高等学校教材

大学物理实验

主　编　李水泉
副主编　陈飞明　石发旺

机械工业出版社
China Machine Press

本书是根据原国家教委颁发的《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》，并结合多年物理实验及教学实践经验而编写成的。全书分八章，共37个实验。第一章为绪论，第二章较系统地介绍了误差理论、有效数字与数据处理，第三章至第八章依次选编了力、热学、电磁学、光学、近代物理、综合性以及设计性实验。

本书可作为高等工业学校各专业物理实验课的教材或教学参考书，也可用作夜大、函授等成人高等教育物理实验课的教材。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理实验/李水泉主编．—北京：机械工业出版社，1999.12

高等学校教材

ISBN 7-111-07667-2

Ⅰ．大…　Ⅱ．李…　Ⅲ．物理学-实验-高等学校-教材

Ⅳ．04-33

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第66946号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

责任编辑：余茂祚　版式设计：霍永明　责任校对：张莉娟

封面设计：方　芬　责任印制：何全君

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2000年1月第1版第1次印刷

787mm×1092mm 1/16·[illegible]印张·264千字

0 001—5 000册

定价：18.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、68326677-2527

前　　言

本书是根据原国家教委颁发的《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》并结合专业设置特点和物理实验室仪器设备的实际情况，在多年教学实践的基础上而编写成的。

全书分八章，共37个实验。第一章为绪论，主要介绍物理实验的作用、物理实验课的目的以及三个重要的教学环节；第二章较系统地介绍了误差理论、有效数字和数据处理基本方法等内容；第三章至第六章共选编了29个有关力学、热学、电磁学、光学和近代物理等方面的实验，每章前面部分对本章所用的基本仪器和注意事项作了介绍，以便查阅；根据《教学基本要求》，在第七、八两章分别选编了一定数量的综合性实验和少量的设计性实验。书末附录介绍了中华人民共和国法定计量单位，给出了有关的物理常量和一些重要物理实验的年表。

在编写过程中，力求做到：实验目的具体、突出，使学生明确实验要求；实验原理叙述清楚，使学生在实验中掌握理论依据；实验内容和步骤由详到简，使学生的实验技能和动手能力逐步提高。每个实验后都有几个思考题，便于学生进一步分析讨论、巩固提高。

本教材由李水泉主编，陈飞明、石发旺为副主编。参加编写的有：（以姓氏笔划为序）：

牛长流（实验21、22、25、26、27）；

石发旺（实验1、3、6、35）；

李水泉（实验16、17、19、28、29、36），并负责全书统稿；

陈飞明（第一章、第二章、第三章第一节、实验7、24、32、33、34、第八章第一节和第二节、附录），并负责全书统稿；

武金楼（实验4、5、8、第四章第一节和第二节、实验9、31、37）；

曹万民（实验2、10、11、13、15、30）；

韩苏雷（实验12、14、18、第五章第一节和第二节、实验20、23）。

在本书的出版过程中，得到了洛阳工学院领导的热情鼓励和大力支持。同时，一些兄弟院校的教材也为本书的编写提供了很好的借鉴，对此一并表示衷心感谢。

由于编者的水平有限，加之编写时间仓促，书中难免有不足和错误之处，恳请读者提出宝贵意见。

编　者

目　录

第一章　绪　　论

第一节　物理实验的作用及物理实验课的目的

物理学是以实验为基础的科学。所谓实验，就是根据研究目的，选用合适的仪器或装置，人为地控制、创造或纯化某种自然过程，使之按预期的进程发展，同时在尽可能减少干扰的情况下进行观测，以探求该自然过程变化规律的一种科学活动。

一、实验在物理学发展中的作用

纵观物理学三百余年的发展史，实验在物理学发展中的作用基本上可概括成以下几个方面：

1. 发现新事实，探索新规律　物理学有许多分支，这些分支汇合起来组成了物理学的主干，无论哪个分支在其发展之初，都有大量的实验为之奠基，各分支在其发展的各个阶段大多有新的实验补充新的事实，从而使各分支更加充实，更加全面。例如，在 19 世纪末，经典物理学已发展到了相当完善的地步，人们乐观地认为，物理学的发展已经到顶了，留给后人的只不过是些“修修补补”的工作，诸如如何把常数测得再准些，如何运用现有的理论去解决各种实际问题等等。但“好景不长”，不久就出现了一系列与经典物理学理论尖锐矛盾的实验事实，其中重要的有黑体辐射实验、固体比热容的测定和迈克耳孙一莫雷实验。对这些矛盾的深人研究酿成了一场物理学的革命风暴，最终导致了量子论和相对论的建立。

2. 检验理论，判定理论的适用范围　无庸置疑，理论是物理学的主体。然而，理论是否正确，又必须经受实践的检验。实验是人们检验理论的重要手段。例如：麦克斯韦的电磁学理论以一组简洁的数学方程概括了所有宏观电磁规律，但当年却难以令人信服。直到 20 多年后，它预言的电磁波被赫兹的实验证实，他的学说才成为举世公认的宏观电磁理论基础。又如：1955 年，李政道和杨振宁提出，在弱相互作用过程中，宇称不守恒，并建议通过钴 60 的衰变来对这一点进行判定性的检验。第二年，吴健雄进行了这个实验，证实了这个判断，使李、杨的理论得以确立，并使李、杨获得了诺贝尔奖金。

此外，任何理论都有其自身的适用范围，这个范围往往要靠实验来确定。例如，波意耳定律只适用于理想气体，因为勒尼奥的高气压实验证明：当气体压强增大到一定程度后，气体压强与体积的乘积会偏离常数。

3. 测定常量　在物理学的发展中，大量实验是围绕常量进行的。了解物质的物理特性要通过实验测量跟物质特性有关的各种常量，除此之外，对一些基本物理常量的测定和研究，在物理学发展中更占有极其重要的地位。例如：万有引力常量的数值，自牛顿发现万有引力定律以来，一直是人们力求测准的对象。这个常量究竟是不是常量？会不会随时间变化？到现在还是物理学界关心的问题。

4. 推广应用，开拓新领域　科学实验是科学理论的源泉，是自然科学的根本，同时也是工程技术的基础。各种发明创造，诸如制冷机、电灯、电话、电报、雷达、光导纤维、正负

电子对撞机、人体核磁共振成像仪等等，无一不是经过大量实验研究才逐步完善的，哪一项发明创造不是实验室的产物？

科学理论只有通过实验这一中间环节，才能不断地改造世界，造福人类。在进行社会主义现代化建设的今天重视这一点，对于加快科技成果的转化，尽快提高我国的综合国力，进而提高我国的国际地位，有着十分重要的现实意义。然而，在我国，由于受传统思想的影响，实验工作的重要性还尚未得到足够重视。著名的美籍华裔物理学家丁肇中教授在荣获诺贝尔物理学奖时，特意用中文发表了一封信。他写道：

“中国有一句古话：‘劳心者治人，劳力者治于人。’这种落后的思想，对发展国家中的青年们有很大害处。由于这种思想，很多在发展国家的学生们都倾向于理论的研究，而避免实验工作……事实上，自然科学理论不能离开实验的基础，特别是，物理学是从实验产生的……我希望由于我这次得奖，能够唤起在发展国家的学生们的兴趣，而注意实验工作的重要性。”

丁肇中是因 1974 年用高能同步加速器发现 J/ψ 粒子而获诺贝尔物理奖的。值得指出的是，作为一年一度最高科学奖励的诺贝尔物理奖，从 1901 年伦琴因实验发现 X 射线而获奖至 1999 年，一共有 159 位获得者，其中因实验获得的共 110 人，占 69%。这一数字从另一侧面说明了实验的重要地位。

应该指出，我们强调实验的重要作用，丝毫也没有贬低理论的地位。事实上，理论和实验是物理学的两大部分，二者相辅相成，缺一不可。

二、开设大学物理实验课的目的

大学物理实验是高等工科院校独立设置的一门必修基础课程，是学生进入大学后受到系统实验方法和实验技能训练的开端，是学生进行科学实验训练的重要基础。由于物理实验本身有它自己的一套实验理论、实验方法和实验技能，因此，要掌握好这套理论、方法和技能，需要由浅入深，由简单到复杂地系统学习和培养。

具体地说，大学物理实验课的目的是：

(1) 通过对物理实验现象的观测和分析，学习物理实验知识，加深对物理学原理的理解。

(2) 培养学生从事科学实验的初步能力。这些能力主要包括：通过阅读教材或资料，能概括出实验原理和方法的要点；借助教材或仪器说明书，能正确使用基本实验仪器，掌握基本物理量的测量方法和实验操作技能；正确记录和处理数据，分析实验结果和撰写实验报告；能独立完成简单的设计性实验。

(3) 培养学生实事求是的科学态度，严谨踏实的工作作风，勇于探索、坚韧不拔的钻研精神以及遵守纪律、团结协作、爱护公物的优良品德。

第二节　物理实验课的三个教学环节

为了达到物理实验课的目的，学生应重视物理实验课的三个重要的教学环节。

一、实验前的预习

为了在规定的时间内高质量完成实验，每次实验前学生一定要认真做好预习，预习时间一般不少于课内时间的 1.5 倍，预习内容主要包括：

1. 弄懂实验原理　除设计性实验外，教材中每一实验都用一定篇幅介绍了该实验的原理。学生必须认真阅读，必要时还应查阅理论物理教材或其它参考书，充分了解实验的理论

依据和条件。如果不理解实验原理就动手操作，只能机械地照教材规定的步骤读得一些数据，而不能深入理解物理现象的本质，更谈不上注意实验方法上的技巧以及主动地研究实验中出现的各种现象。

2. 熟悉实验仪器　每一实验均列出了该实验所用的仪器或用具，其中对一些较常见的基本仪器，集中在每章前面作了专门介绍，学生应根据本实验的需要认真查阅。其它仪器，原则上在实验原理中作了介绍。总之，通过阅读教材中有关仪器部分，要求熟悉仪器的工作原理、工作条件和操作规程。

3. 了解观测要求　明确本次实验测什么，怎么测，测几次，哪些物理量是已知的（或由实验室给出的），哪些量是待测的，哪些量是待求的，做到心中有数，有的放矢。

在完成上述预习要求的基础上，写出预习报告，预习报告内容包括：实验名称、实验目的、仪器用具、实验原理和实验内容几个部分，书写预习报告时必须注意：①预习报告一律写在统一印制的实验报告纸上；②要求文理通顺，字迹工整，图表美观，③实验原理部分要求用自己的语言简述有关物理内容（不能照抄教材），要说清楚测量中依据的主要公式，式中各量的物理意义及单位，公式成立所要满足的实验条件等，④实验内容要求简明扼要，并写明注意事项。学生进入实验室，必须将预习报告交教师检查，经同意后方可进行实验。

二、课堂实验

学生进入实验室后应自觉遵守实验室规则，不得喧哗。实验前应清点所需仪器、用具是否齐全，然后进一步熟悉仪器、了解仪器的使用方法，再对所使用的仪器进行合理布置并进行耐心细致地安装、调整。布置仪器要尽量做到便于操作、读数和记录。使用仪器必须按操作规程进行，不明确操作规程，不要胡乱动用仪器。仪器如有损坏，应及时报告指导教师，凡属学生责任事故者，根据情节，将赔偿部分或全部损失。测量数据除有明确的理由可肯定是错误的数据外，都应及时正确地作出记录（包括某些可疑的数据）。如出现异常数据时，应增加测量次数。记录数据时要特别注意有效数字（参阅第二章第五节）和单位。实验完毕，实验数据必须经教师签字，将仪器、用具整理好，方可离开实验室。

三、完成实验报告

书写合格的实验报告，是大学物理实验课的一项重要的基本功训练。一份完整的实验报告其内容一般应包括：实验名称、实验目的、仪器用具、实验原理、实验内容、数据处理、问题讨论等部分，其中前五个部分在课前完成（即预习报告）。数据处理一般包括填写数据表格（必须用直尺、铅笔画表）、计算、作图（必须用坐标纸）、结果表达，其详细要求参看第二章的有关部分。问题讨论内容不限，可以是对实验现象的分析，对实验关键问题的研究，实验的收获和改进实验、减小误差的建议。实验报告完成后，应将教师签过字的原始数据粘贴在实验报告的背后，以便教师批阅报告时对数据进行查对。

第二章　测量误差与数据处理

第一节　测量与误差

一、测量

物理实验是以测量为基础的。所谓测量就是借助仪器或量具，将待测量与选作计量标准单位的同类量相比较，从而确定待测量是该计量单位的多少倍的过程，其倍数带上单位就是待测物理量的测量值。

所有测量可分为直接测量和间接测量两大类。凡是使用仪器或量具能直接测得结果的测量就是直接测量，例如用游标卡尺测物体的长度，用天平称物体的质量，用安培表测电路中的电流等，都是直接测量。另一类是先经直接测量，然后根据待测量与直接测量量之间的函数关系，通过计算才能得到测量结果的，这类测量称为间接测量。例如，测量某金属圆柱体的密度时，我们可先用游标卡尺或千分尺测出它的高 h 和直径 d，用物理天平称出它的质量 m，然后通过函数关系式 $\rho=4m/(\pi d^2h)$ 计算出该圆柱体的密度 ρ。在物理实验进行的测量中，有许多是间接测量，但它们都要以直接测量作为基础。

无论是直接测量还是间接测量，按测量次数又可分为单次测量和多次测量。多次测量还可分为等精度测量和不等精度测量。在测量条件完全相同（即观测者、仪器、方法和环境等均相同）的情况下进行的多次测量是等精度测量，否则就是不等精度测量。处理不等精度测量的数据一般是很复杂的，本章只介绍等精度测量的数据处理。

二、误差

测量的目的就是为了得到被测物理量所具有的客观真实数值（简称真值）。但由于受测量方法、测量仪器、测量条件以及观测者水平等多种因素的限制，只能获得该物理量的近似值，也就是说，一个被测量的测量值 N 与真值 N_0 之间一般会存在差值。这种差值称为测量误差，又称绝对误差，用 ΔN 表示，即

$$\Delta N=N-N_0 \tag{2-1}$$

注意：绝对误差不同于误差的绝对值，它可正可负。当 ΔN 为正时，称为正误差，反之则为负误差。因此，由式（2-1）定义的误差，不仅反映了测量值偏离真值的大小，也反映了偏离的方向。绝对误差与测量值有相同的单位。

绝对误差与真值之比称为相对误差，相对误差 E 常用百分数表示，即

$$E=\frac{\Delta N}{N_0}\times 100\% \tag{2-2}$$

显然，相对误差是没有单位的。

应该指出：被测量的真值 N_0 是一个理想的值，一般来说是无法知道的。因此，绝对误差和相对误差一般不能准确求得。在实际测量中，常用理论值、国际计量大会通过的公认值或高一级别的“标准”仪器的测量值来代替真值。此外，对可以多次测量的物理量，则常用已

修正过的算术平均值代替真值来计算绝对误差和相对误差的估计值。

三、误差的种类

为了便于对误差作出估算并研究减小误差的方法，有必要对误差适当分类。根据误差的性质，测量误差分为系统误差和随机误差两类。

1. 系统误差　在相同条件下对同一物理量多次测量，误差的大小和符号始终保持恒定或按可预知的方式变化，这种误差称为系统误差。

2. 随机误差　在相同条件下多次测量同一物理量，误差或大或小，或正或负，完全是随机的、不可预知的，这类误差称为随机误差。虽然随机误差在测量次数较少时显得毫无规律，但当测量次数足够多时，却服从一定的统计分布规律。

四、测量结果的评价

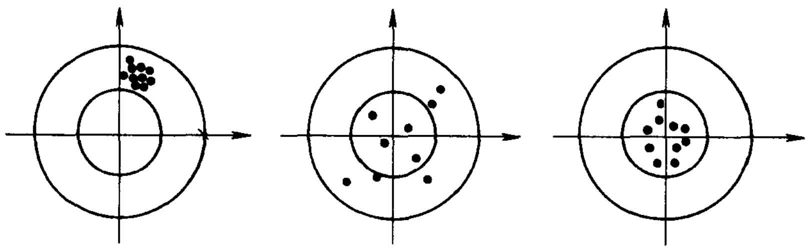
评价测量结果的好坏常用到精密度、正确度和准确度三个概念，它们的涵义不同，使用时应加以区别。

1. 精密度　是指重复测量所得结果相互接近的程度，它反映了随机误差的大小。测量精密度高，是指测量数据比较集中，随机误差小。

2. 正确度　是指测量结果接近真值的程度，它反映了系统误差的大小。测量正确度高，是指测量数据的平均值偏离真值较小，系统误差小。

3. 准确度　是综合反映系统误差与随机误差大小的程度。若测量结果既精密又正确，即随机误差与系统误差都小，则测量结果的准确度高。

下面以射击打靶的结果与测量结果进行类比，说明三者的意义和区别，如图 2-1 所示。



a)　　b)　　c)

图 2-1　测量结果与打靶的结果类比

a）精密度高　b）正确度高　c）准确度高

图 2-1a 表示射击的精密度高而正确度不高；图 2-1b 表示正确度高而精密度不高；图 2-1c 表示精密度和正确度均较高，即准确度高。

第二节　系统误差

在许多情况下，系统误差是影响测量结果准确度的主要因素，然而它又常常不明显地表现出来。当它被疏忽时，有时会给实验结果带来严重影响。因此，如何发现系统误差，并设法消除或修正它的影响，是误差分析的一个重要内容。

由于系统误差和随机误差是相互独立存在的，在许多情况下可以分别予以处理，最后合起来考虑它们对测量结果总的影响。因此，为使问题简化，本节仅考虑系统误差。

一、系统误差的来源

系统误差主要来自以下几个方面。

1. 仪器误差　这是由于仪器本身的缺陷或没有按条件使用而引起的误差。如仪表刻度不准，仪器零点没调好，仪器该水平放置而没有放水平等。

2. 理论（或方法）误差　这是由于测量原理本身不够严密或测量方法与理论的要求有出入而带来的误差，如用天平称质量时未考虑空气浮力的影响，用单摆周期公式 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 测重力加速度时，摆角没有趋于零等。

3. 环境误差　是指由于外界环境，如光照、温度、湿度等因素而产生的误差。如在 20℃ 下标定的标准电阻、标准电池用在温度较高或较低的场合所造成的误差。

4. 个人误差　是指由于观测者本身的生理或心理特点而造成的误差。如采用手按秒表计时，有人习惯于早按，有人习惯于迟按；又如在使用刻度式仪表时，有人总习惯于偏向一方来读数等。

二、发现系统误差的方法

要发现系统误差，需要对实验依据的原理、实验方法、测量步骤、所用仪器等可能引起误差的因素一一进行分析。因此，它要求实验者既要有坚实的理论基础，又要有丰富的实践经验，下面简要介绍几种查找系统误差的常用方法。

1. 对比的方法

(1) 实验方法的对比　用不同方法测同一个量，看结果是否一致。如可用多种方法（如单摆法、复摆法、自由落体法、气垫导轨法）测重力加速度，如果测量结果都不一致（在随机误差容许的范围内不重合），就说明这四种测法中至少有三种存在系统误差。

(2) 仪器的对比　如用两个电流表串联在同一电路中，如果读数不一致，则说明至少有一个存在系统误差。

(3) 改变测量方法　如用天平称衡时，分别将待测物放在天平的左盘和右盘（即复称法）对比测量结果，可以发现天平是否存在两臂不等长而带来的误差。

(4) 改变实验中某参量的数值　如在气垫导轨实验中，有意识地增大和减小滑块速度，二者对比可发现空气阻力和粘滞阻力对测量结果的影响。

(5) 改变实验条件　在不同的温度、压力、湿度、电磁场等环境下做对比实验，看看结果是否一致。

(6) 改变观测者　两个人对比观察可发现个人误差。

2. 理论分析的方法　分析测量所依据的理论公式所要求的条件与实际情况有无差异，能否忽略。如单摆实验要求摆角小于 5°（严格地说，摆角的大小是由测量准确度要求决定的），实验时是否满足了。

3. 检查实验条件的方法　分析仪器正确使用所要求的条件是否满足。如用天平称质量，要求天平水平放置。又如用分光计测三棱镜折射率，要求分光计各部分按要求调整好。

4. 数据分析的方法　当测量数据明显不服从统计分布规律时，说明存在系统误差。此时可将测量数据依次排列，如偏差（即测量值与平均值之差）的大小有规则地向一个方向变化，则测量中存在线性系统误差，如偏差的符号有规律地交替变化，则测量中存在周期性系统误差。

三、系统误差的消除或修正

必须指出：任何“标准”仪器都不可能尽善尽美，任何理论模型也只是实际情况的近似。

因此在实际测量中，要完全消除系统误差是不可能的，这里所说的“消除系统误差”，是指将它的影响减小到随机误差以下。

消除和修正系统误差一般没有固定不变的方法，要具体问题具体分析。下面介绍几种通常消除系统误差的途径以供参考。

1. 从原理入手消除系统误差　采用更加符合实际的理论公式：如单摆周期公式通常为 $T=2\pi\sqrt{l/g}$，若考虑摆幅 θ 的影响，则周期公式应为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta}{2}+\cdots\right)$$

2. 从实验方法入手消除系统误差　采用合适的测量方法可消除或抵消系统误差，这些方法常用的有置换法、替代法、反方向测量法（异号法）、对称测量法、补偿法等，这些方法将在以后的实验中陆续用到，在此不作详细介绍。

3. 从测量仪器入手消除系统误差

(1) 消除仪器的零点误差　对游标卡尺、千分尺以及指针式仪表等，在使用前，应先记录下零点误差，以便对测量结果加以修正。

(2) 校准仪器　用更准确的仪器校准一般仪器，得出修正值或校准曲线。

(3) 保证仪器装置在测量时满足规定的条件。

总之，要消除系统误差的影响，首先是设法不让它产生，如果做不到，就应修正它，或者通过采取合适的测量方法，设法抵消它的影响。

第三节　随机误差

在这一节里，我们不考虑系统误差（假定它已被消除或已减小到可忽略的程度）来讨论随机误差问题。

一、随机误差的分布规律

随机误差是由于受人的感觉器官（视觉、听觉、触觉）的灵敏程度和仪器精密程度的限制，周围环境的干扰（比如温度、湿度的微小起伏，外界产生的杂散电磁场，空气的不规则流动等）以及随测量而来的其它不可预测的随机因素造成的。在实验过程中，随机误差不可避免，也不能消除，但根据随机误差理论可以估计其可能出现的大小，并可通过增加测量次数减小随机误差。

在大多数物理实验中，随机误差服从正态分布，又称高斯(Gauss)分布，如图 2-2 所示。图中横坐标 ΔN 表示随机误差，纵坐标 $f(\Delta N)$ 表示误差概率密度分布函数，$f(\Delta N)$ 的意义是单位误差范围内出现的误差概率，曲线下阴影包含的面积元 $f(\Delta N)\mathrm{d}(\Delta N)$ 就是误差出现在 ΔN 和 $\Delta N+\mathrm{d}(\Delta N)$ 区间内的概率。显然，误差 ΔN 出现在 $(-\infty,+\infty)$ 范围内是必然的，可能性为百分之百，所以 $\int_{-\infty}^{\infty}f(\Delta N)\mathrm{d}(\Delta N)=1$，即曲线与横轴所包围的面积恒等于 1。由图 2-2 可看出，服从正态分布的随机误差具有如下

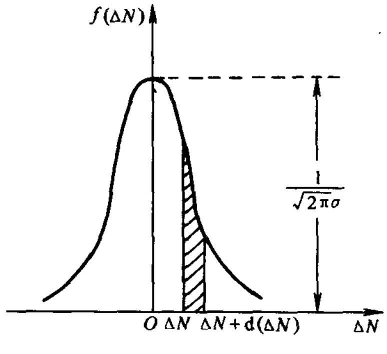


图 2-2　随机误差的正态分布

几个特性：

1. 单峰性　绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大。

2. 对称性　绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

3. 有界性　在一定测量条件下，误差的绝对值一般不超过一定限度，即很大的正（或负）误差出现的概率趋于零。

4. 抵偿性　当测量次数非常多时，由于正负误差相互抵消，故所有误差的代数和为零。

应用概率论可以得出

$$f(\Delta N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(\Delta N)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2-3}$$

式中，σ 为一个取决于具体测量条件的常数，称为标准误差㊀。由式(2-3)容易证明，标准误差 σ 正好是正态分布曲线拐点的横坐标。当 $\Delta N=0$ 时，有

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \tag{2-4}$$

由式(2-4)可以看出：若测量的标准误差 σ 较小，则必有 $f(0)$ 较大。由于曲线与横轴间围成的面积恒等于 1，所以曲线中间凸起较大，两侧下降较快，相应的测量必然是绝对值小的随机误差出现较多，即测量的精密度高；反之，若 σ 较大，表明测量的精密度低，如图 2-3 所示。因此，标准误差 σ 是反映测量精密度高低的重要参数。它的数学表达式为

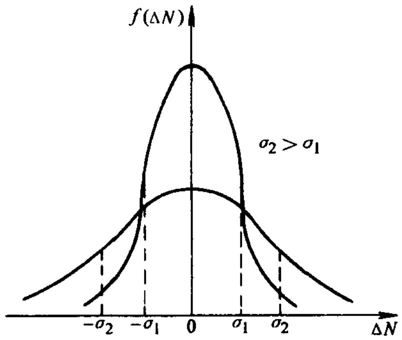


图 2-3　σ 的大小反映测量数据的离散程度

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\Sigma(N_i-N_0)^2}{n}} \tag{2-5}$$

式中　N_i——每次测量值；

N_0——真值；

n——测量次数。

可以证明，$\int_{-\sigma}^{+\sigma}f(\Delta N)\mathrm{d}(\Delta N)\approx 68.3\%$，即由 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 之间正态分布曲线下的面积占总面积的 68.3%。这就是说，如果测量次数 n 很大，则在所测出的数据中，将有占总数为 68.3% 的数据的误差落在区间 $\pm\sigma$ 之内。换句话说，在所测得的数据中，任一个数据 N_i 的误差 ΔN_i 落在 $\pm\sigma$ 之内的可能性(概率)为 68.3%。区间 $\pm\sigma$ 称为置信区间，其对应的概率($P=68.3\%$)称为置信概率。显然，扩大置信区间，置信概率就会提高。例如，将区间扩大到 2 倍，则误差 ΔN_i 落在 $\pm 2\sigma$ 之内的概率为 95.5%；如扩大到 3 倍，则 ΔN_i 落在 $\pm 3\sigma$ 内的概率为 99.7%。可见，随机误差落在 $\pm 3\sigma$ 之外的可能性仅为 0.3%。

二、随机误差的估算方法

1. 多次测量的结果用算术平均值表示　设在相同条件下，对同一被测量进行 n 次测量，其测量值为 $N_1,N_2,\cdots,N_n$。那么，它的算术平均值是

㊀ 这里所说的“标准误差”不同于由式(2-1)定义的误差。它不是指具体的误差数值，而是用来表示和一定的置信概率相联系的误差范围，它总是大于零。而由式(2-1)定义的误差是指测量值与真值之差，其值是确定的，它可正可负，也可能非常接近于零。初学者应特别注意它们之间的区别。

$$\overline{N}=\frac{N_1+N_2+\cdots+N_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}N_i \tag{2-6}$$

根据随机误差的正态分布规律，绝对值相等的正负误差出现的概率相同。因此，算术平均值 $\overline{N}$ 必然最接近被测量的真值 N_0，且测量次数越多，接近真值的程度越好。当 $n\to\infty$ 时，平均值无限接近真值。因此，在实际测量中常用算术平均值作为多次测量的结果。

2. 算术平均值的标准误差　同一被测量，在完全相同的条件下进行不同组的有限次测量（每组测量次数均为 n），各组结果的算术平均值 $\overline{N}$ 是不一定相同的，是随机的。为了评定其离散程度，引入算术平均值的标准误差 $\sigma_{\overline{N}}$，可以证明[1]

$$\sigma_{\overline{N}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{2-7}$$

它表示算术平均值的误差（即 $\overline{N}-N_0$）落在 $\pm\sigma_{\overline{N}}$ 之间的概率为 68.3%，或者说在 $\overline{N}-\sigma_{\overline{N}}$ 到 $\overline{N}+\sigma_{\overline{N}}$ 的范围内包含真值的概率为 68.3%。

式（2-7）表明：测量次数 n 越多，平均值的误差 $\sigma_{\overline{N}}$ 越小。因此，增加测量次数可以减小误差。但 n 的增大仅能减小随机误差，对系统误差不起作用，而测量误差是随机误差与系统误差的综合。所以，增加测量次数对减小误差的价值是有限的。另外，增加测量次数必定延长测量时间，这会给保持稳定的测量条件带来困难。况且，过多的测量次数还有可能引起较大的观测误差。因此，只有通过改进实验方法和提高仪器性能才能从根本上改善测量结果。

3. 随机误差的估算方法　目前，随机误差的大小通常采用标准误差表示。但是，若想利用式（2-5）和式（2-7）来计算标准误差（从而确定随机误差）是行不通的。因为真值 N_0 实际上一般是未知的。这就是说，前面对误差的讨论只有理论上的价值。在实际中，我们常用标准偏差来作为标准误差的估计值。计算标准偏差的公式是

$$S_N=\sqrt{\frac{\Sigma(N_i-\overline{N})^2}{n-1}} \tag{2-8}$$

式中　n——测量次数；

$N_i-\overline{N}$——第 i 次测量的偏差（或残差）。

这一公式称为贝塞尔（Bessel）公式，可以证明[1]，当 $n\to\infty$ 时，用贝塞尔公式计算的标准偏差和式（2-5）定义的标准误差是一致的。

应该指出，S_N 是测量列中某一次测量值的标准偏差（简称测量列的标准偏差）。而平均值的标准偏差为

$$S_{\overline{N}}=\frac{S_N}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\Sigma(N_i-\overline{N})^2}{n(n-1)}} \tag{2-9}$$

同样，在实际中常用平均值的标准偏差来作为平均值标准误差的估计值㊀。

三、异常测量数据的舍弃准则㊁

在对一个物理量多次测量的数据中，有时有少数的测量数据与其它的数据相差很大，这些相差很大的值，如果是由测量过程中的操作过失引起的，就应当舍去。那么舍去异常测量数据的标准是什么呢？下面介

㊀ 这里有必要强调一下，$S_{\overline{N}}$ 只是 $\sigma_{\overline{N}}$ 的估计值。严格地说，在有限次测量时，算术平均值的误差落在 $\pm S_{\overline{N}}$ 之间的概率并不是 68.3%，若要得到 68.3% 的概率，其误差区间应改写为 $t_{0.683}S_{\overline{N}}$，这一过程叫 t 分布校正。其中 $t_{0.683}$ 是一与测量次数有关的数，可查表求得。

㊁ 文中小体字部分为自学内容。

绍两个判别的准则。

1. 拉依达准则　其内容是，凡是偏差（残差）大于 $3S_N$ 的数据就应作为异常数据加以剔除。它的依据是，对于服从正态分布的随机误差来说，误差在 $\pm 3\sigma$ 区间以外的数据仅占 0.3%。也就是说，在 1000 次测量中，误差绝对值超过 3σ 的测量约为三次。因此，在测量次数不太多的情况下，出现这样的数据是不正常的，这时宁可将它舍弃。这样，以测量列的标准偏差 S_N 的 3 倍为界来决定数据的取舍就成为一个准则。

但在这里要强调指出，该准则只有在测量次数 $n>10$ 才有效，可以证明[1]当 $n\leqslant 10$ 时，此准则无效。通常在 n 大于 13、14 次时才用这种准则。

2. 肖维涅准则　设重复测量的次数为 n，则在一组测量数据中，凡是未在区间 $\overline{N}\pm C_n S_N$ 内的测量值可以认为是异常值而应舍弃。其中 C_n 为该准则的因数，其值由表 2-1 给出。

表 2-1　不同测量次数 n 对应的 C_n 值

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
C_n	1.65	1.73	1.80	1.86	1.92	1.96	2.00	2.03	2.07	2.10	2.13	2.15	2.18	2.20
n	19	20	25	30	40	50	60	70	80	90	100	110	150	
C_n	2.22	2.24	2.33	2.39	2.50	2.58	2.64	2.69	2.73	2.77	2.81	2.84	2.93	

第四节　测量结果的表达

一、直接测量结果的误差表示

1. 单次直接测量结果的误差表示　有些物理实验，由于被测量是随时间变化着的，不允许对它作重复测量，只能进行一次测量。还有些实验，由于测量准确度要求不高，或者是某一直接测量量的误差对间接测量结果的影响很小，只需对被测量作一次测量。对于单次直接测量，一般是估计它的最大误差（又称极限误差），而对最大误差的估计应根据所用仪器或量具的精度、观察者的估读能力等具体情况而定，不可一概而论。

此时测量结果可表示为

$$N=N_{测}\pm\delta \tag{2-10}$$

其中 $N_{测}$ 为单次测量值，δ 为根据实际情况合理估计出的最大（极限）误差。

在一般情况下，对于随机误差很小的测量值，可按仪器出厂说明书或仪器上直接注明的仪器误差作为单次测量的最大误差 δ。如果仪器上没有注明，也可取仪器最小分度值的一半作为单次测量的最大误差。一般来说，仪器误差的概率密度分布函数服从均匀分布，即在 $\pm\delta$ 范围内，误差出现的概率密度相同。此时测量结果的标准误差为㊀

$$\sigma_{仪}=\frac{\delta}{\sqrt{3}} \tag{2-11}$$

2. 多次直接测量结果的误差表示　多次直接测量结果表示为

$$N=\overline{N}\pm S_{\overline{N}} \tag{2-12}$$

其中 $\overline{N}$ 为多次直接测量结果的平均值，$S_{\overline{N}}$ 为由式（2-9）算出的标准偏差。

但是，在有限次测量中，有时会遇到每次测量数据都相同（$S_{\overline{N}}=0$）或几乎相同（$S_{\overline{N}}\approx 0$）的情况，这不能说明测量不存在随机误差，而是由于仪器精度不够高的缘故，如果换一种

㊀ 当随机误差服从均匀分布时，它的标准误差 $\sigma_{仪}$ 所对应的置信概率为 57.7%，若要将置信概率提高到 68.3%，其置信区间应改写为 $1.18\sigma_{仪}$。详见参考文献［1］58～59 页。

精度较高的仪器就可能得到不同的数据。在这种情况下，随机误差与仪器误差 δ 相比微不足道，测量结果应表示为

$$N=\overline{N}\pm\delta \tag{2-13}$$

3. 测量结果的完整表达　在数据处理中，一个完整的测量结果必须表示成下列形式

$$\begin{cases} N=\overline{N}(\text{或 } N_{\text{测}})\pm S_{\overline{N}}(\text{或 }\delta) \quad (\text{单位}) \\ E=\dfrac{S_{\overline{N}}(\text{或 }\delta)}{\overline{N}(\text{或 } N_{\text{测}})}\times 100\% \end{cases} \tag{2-14}$$

下面对式（2-14）作几点说明：

（1）在物理实验中，标准偏差 $S_{\overline{N}}$（或最大误差 δ）一般只取一位，相对误差 E 一般取两位数。而且在对误差截尾时，为了不人为地缩小误差范围，都采用进位的方法。例如，对标准偏差 0.38 与 0.33 都应取成 0.4。

（2）$\overline{N}$ 或 $N_{\text{测}}$ 应保留的位数，应由误差所在的位确定。其原则是：$\overline{N}$ 或 $N_{\text{测}}$ 的末位一位数必须与误差的末尾数对齐。例如应将（3.5625±0.033）cm 写成（3.56±0.04）cm，因误差在小数点后第二位。

（3）$\overline{N}$ 或 $N_{\text{测}}$ 的截尾原则，一般按“四舍六入，逢五凑偶”的规则来进行。“逢五凑偶”是指对于该截尾的那个数为 5，而其前一位是奇数时，则进位，如前一位为偶数时，则将 5 舍去。这样做避免了采用“四舍五入”规则时“入”的机会大于“舍”的机会所带来的修约误差。例如若 $S_{\overline{N}}=0.03\text{cm}$，如果 $\overline{N}=18.625\text{cm}$，则 $\overline{N}$ 应取成 18.62cm；如果 $\overline{N}=18.635\text{cm}$，则 $\overline{N}$ 应取成 18.64cm。

例 1　用天平称一小球的质量 m，一共称了 $n=9$ 次，结果列于表 2-2 中，请正确表达出该直接测量的结果。

表 2-2　用天平称小球质量 m 所得数据

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i/g	18.79	18.72	18.75	18.71	18.74	18.73	18.78	18.76	18.77

解：1）算术平均值

$$\overline{m}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i=18.750\cdots\text{g}^{\ominus}$$

2）平均值的标准偏差为

$$S_{\overline{m}}=\sqrt{\frac{\Sigma(m_i-\overline{m})^2}{n(n-1)}}=0.0091\cdots\text{g}$$

因标准偏差只取一位，且采用进位法，故 $S_{\overline{m}}$ 取成 0.01g。

3）相对误差为

$$E=\frac{S_{\overline{m}}}{\overline{m}}\times 100\%=0.0533\cdots\%$$

因相对误差取两位数，且采用进位法，故 E 取成 0.054%。

4）测量结果表示为

$$m=\overline{m}\pm S_{\overline{m}}=(18.75\pm 0.01)\text{g}$$

⊖ 为减小修约误差，中间结果可按计算器取值。

$$E=\frac{S_{\overline{m}}}{\overline{m}}=0.054\%$$

二、间接测量结果的误差表示

如本章第一节中所述，在物理实验中进行的测量，有许多属间接测量，间接测量的结果是由直接测量结果代入已知的函数关系式计算出来的。由于每一个直接测量量都存在误差，故间接测量结果必存在误差，通常将此称为误差传递。

1. 误差传递的基本公式　设间接测量量 N 是由 n 个直接测量量 x_1，x_2，…，x_n 计算出来的，即

$$N=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{2-15}$$

假定 x_1，x_2，…，x_n 是相互独立的，即其中一个量的变化不会引起另一个量的变化，则对式（2-15）求全微分有

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \tag{2-16}$$

式（2-16）表示：当 x_1，x_2，…，x_n 分别有微小改变 $\mathrm{d}x_1$，$\mathrm{d}x_2$，…，$\mathrm{d}x_n$ 时，N 改变 $\mathrm{d}N$。通常误差远小于测量值，因此可把 $\mathrm{d}x_1$，$\mathrm{d}x_2$，…，$\mathrm{d}x_n$ 看成是误差，则式（2-16）就是误差传递公式了。

如果把式（2-15）先取对数再求全微分，即

$$\ln N=\ln f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

有

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \tag{2-17}$$

式(2-17)就是相对误差传递公式。式(2-16)中的$\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$及式(2-17)中的$\frac{\partial \ln f}{\partial x_1},\frac{\partial \ln f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}$叫做误差的传递系数。可见，一个间接测量量的误差不仅取决于各直接测量量误差的大小，还取决于误差的传递系数。

2. 标准偏差的传递公式　假设直接测量量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中只含有随机误差，其大小用标准偏差表示，分别为 $S_{\bar{x}_1},S_{\bar{x}_2},\cdots,S_{\bar{x}_n}$，其平均值分别为 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$，则间接测量量为

$$\overline{N}=f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$$

可以证明，其平均值 $\overline{N}$ 的标准偏差为

$$S_{\overline{N}}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2S_{\bar{x}_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2S_{\bar{x}_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2S_{\bar{x}_n}^2} \tag{2-18}$$

相对误差

$$\frac{S_{\overline{N}}}{\overline{N}}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\right)^2S_{\bar{x}_1}^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\right)^2S_{\bar{x}_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}\right)^2S_{\bar{x}_n}^2} \tag{2-19}$$

3. 最大误差的传递公式(误差的算术合成)　假定随机误差在极端的条件下合成，或不必区分随机误差与系统误差，或系统误差是主要的，而其符号又不能确定，这时，我们就将式（2-16）和式（2-17）中各项取绝对值相加，这就是误差的算术合成。设 Δx_1，Δx_2，…，Δx_n 分别代表各直接测量量 x_1，x_2，…，x_n 的最大误差，ΔN 为间接测量量的总误差，则式（2-16）和式（2-17）写为

$$\Delta N=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right| \tag{2-20}$$

$$\frac{\Delta N}{N}=\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\Delta x_1\right|+\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\Delta x_2\right|+\cdots+\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}\Delta x_n\right| \tag{2-21}$$

式（2-20）和式（2-21）式为最大误差传递公式。必须指出，由式（2-20）计算误差虽然较为简便，但合成的误差值一般偏大。因此常用于对误差进行粗略地估算。

值得一提的是，利用误差传递公式求间接测量量的误差时，若函数形式以乘除或指数为主，则一般是先求相对误差较为方便。这一点从下面两个例子中看得很清楚。

例 2 在例 1 中，已通过多次直接测量测得小球的质量 $m=(18.75\pm0.01)$ g，若再通过多次直接测量测得直径 $d=(1.6578\pm0.0006)$ cm。

（1）求小球的密度 ρ。

（2）用标准偏差法求其测量误差。

（3）写出测量结果。

解：（1）求小球的密度 ρ：小球的体积 $V=\pi d^3/6$，密度

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{6m}{\pi d^3}=\frac{6\times18.75}{3.1416\times1.6578^3}\text{g/cm}^3=7.8597\cdots\text{g/cm}^3$$

（2）用标准偏差法求测量误差

1）求密度 ρ 的相对误差

$$\ln\rho=\ln6+\ln m-\ln\pi-3\ln d$$

上式两边对 m 和 d 求偏导数

$$\frac{\partial\ln\rho}{\partial m}=\frac{1}{m},\quad \frac{\partial\ln\rho}{\partial d}=-\frac{3}{d}$$

所以，由式（2-19）有

$$\begin{aligned}E=\frac{S_{\bar\rho}}{\bar\rho}&=\sqrt{\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial m}\right)^2S_{\bar m}^2+\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial d}\right)^2S_{\bar d}^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{S_{\bar m}}{m}\right)^2+9\left(\frac{S_{\bar d}}{d}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{0.01}{18.75}\right)^2+9\left(\frac{0.0006}{1.6578}\right)^2}\\&=0.00120\cdots\end{aligned}$$

因相对误差取两位数，且采用进位法，故 E 取成 0.12%。

2）求密度的标准偏差

$$S_{\bar\rho}=\bar\rho E=7.8597\cdots\times0.00120\cdots\text{g/cm}^3=0.00943\cdots\text{g/cm}^3$$

因标准偏差只取一位，且采用进位法，故 $S_{\bar\rho}$ 取成 0.01g/cm³。

（3）测量结果

$$\rho=(7.86\pm0.01)\text{g/cm}^3$$
$$E=0.12\%$$

本题亦可先求标准偏差，再求相对误差，但较复杂，读者不妨一试。

例 3 测量一圆柱体的直径 $d=(5.645\pm0.004)$mm，长度 $l=(6.715\pm0.005)$cm，质量 $m=(14.06\pm0.01)$g，其中 l 和 m 为单次测量。