2002年 3+X 高考总复习

考点解析与测试

东北师范大学附属中学 编

数学

辽海出版社

2002年3+X高考总复习

● 考点解析与测试

数　学

·东北师范大学附属中学　编·

辽 海 出 版 社

2002年3+X高考总复习·考点解析与测试
数　学
东北师范大学附属中学　编
辽海出版社出版
（沈阳市和平区十一纬路25号　邮政编码110003）
沈阳新华印刷厂印刷　　辽海出版社发行

开本：890×1194毫米　1/16　字数：350千字　印张：11¾
印数：12,001—20,000册
2001年10月第2版　2001年10月第2次印刷

责任编辑：杨晨红　路永久　张秀俊　责任校对：王　霞
封面设计：杜　江　版式设计：曾金凤

ISBN 7-80649-934-2/G·606
定价：13.80元

前　言

2001年3+X高考，已在全国18个省市全面铺开，2002年3+X高考，还将继续实行并进一步在全国范围内推广。为此，广大师生在备考复习中甚感困惑。面对这种形势，我们组织一批有经验的教研员和优秀的一线教师，编写了这一套《2002年3+X高考总复习》丛书。该套丛书以2001年全国3+X高考试题及2002年高考改革试点标准为依据，写成语文、数学、英语、文科综合、理科综合5个分册。每册都通过典型例题解析、综合能力测试、高考试题分析等形式，对教学中的重点和难点予以分析和指导；对解题的思路进行启发和点拨；对复习过程中容易出现的问题进行剖析和指导；对掌握知识的情况进行检测和考查，从而使学生在系统复习的基础上，全面提高分析问题和解决问题的能力。因此，这套丛书既有利于教师指导学生，也有利于学生备考自学。

本书以现行高中数学教学大纲为依据，配合全国统编教材，针对3+X高考数学学科的命题走向编写，与教材内容同步。

本书每一章由基础知识、典型例题、习题精选和参考答案四个部分组成，共12章，其中第十二章为3+X高考数学仿真模拟试题，可供考生自我检测用。

配合课堂教学、加强素质教育、提高学生在数学学科的综合能力，是决胜于3+X高考的关键，因而我们在编写中，以基础知识和基本题型为基础，以最新题型为出发点，以培养学生的“数学思想”和“数学方法”为手段，从而达到提高学生的观察问题、归纳问题、分析问题和解决问题的能力，适应3+X高考之目的。

本书是以提高学生的“数学思想方法”和“数学方法”为主题写成的。因为只有掌握“两法”，才能顺利形成解题轨迹，才能使学生从题海中解放出来，以不变应万变，变被动为主动。相信本书会成为学生进行高考总复习的良师益友。

由于编写时间仓促，书中难免有不当之处，恳请广大师生提出宝贵意见，以便再版时修订。

编　者

2001年9月

《2002年3+X高考总复习》丛书编委

《2002年3+X高考总复习·考点解析与测试(数学)》编委

主　　编　陆　波　汪家玲

编　　者　陆　波　汪家玲　夏文显　暴偶奇

目录

代数

立体几何

解析几何

3+X 高考模拟试题

第一章 集合与函数

第一讲 集 合

▷基础知识

1．概念：集合、子集、空集、全集、属于、包含、相等、交集、并集、补集．

【说明】(1) 空集是任何集合的子集；空集是任何非空集合的真子集；{0} 不是空集．

(2) 集合中的元素具有：①确定性；②互异性；③无序性．

2．集合的表示方法

(1) ①列举法；②描述法；③图形法．

(2) 常用集合的表示符号

空集：∅；整数集：**Z**；有理数集：**Q**；自然数集：**N**；实数集：**R**；复数集：**C**．

3．集合的运算

(1) 交集；(2) 并集；(3) 补集．

4．元素、集合的关系

(1) 元素和集合．

(2) 集合与集合：(1) 相等；(2) 包含；(3) 真包含．

【说明】两类符号"∈、∉"与"⊆、⊂、⊄、⊄"要注意正确使用．前者表示元素和集合的关系，后者表示集合与集合的关系．

5．运算性质

(1) $A\subseteq B$，$B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$．

(2) $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$．

(3) $A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$．

(4) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$．

(5) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$；
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$．

(6) 德·摩根律：$\overline{A\cap B}=\bar A\cup\bar B$，$\overline{A\cup B}=\bar A\cap\bar B$．

(7) $\bar{\bar A}=A$．

▷典型例题

例1 满足 $\{1,2\}\subseteq M\subsetneq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 M 的个数是： （ ）

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

【分析】若将符合条件的集合 M 一一列出比较麻烦，而本题实质是转化为求集合 {3, 4, 5} 的子集个数，故答案选 D.

例2 设 $I=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}\}$，$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y-3}{x-2}=1\right\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+1\}$，求 $\bar A\cap B$．

【分析】确定集合与集合的关系，进行交、并、补运算等问题时，首先应明确各集合的元素情况．根据题设，由数学中的转化思想，$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y-3}{x-2}=1\right\}=\{(x,y)\mid y=x+1,\ x\neq2\}$，再由数形结合法可知，集合 A 中的元素是直线 $y=x+1$ 上的点去掉 (2, 3)点后的全体；而集合 B 中的元素是直线 $y=x+1$ 上点的全体．故可得 $\bar A\cap B=\{(2,3)\}$．

【评注】数学中的转化思想在解题中有广泛的应用．如：由不同转化到相同；由繁转化到简；由难转化到易；由一种形式转化到另一种形式等等．

例3 100名学生报名参加 A、B 两个课外活动小组，报名参加 A 组的人数是全体学生人数的 $\frac{3}{5}$，报名参加 B 组的人数比报名参加 A 组的人数多 3 人，两组都没报名的人数是同时报名参加 A、B 两组人数的 $\frac{1}{3}$ 多 1 人，求同时报名参加 A、B 两组的人数和两组都没报名的人数．

【分析】本题是设未知数列方程的实际问题．

解：记集合 $A\cap B$ 的元素个数为 x．

则由题意可知，集合 $A\cap B$、$\dot A\cap B$、$\bar A\cap\bar B$ 的元素个数分别为 $60-x$、$63-x$、$\frac{1}{3}x+1$．

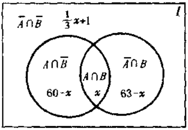

图 1—1

如图 1—1 所示，有 $(60-x)+x+(63-x)+\left(\frac{1}{3}x+1\right)=100$　　解得　　$x=36$

故两组都报名的人数为 36 人，两组都没报名的人数为 13 人.

【评注】借助图形语言，让图形说话，很容易列出方程、帮助解题.

例 4　设 $A=\{x\mid x\in[-2,a]\}$，$B=\{y\mid y=2x+3,\ x\in A\}$，$C=\{z\mid z=x^2,\ x\in A\}$，且 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

【分析】本题应根据 $C\subseteq B$，列出两个函数值域的关系式. 当 a 在变化时，函数 $z=x^2$ 的值域的表达式不是一种，因此要根据函数 $z=x^2$ 的值域的表达方式的不同进行分段解决.

解：$A=\{x\mid x\in[-2,a]\}$，

$B=\{y\mid y=2x+3,\ x\in A\}=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 2a+3\}$，

(1) 当 $-2<a\leqslant 0$ 时，$C=\{z\mid a^2\leqslant z\leqslant 4\}$.

$\because C\subseteq B$，$\therefore 4\leqslant 2a+3$，解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$，与 $-2<a\leqslant 0$ 矛盾.

(2) 当 $0<a\leqslant 2$ 时，$C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant 4\}$.

$\because C\subseteq B$，$\therefore 4\leqslant 2a+3$，解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$，故 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$.

(3) 当 $a>2$ 时，$C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant a^2\}$.

$\because C\subseteq B$，$\therefore a^2\leqslant 2a+3$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 3$，故 $2<a\leqslant 3$.

综上可得　$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 3$.

【评注】分类讨论是一种重要的数学思想，因此要树立分类讨论的意识，掌握分类讨论的方法.

▷习题精选

一、选择题

1. 考虑下列各组对象：(1) 20 的所有约数；(2) 不大于 2 的全体正数；(3) 周长大于 10 的所有三角形；(4) 方程 $x^2+2=0$ 在实数范围内的解；(5) 在平面直角坐标系中，靠近原点的所有点. 其中能构成集合的有：　(　　)

A. 2 组　　B. 3 组　　C. 4 组　　D. 5 组

2. 设 A、B 是两个非空集合，命题甲 "$A\cap B=A$"，命题乙 "$A\subset B$"，则甲是乙的：　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 定义 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$，若 $M=\{5,6,7,8,9\}$，$N=\{6,9,10\}$，则 $N-M$ 等于：　(　　)

A. M　　B. N　　C. $\{6,9\}$　　D. $\{10\}$

4. 设 $A=\{x\mid x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x\mid x\leqslant a\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则 a 的取值范围是：　(　　)

A. $a\leqslant -2$　B. $a<-2$　C. $a\leqslant 4$　D. $a<4$

5. 已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\cos\frac{n}{3}\pi,\ n\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x=\sin\frac{2m-3}{6}\pi,\ m\in\mathbf{Z}\right\}$，则 A、B 的关系是：　(　　)

A. $A\supsetneqq B$　B. $A\subsetneqq B$　C. $A=B$　D. 不确定

6. 若 $M=\{0,1\}$，$N=\{1,2\}$，$P\subset M\cup N$，那么集合 P 的个数是：　(　　)

A. 7　　B. 8　　C. 15　　D. 16

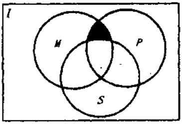

图 1—2

7. (1999 年全国高考题) 如图 1—2 所示，I 是全集，M、P、S 是 I 的 3 个子集，则阴影部分所表示的集合是：　(　　)

A. $(M\cap P)\cap S$　　B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap\bar{S}$　　D. $(M\cap P)\cup\bar{S}$

8. (2000 年全国高考题) 设集合 $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $|x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中的元素个数是：　(　　)

A. 11　B. 10　C. 16　D. 15

9. 设全集 $I=\{1,2,3,4,5\}$，如果 $A\cap B=\{2\}$，$\bar{A}\cap B=\{1,4\}$，则 $\bar{B}$ 等于：　(　　)

A. 3　B. $\{5\}$　C. $\{1,2,4\}$　D. $\{3,5\}$

10. 从 $M\cup N=M\cup P$ 可推出：　(　　)

A. $N=P$　　B. $M\cap N=M\cap P$

C. $M\cap N=M\cap P$　　D. $\overline{M}\cap N=\overline{M}\cap P$

11．已知集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，$N=\left\{(x,y)\mid \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ a、b\in\mathbf{R}^+\right\}$，若 $M\cap N\neq\varnothing$，则 a、b 应满足：（　）

A. $a\leqslant1$，$b\leqslant1$　　B. $a\leqslant\sqrt{2}$，$b\leqslant\sqrt{2}$

C. $ab\geqslant\sqrt{a^2+b^2}$　　D. $ab\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$

二、填空题

12．设集合 $A=\{x\mid 2\lg x=\lg(8x-15),\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\left\{x\mid \cos\frac{x}{2}>0,\ x\in\mathbf{R}\right\}$．则 $A\cap B$ 的元素个数为_____个．

13．$I=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)\mid \lg(y-4)-\lg(x-2)=\lg3\}$，$B=\{(x,y)\mid 3x-y-2=0\}$，则 $\bar{A}\cap B=$________．

三、解答题

14．已知 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求实数 P 的范围．

15．已知 $A=\{x\mid x^2+px+q\leqslant0\}$，$B=\left\{x\mid \frac{x-3}{x+1}>0\right\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$，$A\cap B=\{x\mid 3<x\leqslant4\}$，求 p、q．

第二讲　函　　数

（一）函数与反函数

基础知识

1．映射：设 A、B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有惟一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作　f：$A\to B$．

【说明】(1) 给定一个由集合 A 到集合 B 的映射，A 中的每个元素在 B 中都有惟一的象；

(2) 映射允许不同元素有相同的象；

(3) 允许 B 中的元素没有原象．

2．函数的定义

(1) 初中函数定义（略）．

(2) 定义：设 A、B 都是非空数集，f 是 A 到 B 的一个对应法则，那么从 A 到 B 的映射 f：$A\to B$，就叫做 A 到 B 的函数，记作 $y=f(x)$．其中 $x\in A$，$y\in B$，原象的集合 A 叫做函数的定义域，象的集合 C（$C\subseteq B$）叫做函数的值域．

(3) 三要素：①定义域；②值域；③对应法则是构成函数的三要素．

3．函数的表达方法

(1) 解析法；(2) 图象法；(3) 列表法．

4．函数定义域的求法

(1) 求使函数有意义的自变量允许值的公共部分；

(2) 对有实际意义的函数要根据实际的要求决定定义域．

5．反函数

(1) 反函数的定义：由函数 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$．若对 y 在值域 C 中的每一个值，x 有且只有一个定义域 A 中的值与之对应，再将 x、y 对换得到 $y=f^{-1}(x)$，叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数．反函数的定义域是原函数的值域，反函数的值域是原函数的定义域．

【说明】存在反函数的条件：①由映射 f：$A\to B$ 决定的函数 $y=f(x)$，定义域为 A，值域为 B．如果对于 A 中的不同元素在 B 中有不同的象，反之在 B 中的元素都有原象．②单调函数存在反函数（存在反函数的函数不一定单调）．

(2) 函数与其反函数之间的关系

①定义域；②值域；③图象；④单调性；⑤奇偶性．

(3) 求反函数的步骤

①求原函数的值域；

②$y=f(x)\Rightarrow x=f^{-1}(y)\Rightarrow y=f^{-1}(x)$；

③注明反函数的定义域．

典型例题

例 1　设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{0,1\}$，建立从 A 到 B 的映射 f：$A\to B$，若集合 B 中的元素都有原象，求 f：$A\to B$ 的映射个数．

【分析】由已知条件联想到，本题是从求 f：$A\to B$ 的映射个数演变而来．

解：$\because f$：$A\to B$ 的映射个数为 2^5，

$\therefore$ 当集合 B 中的元素都有原象的映射个数为

$2^5-2=30$.

【评注】由试题发生联想和回忆，本题是和哪个解过的题相似，或者是从哪个解过的题演变而来，或者和哪个公式、定理有关，这是解数学题时经常的思维过程.

例2 若函数 $y=f(x)$ 的图象过 $(0,1)$ 点，则函数 $\varphi(x)=f(4-x)$ 的反函数的图象过点：（　）

A. $(-4,1)$　　B. $(1,-4)$

C. $(4,1)$　　D. $(1,4)$

【分析】想到 $\varphi(x)=f(4-x)$ 的图象可由 $f(x)$ 的图象变换得到.

解：因为 $y=f(x)$ 的图象过 $(0,1)$ 点，那么 $f(x+4)$ 的图象过 $(-4,1)$ 点，因此 $\varphi(x)=f(4-x)$ 过 $(4,1)$ 点，所以 $\varphi(x)$ 的反函数过 $(1,4)$ 点．故选 D.

【评注】用几何方法解题，简单明了，形象直观，注意使用.

例3 函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，把 $y=f(x)$ 的图象在直角坐标平面内绕原点顺时针转动 90°后是另一个函数的图象，则这个函数是（　）

A. $y=f^{-1}(-x)$　　B. $y=f^{-1}(x)$

C. $y=-f^{-1}(x)$　　D. $y=-f^{-1}(-x)$

【分析】解此类问题可通过画图解决，也可通过图象上任意点的坐标变化情况解决，此题我们用第二种方法.

解：设 $P(x,y)$ 为 $y=f(x)$ 上任意一点.

$\because (x+yi)(-i)=y-xi$

$\therefore$ 转动 90°后，P 点的坐标为 $P_1(y,-x)$

而 $(y,-x)$ 和 (y,x) 关于 x 轴对称，故选 C.

【评注】函数图象之间的问题是一大类问题，要掌握这种解题方法．通过点的对称判断图象的对称关系，是解决这类问题的通常方法.

例4 求函数 $y=\log_{(2x-1)}\sqrt{3x-2}$ 的定义域.

【分析】本题为对数函数，故求定义域时要考虑对数的真数和底的要求.

解：$\begin{cases}3x-2>0\\2x-1>0\\2x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow x>\dfrac{2}{3}$ 且 $x\neq 1$.

【评注】求函数的定义域，就是根据函数的解析式对于自变量的要求列出不等式（或不等式组），如 0 次幂的底、开偶次方时等等.

例5 求函数的解析式

(1) 已知 $f(x+1)=x^2+x-2$，求 $f(x)$；

(2) 已知 $f(x+1)=x^2-x+1$，求 $f(x)$；

(3) 已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f[f(x)]=2x+3$，求 $f(x)$；

(4) 已知 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$，求 $f(x)$；

(5) 已知 $f(0)=-2$，$f(x-y)=f(x)+y(y-2x-1)$，求 $f(x)$.

解：(1) 代换法

设 $x+1=t\Rightarrow x=t-1$，代入得 $f(t)=(t-1)^2+(t-1)-2=t^2-t-2$

$\therefore f(x)=x^2-x-2\quad(x\in\mathbf{R})$.

(2) 构造法

$f(x+1)=x^2-x+1=(x+1)^2-3(x+1)+3$

$\therefore f(x)=x^2-3x+3\quad(x\in\mathbf{R})$.

(3) 待定系数法

设 $f(x)=ax+b$，则 $f[f(x)]=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b=2x+3$

$\therefore\ \begin{cases}a^2=2\\ab+b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\pm\sqrt{2}\\ab+b=3\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}a=\sqrt{2}\\b=3(\sqrt{2}-1)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\sqrt{2}\\b=-3(\sqrt{2}+1)\end{cases}$.

(4) 方程法

用 $\dfrac{1}{x}$ 换 x，得

$$\left.\begin{aligned}f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)&=\frac{3}{x}\\f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)&=3x\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{x}-x$$

$(x\neq 0)$.

(5) 赋值法

令 $x=0$，代入得 $f(-y)=f(0)+y(y-1)\Rightarrow f(-y)=y^2-y-2\Rightarrow$

$f(-y)=(-y)^2+(-y)-2$

$\therefore f(x)=x^2+x-2$.

例6 求下列函数的值域

(1) $y=x+\sqrt{1-2x}$　　(2) $y=\dfrac{2x}{x-3}$

(3) $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$　　(4) $y=2x^2+\dfrac{3}{x}\ (x>0)$

(5) $y=x^3+\sqrt{2x-1}$　　(6) $y=\dfrac{\sin x-1}{3\sin x+1}$

(7) $y=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$　　(8) $y=\dfrac{\sin x-2}{\cos x-2}$

解：(1) 配方法

设 $t=\sqrt{1-2x}\ (t\geqslant 0)\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}(1-t^2)$

$\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}(1-t^2)+t=-\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{1}{2}\Rightarrow$

$y=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2+1\Rightarrow y\in(-\infty,1]$.

(2) 求反函数的定义域

$y=\frac{2x}{x-3}\Rightarrow x=\frac{3y}{y-2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x}{x-2}$

$(x\neq 2)\Rightarrow y\neq 2$，$y\in\mathbf{R}$.

(3) 利用二次方程的判别式

由原式得 $yx^2+(y-1)x+(y-1)=0$

①$y=0$ 时，$x=-1$

②$y\neq 0$ 时，$\Delta=(y-1)^2-4y(y-1)\geqslant 0\Rightarrow 3y^2-2y-1\leqslant 0\Rightarrow -\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 1$（经检验，两端成立）

综上，$y\in\left[-\frac{1}{3},1\right]$.

【说明】用判别式法需检验两端是否成立．若不成立，需换其它方法．

(4) 利用基本不等式

$y=2x^2+\frac{3}{2x}+\frac{3}{2x}\geqslant 3\sqrt[3]{2x^2\cdot\frac{3}{2x}\cdot\frac{3}{2x}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{36}$.

(5) 利用函数的单调性

∵原函数单调递增，且 $2x-1\geqslant 0$　∴$x\geqslant\frac{1}{2}$，

$x=\frac{1}{2}$时，$y=\frac{1}{8}$　∴$y\in\left[\frac{1}{8},+\infty\right)$.

(6) 利用已知函数的值域

由已知得　$\sin x=\frac{y+1}{1-3y}\Rightarrow\frac{y+1}{1-3y}\geqslant -1$，

$\frac{y+1}{1-3y}\leqslant 1\Rightarrow y\geqslant 1$ 或 $y\leqslant 0$.

(7) 分离常数法

$y=\frac{x^2+2}{x^2+1}=1+\frac{1}{x^2+1}$，$x^2+1\geqslant 1\Rightarrow 0<\frac{1}{x^2+1}\leqslant 1\Rightarrow 1<1+\frac{1}{x^2+1}\leqslant 2\Rightarrow y\in(1,2]$.

(8) 数形结合法

令 $\left.\begin{array}{l}m=\sin x\\ n=\cos x\end{array}\right\}\Rightarrow m^2+n^2=1$．则 $y=\frac{\sin x-2}{\cos x-2}$的几何意义为：点 $P(2,2)$ 与圆 $m^2+n^2=1$ 上点的连线的斜率．设过 $P(2,2)$ 的直线为 $y-2=k(x-2)\Rightarrow kx-y-2k+2=0\Rightarrow\frac{-2k+2}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 1\Rightarrow 3k^2-8k+3\leqslant 0\Rightarrow\frac{4-\sqrt{7}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{4+\sqrt{7}}{3}\Rightarrow\frac{4-\sqrt{7}}{3}\leqslant y\leqslant\frac{4+\sqrt{7}}{3}$.

【说明】在求值域问题时，有时一道题的解法并不惟一，可根据具体条件，选择适当方法求解．在复杂问题中，可通过代换，变成上述基本形式中的某一种求解．

▷习题精选

一、选择题

1．(2000 年全国高考题) 设集合 A 和 B 都是自然数集合 $\mathbf{N}$，映射 f：$A\rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n，则在映射 f 下，象 20 的原象是：（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

2．给出以下四个命题

(1) 奇函数必有反函数；

(2) 偶函数必无反函数；

(3) 在其定义域上单调函数必有反函数；

(4) 有反函数的函数必是定义域上的单调函数．

上述四个命题中，正确命题的个数是：（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

3．下列命题中正确的是：（　　）

A．若 $M=\{$整数$\}$，$N=\{$正奇数$\}$，则一定不能建立从 M 到 N 的映射

B．若 A 是无限集，B 是有限集，则一定不能建立从 A 到 B 的映射

C．集合 $A=\{a\}$，$B=\{1,2\}$，则从 A 到 B 只能建立一个映射

D．$A=\{1,2\}$，$B=\{a\}$，从 A 到 B 只能建立一个映射

4．从集合 $A=\{a,b\}$ 到集合 $B=\{x,y,z\}$ 可以建立的映射的个数共有：（　　）

A．9 个　　B．8 个　　C．6 个　　D．4 个

5．函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$的值域是：（　　）

A．$\{y|y\geqslant 0\}$　　B．$\{y|y>0\}$

C．$\{0\}$　　D．$\mathbf{R}$

6．设 C 和 C'分别表示函数与其反函数的图象，则下列命题正确的是：（　　）

A．C 和 C'没有公共点

B．C 和 C'最多有两个公共点

C．C 和 C'可能有无数个公共点

D．C 和 C'的公共点在直线 $y=x$ 上

7．与函数 $y=\sqrt{-2x^3}$有相同图象的一个函数是：（　　）

A．$y=x\sqrt{-2x}$　　B．$y=x^2\sqrt{\frac{-2}{x}}$

C. $y=-\sqrt{2x^3}$　　　D. $y=-x\sqrt{-2x}$

8. 设有三个函数，第一个函数 $y=\varphi(x)$，它的反函数是第二个函数，而第三个函数的图象与第二个函数的图象关于直线 $x+y=0$ 对称，则第三个函数是：（　）

A. $y=-\varphi(x)$　　　B. $y=-\varphi(-x)$

C. $y=-\varphi^{-1}(x)$　　　D. $y=-\varphi^{-1}(-x)$

9. 设 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & (x\leq -1)\\ 2x+2 & (-1<x<1)\\ \dfrac{1}{x}-1 & (x\geq 1)\end{cases}$

已知 $f(a)>1$，则 a 的取值范围为：（　）

A. $(-\infty,\ -2)\cup\left(-\frac{1}{2},\ +\infty\right)$

B. $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

C. $(-\infty,\ -2)\cup\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$

D. $\left(-2,\ -\frac{1}{2}\right)\cup(1,\ +\infty)$

10. 函数 $y=-x(x+2)$ 的定义域为 $x\geq 0$，则其反函数的定义域为：（　）

A. $[0,\ +\infty)$　　　B. $(-\infty,\ 0]$

C. $(0,\ 1]$　　　D. $(-\infty,\ 1]$

11. 函数 $f(x)=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）对于任意的实数 x，y 都有：（　）

A. $f(xy)=f(x)f(y)$

B. $f(xy)=f(x)+f(y)$

C. $f(x+y)=f(x)f(y)$

D. $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

12. 已知 $y=f(x)$ 过点 $P(1,\ 2)$，则 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图象过点：（　）

A. $(2,\ 1)$　　　B. $(1,\ 2)$

C. $(1,\ 1)$　　　D. $(-1,\ 2)$

13. 已知函数 $f(x+1)=x^2+2x-1$，$x\in[1,\ 2]$，则 $f(x+1)$ 的反函数是：（　）

A. $[1,\ 2]$ 上的增函数　B. $[1,\ 2]$ 上的减函数

C. $[2,\ 7]$ 上的增函数　D. $[2,\ 7]$ 上的减函数

14. 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+kx+2)$ 的值域为 $(-\infty,\ +\infty)$，则实数 k 的取值范围是：（　）

A. $(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$　　　B. $[-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}]$

C. $(-\infty,\ -2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},\ +\infty)$

D. $(-\infty,\ -2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},\ +\infty)$

15. 函数 $y=\sin x+\sin|x|$ 的值域是：（　）

A. $[-1,\ 1]$ B. $[0,\ 2]$ C. $[-2,\ 2]$ D. $[0,\ 1]$

二、填空题

16. 设 f 是集合 $M=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 到 $N=\{1,\ 2,\ 3\}$ 的映射，且 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=9$，那么映射 f 的个数为______.

17. 若 $x\in(0,\ 1)$ 时，函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 与其反函数 $f^{-1}(x)$ 的大小关系是______.

18. 函数 $y=f(x+1)$ 的定义域是 $(-2,\ 3)$，则函数 $y=f(2x-1)$ 的定义域为______.

19. 如果 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2$，则 $f(x)$ 的定义域为______.

20. 已知 $f(\cos x)=\cos 2x-6\cos x$，则 $f(\sin\theta)$ 的解析式为______，$f(\sin\theta)$ 的最小值为______.

21. 函数 $y=1-\frac{2}{x}-x$ 的值域为______.

22. 函数 $y=x^4+x^2+1$ 的值域为______.

三、解答题

23. 设火箭的质量是箭体质量与燃料质量的和. 在不考虑空气阻力的条件下，两火箭的最大速度之差与这两火箭质量的自然对数之差成正比. 已知某火箭的箭体质量为 m (kg). 当燃料质量为 m (kg) 时，该火箭的最大速度为 $2\ln 2$(km/s). 当燃料质量为 $m(e-1)$ (kg) 时，该火箭的最大速度为 2 (km/s).

(1) 写出该火箭最大速度 y 与燃料质量 x 的函数关系式 $y=f(x)$；

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象是否可由 $y=e^x$ 的图象经过变换（对称、平移和伸缩等）得到，如果可能，经过怎样的变换得到？

24. 我国是水资源比较贫乏的国家之一，各地采用价格调控等手段来达到节约用水的目的. 某市用水的收费方法是：水费 = 基本费 + 超额费 + 损耗费，若每月用水量不超过 $a\text{m}^3$，只付基本费用 8 元和每月每户的定额损耗费用 c 元，超过部分每 m^3 付 6 元. 已知每户每月定额损耗费用不超过 5 元，下表是该市一家庭第一季度的用水量和支付费用表，根据表中数据求 a、b、c 的值.

月　份	用水量（m^3）	水费（元）
1	9	9
2	15	19
3	22	33

25. 某自来水池中存有 400 吨水，水厂每小时向蓄

水池中注入 60 吨水，同时蓄水池又不断向居民区供水，t 小时供水总量为 $120\sqrt{6t}$ 吨（$0\leqslant t\leqslant 24$）.

（1）从供水开始到第几小时，蓄水池中的水量最少？最少水量为多少吨？

（2）若蓄水池中水量少于 80 吨，就会出现供水紧张现象．试问，在一天的 24 小时内，有几小时出现供水紧张现象？说明理由．

（二）函数的性质

▷基础知识

1．函数的单调性

（1）定义：略．

（2）判定方法

①定义；②图象；③根据已知函数的单调性．

（3）复合函数的单调性

设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 都是单调函数，则函数 $y=f[g(x)]$ 在其定义域内也是单调函数．若 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的单调性相同时，$y=f[g(x)]\uparrow$，若 $f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的单调性相反时，$y=f[g(x)]\downarrow$．

（4）如果函数在某区间上是单调函数，那么函数在该区间上有反函数，且反函数的单调性和原函数相同．

2．函数的奇偶性

（1）定义：略．

（2）性质：偶函数的图象关于 y 轴对称，奇函数的图象关于原点对称．

（3）判断方法

①定义；②图象；③若两个函数的定义域相同，则ⅰ）两个偶函数的和为偶函数；ⅱ）两个奇函数的和为奇函数；ⅲ）两个偶函数的积为偶函数；ⅳ）两个奇函数的积为偶函数；ⅴ）一个奇函数和一个偶函数的积是奇函数．

（4）定义域关于原点对称是一个函数为偶函数或奇函数的必要条件．

3．函数的周期性

（1）定义：略．

（2）说明：

①不是所有的函数都有周期性；②凡是周期函数都有无数个周期；③一个周期函数不一定有最小正周期，如恒为常数的函数 $f(x)=C$．

▷典型例题

例 1 判断下列函数的奇偶性．

（1）$f(x)=\log_2\dfrac{x-1}{x+1}$；

（2）$f(x)=x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$；

（3）$f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$；

（4）$f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$．

【分析】（1）函数的定义域 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，且 $f(x)+f(-x)=0$，故为奇函数．

（2）函数 $f(x)$ 的定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且 $f(x)=x\cdot\dfrac{2^x+1}{2(2^x-1)}$，$f(-x)=-x\cdot\dfrac{2^{-x}+1}{2(2^{-x}-1)}$ $=x\cdot\dfrac{1+2^x}{2(1-2^x)}=f(x)$，故为偶函数．

（3）$f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$ 定义域为 $\{-1,1\}$，且 $f(x)=0$，其图象既关于 y 轴对称，又关于原点对称，故既是奇函数又是偶函数．

（4）$f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$ 的定义域是 $\{1\}$，关于原点不对称，故为非奇非偶函数．

【评注】 判断函数的奇偶性时要先考查定义域是否关于原点对称；其次在考查 $f(-x)$ 时，要对式子作必要变形．

例 2（2000 年全国高考题）如图 1—3，函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是：（　　）

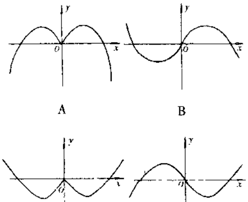

图 1—3

【分析】 根据一个奇函数与一个偶函数的积为奇函数，可得函数 $y=-x\cos x$ 为奇函数，故可排除选项 A、C；再由当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$y<0$ 可知，应选 D．

例 3 定义在实数集 **R** 上的奇函数 $f(x)$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=x(1+x)$，求 $x\leqslant 0$ 时，

$f(x)$的解析式.

解（1）：$\because f(x)$ 是奇函数，$\therefore f(x)=-f(x)$

$\therefore$当 $x<0$时，$f(x)=-f(-x)=-[-x(1-x)]=x(1-x)$

又$\because f(x)$ 在 $x=0$时有定义　$\therefore f(0)=0$

解（2）：当 $x<0$时，$-x>0$，故$f(-x)=-x(1-x)$；$\therefore f(x)=x(1-x)$ 且$f(0)=0$

解（3）：设 $y=x(1+x)$

因为奇函数的图象关于原点对称，当（x，y）为图象上的点，则（$-x$，$-y$）也在图象上，即 $-y=-x(1-x)$ 得 $x<0$时，$y=x(1-x)$，同上$f(0)=0$.

【评注】解（一）是根据奇函数的定义；解（二）是代换法；解（三）根据图象的对称特点.

例 4　求 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+3)$ 的单调递增区间.

【分析】$y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 随 $u>0$ 单调递减，$u=x^2-4x+3$ 在（$-\infty$，2）上单调递减，但只在（$-\infty$，1）上有 $u>0$，故 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+3)$ 在（$-\infty$，1）上是 x 的单调增函数.

【评注】求复合函数的单调区间，要注意定义域.

例 5　求函数$f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$的单调区间.

【分析】此函数的图象可由 $y=\frac{a}{x}$（a 为常数且 $a\neq0$）的图象的变换而得到.

解：$y=f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}=1+\dfrac{3}{x-1}$

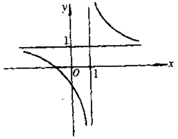

图 1—4

其渐近线方程 $x=1$ 和 $y=1$，其图象如图 1—4. 所以，当 $x\in(-\infty,1)$ 和 $x\in(1,+\infty)$ 时，函数均为减函数.

【评注】函数$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$的图象应用很广，一定要熟练掌握.

例 6　函数$f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)$，当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=2^x-1$，求 $f(\log_2 24)$ 的值.

【分析】根据函数的周期，设法用［0，1］内的某数表示 $f(\log_2 24)$.

解：$\because f(x+2)=f(x)$

$\therefore$函数$f(x)$ 的周期为 2，

$\log_2 16<\log_2 24<\log_2 32\Rightarrow 4<\log_2 24<5\Rightarrow 0<\log_2 24-4<1$

$\therefore f(\log_2 24-4)=2^{\log_2 24-4}-1=2^{-4}\cdot 24-1=\dfrac{1}{2}$.

【评注】本题属于代换型数学问题.

例 7　已知实数 a，函数$f(x)=\dfrac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}$（$x\in\mathbf{R}$）.

（1）若$f(x)$ 为奇函数，求 a 的值；

（2）在（1）的条件下，求 $f^{-1}(x)$，并指出$f^{-1}(x)$ 的单调性；

（3）解不等式 $f^{-1}(x)>\log_2\dfrac{1+x}{x}$.

【分析（1）】可由 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(0)=0$ 等得到 a 的方程.

解（1）：$f(-x)=-f(x)\Rightarrow\dfrac{a\cdot 2^{-x}+a-2}{2^{-x}+1}=\dfrac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}\Rightarrow\dfrac{(a-2)\cdot 2^x+a}{2^x+1}=\dfrac{-a\cdot 2^x+2-a}{2^x+1}\Rightarrow a=2-a\Rightarrow a=1$.

【分析（2）】因为 $f^{-1}(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}$，所以可根据复合函数单调性法则确定其单调性.

解（2）：由$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$得

$f^{-1}(x)=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$（$-1<x<1$）

设 $u(x)=\dfrac{1+x}{1-x}=-1-\dfrac{2}{x-1}$，易知

$x\in(-1,1)$ 时 $u(x)\uparrow$，$\therefore f^{-1}(x)\uparrow$.

【分析（3）】本题的实质是解对数不等式.

解（3）：$f^{-1}(x)>\log_2\dfrac{1+x}{x}$

$$\Rightarrow\log_2\frac{1+x}{1-x}>\log_2\frac{1+x}{x}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1+x}{1-x}>0\\[2mm]\dfrac{1+x}{x}>0\\[2mm]\dfrac{1+x}{1-x}>\dfrac{1+x}{x}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}<x<1.$$

【评注】本题属综合性问题，此类问题的圆满解决依赖于熟练掌握基础知识和基本技能.

▷习题精选

一、选择题

1. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且 $f(x+2)$

$=f(x)$，当 $x\in(2,3]$ 时，$f(x)=x$，则 $f\left(\frac{3}{2}\right)$ 等于：（　　）

A. $\frac{11}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $-\frac{5}{2}$　　D. $-\frac{11}{2}$

2．函数 $y=\mathrm{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{\sin x}$ 的最小正周期是：（　　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. $\frac{3}{2}\pi$　　D. 2π

3．已知 $f(2x+1)$ 是偶函数，则 $f(2x)$ 的图象的对称轴是：（　　）

A. $x=-1$　B. $x=1$　C. $x=-\frac{1}{2}$　D. $x=\frac{1}{2}$

4．函数 $y=2\sin^2 x+\sin 2x$ 是：（　　）

A．以 π 为周期的偶函数

B．以 π 为周期的非奇非偶函数

C．以 2π 为周期的奇函数

D．以 2π 为周期的非奇非偶函数

5．已知幂函数 $y=x^n$（$n\in\mathbf{Z}$），在 $x>0$ 时是减函数，在 $x<0$ 时是增函数，则 n 的值为：（　　）

A．正奇数　　B．负奇数

C．正偶数　　D．负偶数

6．下列哪一个函数在指定区间上是单调减函数：（　　）

A. $y=\frac{1}{x-1}$，$x\in(1,+\infty)$

B. $y=x^3$，$x\in(-\infty,+\infty)$

C. $y=|x|$，$x\in(-\infty,+\infty)$

D. $y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$

7．已知函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4)$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是：（　　）

A. $a\geqslant 3$　B. $a\leqslant -3$　C. $a\geqslant -3$　D. $a\leqslant 5$

8．如果函数 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$，$g(x)=f^{-1}(-x)$，那么 $g(x)$：（　　）

A．在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数

B．在 $(-\infty,-1)$ 上是减函数

C．在 $(1,+\infty)$ 上是减函数

D．在 $(-\infty,-1)$ 上是增函数

9．函数 $f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，下列命题正确的是：（　　）

A．若 x 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上都是增函数，则 $f(x)$ 是增函数

B．若 x 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上都是减函数，则 $f(x)$ 是减函数

C．若 $f(x)$ 为偶函数，在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也是增函数

D．若 $f(x)$ 为奇函数，在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也是增函数

10．下列函数中奇函数的个数是：（　　）

(1) $y=x^3+x^{-\frac{1}{3}}$；(2) $y=\frac{x}{1+x^2}$；(3) $y=\frac{2x^2+2x}{x+1}$；(4) $y=\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}$；(5) $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$；(6) $y=\frac{e^x}{e^x+1}$.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

11．奇函数 $f(x)$ 在 $[3,7]$ 上是增函数，且最小值为 5，那么 $f(x)$ 在区间 $[-7,-3]$ 上是：（　　）

A．增函数，最小值为 -5

B．增函数，最大值为 -5

C．减函数，最小值为 -5

D．减函数，最大值为 -5

12．下列函数中偶函数的个数是：（　　）

(1) $y=-|x|$；(2) $y=x^2$，$x\in[-2,3]$；(3) $y=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^2-4}$；(4) $y=(x^{\frac{1}{2}})^8$

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

13．已知函数 $f(x)=\frac{4-x^2}{|x+2|-2}$，则 $f(x)$ 是：（　　）

A．奇函数　　B．偶函数

C．既奇且偶函数　　D．非奇非偶函数

14．已知 $f(x)=(m-1)x^2+2mx+3$ 为偶函数，则 $f(x)$ 在区间 $(-5,-2)$ 上是：（　　）

A．增函数

B．部分为增函数，部分为减函数

C．减函数　　D．无法确定增减性

15．下列命题错误的是：（　　）

A．奇函数 $f(x)$，若 $f(x)$ 有意义，则 $f(0)=0$

B．定义域为 $\mathbf{R}$ 的增函数，不可能是偶函数

C．既是奇函数又是减函数，图象一定经过原点

D．图象经过原点的增函数，不一定是奇函数

16．$f(x)$ 是偶函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且在 $[0,+\infty)$ 上是减函数，则 $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ 与 $f\left(2a^2+\frac{3}{4}\right)$ 的大小关系是：（　　）

A. $f\left(-\frac{3}{4}\right)>f\left(2a^2+\frac{3}{4}\right)$

B. $f\left(-\frac{3}{4}\right)<f\left(2a^2+\frac{3}{4}\right)$

C. $f\left(-\frac{3}{4}\right)\geqslant f\left(2a^2+\frac{3}{4}\right)$

D. $f\left(-\frac{3}{4}\right)\leqslant f\left(2a^2+\frac{3}{4}\right)$

17. 设$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$,它在$(-\infty,+\infty)$上是: ( )

A. 奇函数 B. 偶函数

C. 既奇且偶 D. 非奇非偶

18. 若 $y=f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数又是减函数，则 $g(x)=f[f(x)]$ $(x\in\mathbf{R})$ 是: ( )

A. 奇函数又是减函数

B. 奇函数又是增函数

C. 偶函数又是减函数

D. 偶函数又是增函数

19. 奇函数 $y=f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 的最小正周期为4，则 $f(2)$ 等于: ( )

A. 2 B. -2 C. 0 D. 0或4

20. 已知函数 $y=f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 为奇函数，且 $x>0$时，$f(x)=x^2-2x$，则 $f(x)$ 的解析式为: ( )

A. $f(x)=x(x-2)$

B. $f(x)=|x|(x-2)$

C. $f(x)=x(|x|-2)$

D. $f(x)=|x|(|x|-2)$

21. 已知函数 $f(x)$ 最小正周期为2，且 $f(1+x)=f(1-x)$，则 $f(x)$ 是: ( )

A. 奇函数 B. 偶函数

C. 非奇非偶函数 D. 既是奇函数又是偶函数

22. 定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+1)=-f(x)$，且在 $[-1,0]$ 上单调递增，设 $a=f(3)$，$b=f(\sqrt{2})$，$c=f(2)$，则 a、b、c 的大小关系为: ( )

A. $a>b>c$ B. $a>c>b$

C. $b>c>a$ D. $c>b>a$

二、填空题

23. 下列函数的单调递增区间是:

(1) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-3)$ 的递增区间为________;

(2) $f(x)=2^{x^2-2x-3}$的递增区间为________;

(3) $f(x)=x^2-2|x|-3$ 的递增区间为________________;

(4) $f(x)=\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$的递增区间为________.

24. 下面四个命题:

(1) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x-a)=f(a-x)$，则 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称;

(2) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x-a)=f(a-x)$，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称;

(3) 函数 $y=f(x-a)$ 与 $y=f(a-x)$ 的图象关于 y 轴对称;

(4) 函数 $y=f(x-a)$ 与 $y=f(a-x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

其中正确命题的序号是________.

25. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，对任意的 x 有 $f(x+2)=-f(x)$ 成立，下面对 $f(x)$ 的判断:

(1) $f(x)$ 的图象成中心对称，原点是它的对称中心;

(2) $f(x)$ 的图象成轴对称，$x=1$ 是它的对称轴;

(3) $f(x)$ 是周期函数，$T=4$ 是它的一个周期;

(4) 当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=x$，则$f(7.5)=0.5$.

其中正确判断的序号是________.

26. $y=f(x)$ 在 $[0,2]$ 上是增函数，且 $y=f(x+2)$ 是偶函数，给出以下四个命题:

(1) 函数 $y=f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上是减函数;

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称;

(3) 函数 $y=f(x)$ 在 $[2,4]$ 上最大值是 $f(2)$;

(4) $f\left(\frac{7}{2}\right)<f(1)<f\left(\frac{5}{2}\right)$.

其中正确命题的序号是________.

三、解答题

27. 函数 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的奇函数，且是增函数，满足 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$，求实数 a 的取值范围.

28. 已知 $f(x)=\frac{x+a}{x^2+bx+1}$是定义域 $[-1,1]$ 上的奇函数，试判定它的单调性，并证明你的结论.

29. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且$f\left(x-\frac{3}{2}\right)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$恒成立，当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)=x$，则当 $x\in[-2,0]$ 时，求 $f(x)$ 的解析式.

30. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，对任意 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，且 $x>0$ 时，$f(x)<0$，$f(1)=-2$. 试判断在区间 $[-3,3]$上，$f(x)$ 是否有最大值或最小值？如果有，求出其最大值或最小值；如果没有，说明理由.