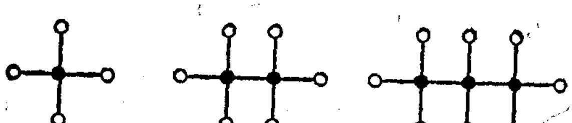


图 1.3 $\sum_{i=1}^{10} i$ 的程序框图



f	s_0	s_1	s_2
x_1	s_1	s_0	s_0
x_2	s_2	s_1	s_1

图 1.4 自动装置的图表



(a) CH_4 (b) C_2H_6 (c) C_3H_8

●:碳原子 ○:氢原子

图 1.5 甲烷族碳氢化合物(C_kH_{2k+2})的分子符号

C_kH_{2k+2} 的图，其中，点表示碳原子和氢原子，线表示它们的结合。图 1.6 是我们经常用的网格梳形图的例子，这也是巧妙地使用分岔线的一种图的表示方法。

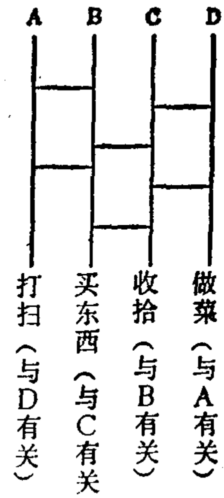


图 1.6 网格梳形图的例子

用“点和线”表示上述这些问题和系统的线图，一般就叫做图。一说到图，可能会立即联想到直线和曲线等函数图，但那些图与本书所说的图不同，前者表示量的关系，后者主要表示联接关系。

用图表示系统与信息等比较直观、清楚，即使作为简单的整理方法，也是非常有效的。不仅如此，从图的自身性质，还可探索出系统与信息的内在性质。因此，图论不仅应用于电工、电子和信息工程方面，而且在处理物理、心理、社会等系统方面的所有领域都有广泛应用。

[2] 图的点和线及图的方向性

上面说过，图就是用点和线表示的线图。这里所说的点，就是表示某种确定事物的点，叫做**顶点**。两个顶点间的连线叫做**边**。顶点和边的集合就是图。全部边都具有方向的图叫做**有向图**，边上没有方向的图叫做**无向图**。

以道路为例，它可以用有向图表示。如单向通行的道路，其岔口用顶点表示，单行道用有向边表示；对于双向通行的道路，则用方向相反的两条有向边并联。就公共汽车路线图来说，由于停靠站是主要的，所以经常用以车站和停靠站作为顶点的无向图来描绘。另外，对于单环行的汽车路线图，则用环状的有向图表示。

1.2 图论的起源——哥尼斯堡桥与四色问题

图论的起源也被说成“哥尼斯堡桥的问题”。从前，在流经哥尼斯堡城（现在叫加里宁格勒）的普雷格尔（Pregel）河上架设有七座桥，使两个小岛和城市连接。问题是，如果每座桥只通过一次，要走遍七座桥（图 1.7）是否可能？欧拉（L. Euler*1）证明了这个问题，结论是不可能的。这个问题相当于“一笔画问题”。按照这样的思想，从任一点出发，最后又回到原来的出发点，能够一笔画出的图称为欧拉图。

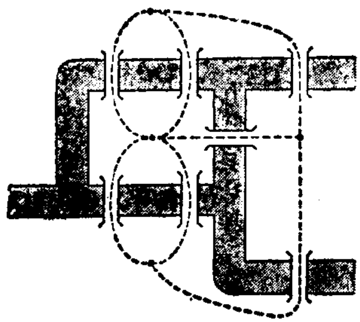


图 1.7 哥尼斯堡桥的模型

不过，许多学者在图论的研究中，比对哥尼斯堡桥更感兴趣的是著名的**四色问题**，这就是在地图上用颜色表示国家的问题。国境相邻接的国家，如以互不相同的颜色分别着色时，只要四种颜色就足够了。这个假说（十九世纪五十年代）成了热烈讨论的问题，许多学者从事于这一问题的研究。1890 年，P. J. Heawood 证明，假如有五种颜色，则不论什么样的地图，都能区别着色。此后，并没有发现不能用四色着色的反例，但也未见发表过数学证明*2。

1.3 图论在现实中的广泛应用

自从晶体管等半导体被发明以来，电子设备有了显著的发展，

---

*1 欧拉是瑞士的数学家（1707—1783），在微积分等方面有贡献，他创立了变分法。另外，虚数 i、自然对数的底 e 的符号也是根据他的想法。

*2 1976 年，伊利诺思大学的 K. Appel 和 W. Haken 两位教授宣布，用电子计算机证明了四色问题（参考文献 27）。

高速大型计算机的出现加速了技术革新。现代工业是许多技术的有机结合，即是系统化缘此所产生的成果。

在以计算机为首的台式计算机、测量仪器、电视机等电子设备中，大量使用着的集成电路(IC)和大规模集成电路(LSI)，就是这方面的典型的例子。在这样复杂的大规模的电子线路的分析中，发展了引入图论的**解析程序**。

还有，利用计算机进行电路设计叫做 CAD (computer aided design)，在这儿，图论也起了作用。在电路描述中，如果用有向图表示元件的联接关系及其电压、电流的方向和数值，则不必用代数方法求解电路方程式，根据图的结构用符号便能求出，对这个问题，即使说多亏有了图论，也不过分。

用于实际配置安装零件的印刷电路板(PC 板)的设计与布线问题中，也用到图论。例如，在底板的板面上，线不能交叉。这一点跟图在平面上各边不得交叉而有什么办法把它画出来是一样的，图的平面性的判定算法有效地起着作用。

由于交通、通讯网的飞速发展，整个世界变得非常密切，非常便利，同时也更复杂更多样化起来。电话线路网、计算机网络、管道网、交通网等所谓网络流问题都随着对图论的研究的进展而发展了。这里所说的流，指的是单位时间内通过的汽车数、油量等一般化了的广义的流动与传输量。

再者，从某一顶点出发且不返回到同一顶点而到达另一顶点所通过的边链叫做**路径**。两个顶点间存在着路径时，信息传递与流动就是可能的。若从图中去掉某一条边，有关的两个顶点间就不存在路径。这样的边的集合叫做图的**割集**。在通讯网中，割集起着重要的作用。例如，两顶点间流动的最大量(端子间容量)，用这样的割集便可完全确定(福特-富尔克森的最大流-最小切割定理)。

在逻辑电路方面的组合电路和顺序电路中，图论也很活跃。或者把变量与图的边对应，对开关电路用图的连接矩阵来表示，对开关电路进行分析；或者，另一种做法，把变量与顶点相对应而表示数字电路，既能求出它的拓扑性质，又能进行分析，甚至还能应用于设计。在电路的故障诊断中更要利用到图。

信号流图是表示信号在整个线路（信道）中传输状态的图，这个信号通过线路进入中继站（局）再从中继站（局）沿通向其他各站（局）所有线路传输。因此，这种图能很好地表现出线性系统的物理意义，故在系统研究中被广泛使用。信号流图不仅有助于联立方程式的求解，对于采用由一阶线性微分方程组的状态方程的过渡过程的分析和自动控制问题也是有效的。

现代社会的政治、经济、工业等，无论哪一个领域，都有复杂化和大规模化的趋向。在这样的背景下，以种种条件和制约为基础的效果的规划、运用、管理、买卖等的技巧发展起来了，运筹学、博奕学、用于工程管理的计划鉴定检查法（PERT）、关键工序路线法（CPM）、线性规划等科学手法也陆续出现了。然而，在这些方法中都引进了图论及其技巧。例如，若把复杂的工程用有向图表示，则由于最长路径决定着整个工程所需的天数（时间），因此这种图在工程管理中也就重要了。

像这样的图论，既具有隐藏着的才能，又正在变为积极的奴仆，为人类所用。

习　题

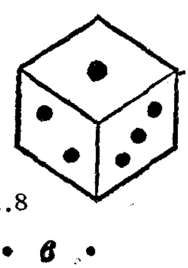


图1.8

［1］假如将骰子（图1.8）的六种眼子用顶点表示，把以这个立方体的边作为分界的面跟面连接起来，在对应的顶点间就连成了边。试根据这个规则，把骰子用图表示。

[2] 试用图表示 A、B、C、D、E 五个队的联赛。

[3]* 六个队联赛，同一个队在一天之内不许比赛2次以上，如一天内进行3场比赛，五天之内要全部赛完。怎样进行组合才行？

[4] 在 800 cm³ 的玻璃杯中倒入一杯乳剂。使用 500 cm³ 和 300 cm³ 的空玻璃杯，希望每个杯子恰好倒入 400 cm³。这里，不承认用眼睛估计的分量，但容许这样的操作：从某个杯子往另外的杯子里注入，当有某一个杯子成为空杯，或者为一满杯时，这个操作即算结束。这样，在等量分配的情况下，最少注入的次数(操作次数)是多少次？

参考文献

1) D. König: Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen, Leipzig (1936)

2) C. Berge: The Theory of Graphs and Its Applications, John Wiley & Sons, Inc., New York (1962)
[原のフランス語版: Theorie des graphes et ses applications. Dunod, Paris (1958)]

3) S. Seshu & M. B. Reed: Linear Graphs and Electrical Networks, Addison Wesley (1961)

4) W. H. Kim & R. T. Chien: Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks, Columbia University Press (1962)

5) O. Ore: Theory of Graphs, American Mathematical Soicety, Providence, R. I (1962)

6) O. Ore: Graphs and Their Uses, Random House, New York (1963)

7) R. B. Busacker and T. L. Saaty: Finite Graphs and Networks: An Introduction with Applications, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York (1965)
[訳本: 矢野・伊理訳: グラフ理論とネットワーク/基礎と応用，培風館(1970)]

8) F. Harary, R. Z. Norman, D. Cartwright: Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs, John Wiley & Sons, Inc., New York (1965)

9) F. Harary: Graph Theory and Theoretical Physics, Academic Press (1967)