荣 张渡淮 王淑贤 编

简明高等数学

山东教育出版

简明高等数学

林培荣　张渡淮　王淑贤　编

山东教育出版社

一九八八年·济南

简明高等数学

林培荣　张波[illegible]　王淑贤　编

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　16.25印张　345千字

1988年12月第1版　1988年12月第1次印刷

印数1—1,060

ISBN 7—5328—0434—8/O·9

定价 4.45 元

说　　明

本书是为学习高等数学课时较少的专业编写的。可作为高等师范院校地理、生物、体育、政治和教育等专业高等数学课的试用教材或教学参考书，也可作为中等专业学校有关专业高等数学课教学参考书。

全书分八章。函数和极限是第一章的内容；第二、三、四章属于一元函数微分学；第五、六章属于一元函数积分学；第七章介绍微分方程的基本概念和一阶常微分方程的求解方法；最后一章是多元函数微积分。

鉴于各专业高等数学课的学时不完全相同，编写时注意了不同学时段的选材问题：

全书内容约需108个学时，标“*”者除外，约需88个学时。

前七章（标“*”者除外）约需70个学时。如果仅有50多个学时，可选讲以下章节：第一、二章（标“*”者除外）；第三章§1；第四章§1和§2；第五章；第六章§1，§2和§3。

此外，本书还有如下特点：

(1)在内容的表述上力求条理清楚、浅显易懂，范例较多。

(2)在章节安排上基本能达到每节所用授课时数为整数的要求。

(3)在习题选配上，以基本训练题为主，也有少量略有

难度的习题。书末附有习题答案供参考。

由于时间仓促，在选材及叙述方面，可能有欠妥之处，恳切希望读者批评指正。

编　者

1988年4月

目　　录

第一章　函数与极限

§1　函数概念

一、函数的定义

定义　设有两个变量x与y，若变量x在其变化范围D内任意取定一个数值时，变量y按着一定的法则总有确定的数值和它对应，则称变量y是变量x的函数。

变量x的变化范围D叫做这个函数的定义域，通常x叫自变量，y叫因变量。

例 1　自由落体的运动规律是

$$S=\frac{1}{2}gt^2,\qquad t\in[0,T].$$

其中，g是重力加速度，T是物体到达地面的时间。

这里，时间t是自变量，距离S是因变量，S是t的函数。定义域为闭区间$[0,T]$。

y是x的函数，记作$y=f(x)$、$y=\phi(x)$或$y=F(x)$等等。这里字母“f”、“ϕ”、“F”表示y与x之间的对应法则，即函数关系。

对于函数的表示法，通常有以下三种：

（1）　公式法：用一个公式来表达函数关系。

（2）列表法：把一系列自变量的值与其对应的函数值列成一表，以表达函数关系。

（3）图象法：用坐标平面上的图象来表示函数。

如果自变量取某一数值x_0时，函数$y=f(x)$有确定的值和它对应，那么就称函数在点x_0有定义，且记x_0处的函数值为

$$f(x_0) \quad 或 \quad y\Big|_{x=x_0}.$$

所以，函数的定义域也就是使函数有定义的x值的全体.函数值的全体称为函数的值域。

函数的定义域常用区间来表示。在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的。如例1中，函数的定义域为闭区间$[0,T]$。在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，这时约定：函数的定义域就是使算式有意义的自变量的一切实数值。

例 2　函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间$[-1,1]$.

例 3　函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{x}$ 的定义域是半开区间$[0,1)$。

例 4　函数 $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ 的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，即无限区间$(-\infty,1)$与$(1,+\infty)$的并集。

函数是由定义域及对应法则所确定的。两个函数若具有相同的定义域和对应法则，则称它们是等同的

例 5　函数$f(x)=|x|$与函数$\phi(x)=\sqrt{x^2}$是等同的。因为它们的定义域都是$(-\infty,+\infty)$，且对应法则相同。

例 6　函数$f(x)=\lg x^2$与函数$\phi(x)=2\lg x$不是等同

的。因为它们的定义域不同，前者的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而后者的定义域是 $(0,+\infty)$。

如果不论自变量 x 在定义域 D 内取什么值，通过对应法则 f，因变量 y 总取固定的数 C，那么我们就称这样的函数为**常值函数**，即

$$f(x)=C, \qquad x\in D.$$

二、单值函数

定义 如果自变量在定义域内任取一个确定值时，函数都只有一个确定值和它对应，这种函数就叫做单值函数。否则叫做多值函数。

例1、例2、例3、例4、例5、例6中出现的函数，都是单值函数。下面给出一个多值函数的例子。

例7 在直角坐标系中，圆心在原点，半径为 R 的圆的方程为

$$x^2+y^2=R^2.$$

当 x 在闭区间 $[-R,R]$ 上取一个数值时，由上式可以确定 y 的一个值（当 $x=\pm R$ 时），或确定 y 的两个值〔当 $x\in(-R,R)$ 时〕。因此，y 是 x 的多值函数。

以后，凡没有特别指明，说“函数”都是指单值函数。

对于单值函数，可以利用图1—1，使函数概念直观且形象化。设想用一个黑色盒子表示对应法则 f，盒子里面装有“映射机”，盒子的两边各有一条数轴，分别称为输入端和输出端。假定函数 $y=f(x)$ 的定义域是输入端上的闭区间 $[a,b]$，则对于任意 $x_0\in[a,b]$，通过“映射机” f，映照到输出端上的点 y_0，这时 $y_0=f(x_0)$。

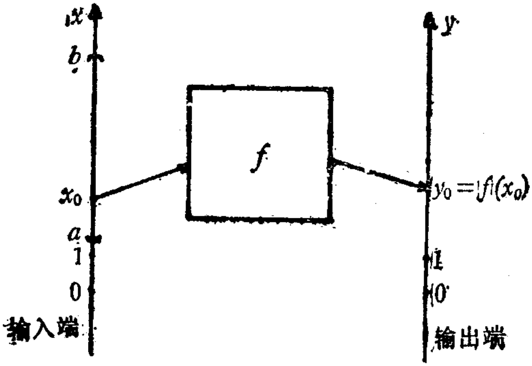

图 1—1

三、分段函数

用公式法给定函数时，有时需要在定义域的不同范围内，用不同的式子来表示一个函数。

例 8　函数 $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & x\in[0,1]\\ x+1, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$（图象如图 1—2）

的定义域是区间$[0,+\infty)$。当自变量x取闭区间$[0,1]$上的数值时，对应的函数值y由公式$y=2\sqrt{x}$确定；当x取区间$(1,+\infty)$内的数值时，对应的函数值y由公式$y=x+1$确定。

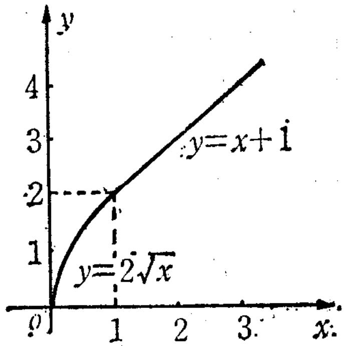

图 1—2

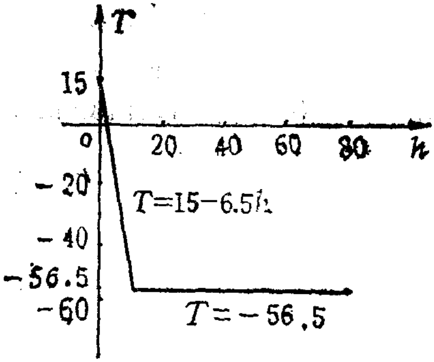

图 1—3

例 9　按着国际规定，地球中纬度地区，温度T与高度h的变化规律是

$$T=f(h)=\begin{cases}15-6.5h\ , & 0\leqslant h<11(\text{千米}),\\ -56.5\ , & 11\leqslant h\leqslant 80(\text{千米}).\end{cases}$$

其中温度T的单位是摄氏温度。

函数$T=f(h)$的定义域是闭区间$[0,80]$，函数的图象如图 1—3。

用几个式子分段表示的函数称为分段函数，例 8 和例 9 中的函数都是分段函数。

注意：分段函数在自变量变化的不同范围内虽有不同的表达式，但它只是一个函数。

四、函数记号

前面说过，变量y是变量x的函数可用

$$y=f(x),\quad y=\phi(x),\quad y=F(x)$$

等等来表示。

对于函数$y=f(x)$，习惯上也常说"函数$f(x)$"。另外$f(x)$也表示函数在点x处的函数值。我们指出，这种记号上的混用，不会造成混乱，反而会给我们带来许多行文上的方便。

注意：在函数研究中，$f(x)$可以代表x的任何函数，如代表x^3，$\frac{1}{1+x^2}$，$\sin x$，$\ln x$等。

假设用$f(x)$表示由式子

$$x^3-2x^2+3x+1$$

所表达的函数，则有

$$f(x)=x^3-2x^2+3x+1.$$

这里，$f(x)$表示对自变量x作下列运算

$$(\quad)^3-2(\quad)^2+3(\quad)+1.$$

根据这个运算，就确定了变量x与变量y之间的对应法则。特别当x取某一个数时，例如$x=2$时，将2代入上式中"x"的位置，就确定了函数$f(x)$在$x=2$处的函数值

$$f(2)=2^3-2\cdot 2^2+3\cdot 2+1=7.$$

一般地，当自变量x取某一个定值x_0时，对应的函数值为

$$f(x_0)=x_0^3-2x_0^2+3x_0+1.$$

例10 求函数$f(x)=x^2-3x+5$在$x=2$，$x=x_0+1$，$x=x_0+h$各点处的函数值。

解：$f(2)=2^2-3\cdot 2+5=3$；

$$f(x_0+1)=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5$$
$$=x_0^2-x_0+3;$$
$$f(x_0+h)=(x_0+h)^2-3(x_0+h)+5=x_0^2$$
$$+(2h-3)x_0+(h^2-3h+5).$$

例11　设有分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+5, & x\in[-10,\ 0],\\ x+85, & x\in(0,\ 10].\end{cases}$$

求　$f(-3)$和$f(2)$。

解：$f(-3)=\frac{1}{2}\cdot(-3)+5=3\frac{1}{2}$；

$f(2)=2+85=87$．

注意：计算分段函数的函数值时，特别要注意自变量所取的值在哪个范围．

例12　设$f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$　$(a>0,\ a\neq1)$，

试证明

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

证：因为$f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$　$(a>0,\ a\neq 1)$，

所以　$f(x+y)=\frac{1}{2}[a^{x+y}+a^{-(x+y)}]$，

$f(x-y)=\frac{1}{2}[a^{x-y}+a^{-(x-y)}]$．

从而　$f(x+y)+f(x-y)$

$$=\frac{1}{2}[a^{x+y}+a^{-(x+y)}+a^{x-y}+a^{-(x-y)}]$$

$$=\frac{1}{2}[(a^{x+y}+a^{x-y})+(a^{-x-y}+a^{-x+y})]$$

$$=\frac{1}{2}[a^x(a^y+a^{-y})+a^{-x}(a^y+a^{-y})]$$

$$=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y})$$

$=2\cdot\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})\cdot\frac{1}{2}(a^y+a^{-y})$

$=2f(x)f(y)$。

习 题 一

1． 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$； (2) $y=\sqrt{x^2-4}$；

(3) $y=\frac{1}{1-x}$； (4) $y=\frac{1}{1-x^2}$；

(5) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；

(6) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(7) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(8) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$；

2．下列各题中，函数$f(x)$和$\phi(x)$是否等同？为什么？

(1) $f(x)=x$， $\phi(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$， $\phi(x)=x\sqrt[3]{x-1}$．

3． 设 $f(x)=\sqrt{x^2+4}$，求下列函数值:

$f(0)$， $f(1)$， $f(-1)$， $f\left(\frac{1}{a}\right)$， $f(x_0)$和$f(x_0+h)$。

4.设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right),\\ 0, & x\in\left(-\infty,-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},+\infty\right).\end{cases}$

求$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$和$f(-2)$，并作出函数$y=f(x)$的图象。

5. 设 $f(x)=2x^2+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x}+5x$，试证明

$$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right).$$

6.设 $\phi(x)=\lg x$，试证明

$$\phi(x)+\phi(x+1)=\phi[x(x+1)].$$

7.绘出函数

$$y=\frac{x}{|x|}$$

的图象。

8.已知$f(x+1)=x^2-3x+2$，求$f(x)$。

§2 初等函数

一、复合函数

在许多实际问题中，两个变量的联系有时不是直接的。例如，质量为m的物体，以初速度v_0向上抛，则动能E是速度v的函数

$$E=f(v)=\frac{1}{2}mv^2.$$

如果不考虑空气阻力，那么速度v又是时间t的函数

$$v=\phi(t)=v_0-gt,$$

其中g是重力加速度。