离散数学基础题解

李为鉴　胡美琛
刘永才　邱伟德　编著

人民邮电出版社

内 容 提 要

《离散数学基础题解》一书是根据 Liu Chung Laung 著《离散数学基础》(Elements of Discrete Mathematics)的习题编写的，目的是帮助学习离散数学的读者练习解题和参考。本书对原书的326个习题全部作了题解，全书按原书分为九章，各章开头都编写了详细的内容提要(或复习要点)，所以本书有相对的独立性，对正在学习或复习离散数学的读者是很方便的，在解题时，不必经常再去查阅原书，对于教学人员使用参考也比较方便。

本书适合计算机和离散信息处理专业有关的高等院校师生和工程技术人员参考。对于高中数学教师和具备高中以上数学基础学习离散数学的读者也是一本良好的参考书。

离散数学基础题解

李为鑑 胡美琛
刘永才 邱伟德 编著

人民邮电出版社出版
北京东长安街27号
北京印刷一厂印刷
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售

*

开本：787×1092 1/32　　1982年2月 第一版
印张：12 4/32 页数：194　　1982年2月 北京第一次印刷
字数：280千字　　印数：1—16,000册

统一书号：15045·总2548—有5231

定价：1.25元

绪　言

计算机科学作为一门新的学科，正在蓬勃发展，并已成为科学技术现代化的一个重要标志。目前，高等院校相继建立计算机科学系。一些新的课程，如数据结构、容错技术、故障诊断、编码理论、网络理论、形式语言、自动机理论、编译技术、开关理论等所研究的对象都是离散型的。离散数学课程就是在这样的背景下逐步形成的，至今，已成为计算机科学的一门重要的专业基础课。

Liu Chung Laung 所著的“离散数学基础”(Elements of Discrete Mathematics)一书是他在美国伊里诺斯大学计算机科学系多次讲授该课时所用的一系列讲稿的结晶，内容包括集合论、组合数学、图论、代数结构和布尔代数，是一本比较成熟的离散数学教科书。书中所述内容对于应用数学、工程学、计算机科学都是十分有用的。该书写得通俗易懂、深入浅出，即使是一些相当抽象的数学概念，也都用了不少具体例子加以形象化。该书的中译本已由人民邮电出版社出版，它必将成为我国有关高等院校计算机科学系学生和科技人员的一本较好的参考书。

“离散数学基础”一书共有 326 道习题，通过我们的教学实践，感到该书中所选的习题较有代表性，其中一些直接起着巩固教材内容的外，还包括那些趣味性较浓、推理性较强和难度较高的习题，这些习题对读者在深化教材内容、扩大视野、提高思维能力等方面都有很大的启发和帮助。

考虑到离散数学是新开设的课程，编写一本习题解答是迫

切需要的。为了便于学习“离散数学基础”一书，我们编写了这本题解，所用术语和符号两者基本统一。为使读者查阅方便，在每一章习题解答之前，都写有较详细的“内容提要”，并尽可能地将“提要”写得简明扼要，除了把着重点放在基本概念的叙述外，有的还举了例子以帮助读者对概念的理解；至于定理，当然只在“提要”中写上结论，一般不再对定理本身作出证明；对于算法，我们总是在“提要”中尽可能地将算法的思路和步聚介绍清楚。这样，就使本书具有相对的独立性，方便正在学习或复习离散数学的读者阅读题解，不必频繁地去查阅原书的有关部分，对于教学人员使用参考也比较方便。

为了在教学上更好地使用题解，我们对一般性的题目未作任何记号，凡是难度较高的题目都注上★号。

本书的题解主要是提供给高等院校有关专业作为离散数学课程的参考资料。然而，对于具有高中数学基础的读者，也可以经过努力顺利掌握离散数学的基本内容。因此，本书也可作为中学教师以及对数学有兴趣的中学生的阅读材料。

对于题解中的有些题目，我们给出了不同的解法，可使读者通过这些习题提高分析问题和解决问题的能力。虽然对每道题目我们都作了认真反复的讨论，但由于我们的水平有限，加上我们对离散数学这门课的教学经验还很不够，因此，对某些题目的解法不一定很精致，也可能还有不够确切和不够完善的地方，甚至还可能有错误，我们恳切地期望得到读者的批评和指正。

在编写这本书过程中，曾得到有关同志的关心和帮助，我们深表谢意！

编著者

一九八〇年六月

目　　录

绪言 …… 1

1　集合和命题 …… 1

　内容提要

　习题解答 …… 6

2　排列与组合 …… 49

　内容提要

　习题解答 …… 50

3　关系与函数 …… 73

　内容提要

　习题解答 …… 76

4　图与平面图 …… 105

　内容提要

　习题解答 …… 111

5　树与截集 …… 156

　内容提要

　习题解答 …… 169

6　离散数函数与生成函数 …… 207

　内容提要

　习题解答 …… 211

7　递推关系 …… 237

　内容提要

　习题解答 …… 241

8　群与环 …… 277

　内容提要

习题解答 ……………………………………………………… 292
9 布尔代数……………………………………………………… 336
内容提要
习题解答 ……………………………………………………… 344
参考文献

集 合 和 命 题　1

内 容 提 要

1° **离散对象**　它是一个相当一般的概念，可以指各式各样的项目，如：人、书、计算机等。

2° **集合**　集合是一些不同对象的聚集。集合中的对象称为集合的**元素**。通常用大写英文字母表示集合，用小写英文字母表示集合中的元素。

记号 $a\in S$ 表示元素 a **属**于集合 S，也可以说集合 S **包含**元素 a；记号 $b\notin S$ 表示元素 b **不属于**集合 S，也可以说集合 S **不包含**元素 b。不包含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\emptyset$。

3° **集合的表示方法**

(1) 用记号　$S=\{a, b, c\}$表示集合 S 中有元素 a,b,c。这种表示方法称为穷举列表法。

(2) 用记号　$S=\{x|x$ 具有某些性质$\}$ 表示集合 S 是由具有某些性质的对象所组成的。

4° **子集**　设两个集合 P 和 Q，如果 P 中的每个元素也是 Q 中的元素，那末，就称 P 是 Q 的子集，记作 $P\subseteq Q$。如果 P 是 Q 的子集，而且 Q 中至少有一个元素不属于 P，那末，就称 P 是 Q 的**真子集**，记作 $P\subset Q$。

5° **集合的相等**　如果两个集合 P 和 Q 包含相同的元素，则称 P 和 Q 是相等的。还有一种说法是：如果 P 是 Q 的子集，而 Q 也是 P 的子集，就说这两个集合 P 和 Q 相等，这也是证明

两个集合相等的基本方法。

6° **集合的组合**

(1) **并** 两个集合 P 和 Q 的并是一个集合，它恰是由或属于 P 或属于 Q（或同时属于 P 和 Q）的元素组成，记作 $P \cup Q$。

(2) **交** 两个集合 P 和 Q 的交是一个集合，它恰是由同时属于 P 和 Q 的元素组成，记作 $P \cap Q$。

(3) **差** 两个集合 P 和 Q 的差是一个集合，它恰由在 P 中而不在 Q 中的那些元素组成，记作 $P-Q$。

(4) **全集** 如果限制在某一固定集合中，对它的子集进行组合时，此固定集合称为全集，记作 E。

(5) **补** 如果 Q 是 P 的子集，那末，称 $P-Q$ 为 **Q 关于 P 的补集**。

Q 关于 E 的补集就简称为 **Q 的补集**，记作 $\overline{Q}$。

(6) **对称差** 两个集合 P 和 Q 的对称差是一个集合，它恰由在 P 中而不在 Q 中和在 Q 中而不在 P 中的那些元素组成，记作 $P \oplus Q$，明显地有，$P \oplus Q=(P \cup Q)-(P \cap Q)$。

7° **集合的运算**

(1) $P \cup P=P$, $P \cap P=P$ 幂等律

(2) $P \cup Q=Q \cup P$, $P \cap Q=Q \cap P$ 交换律

(3) $(P \cup Q) \cup R=P \cup(Q \cup R)$, $(P \cap Q) \cap R=P \cap(Q \cap R)$ 结合律

(4) $P \cup(Q \cap R)=(P \cup Q) \cap(P \cup R)$, $P \cap(Q \cup R)=(P \cap Q) \cup(P \cap R)$ 分配律

(5) $\overline{(\overline{P})}=P$ 双重否定律

(6) $\overline{(P\cup Q)}=\overline{P}\cap\overline{Q}$

$\overline{(P\cap Q)}=\overline{P}\cup\overline{Q}$ De Morgan 定律

(7) $P\cup\emptyset=P$

$P\cap E=P$ 同一律

(8) $P\cup E=E$

$P\cap\emptyset=\emptyset$ 另律

(9) $P\cup\overline{P}=E$

$P\cap\overline{P}=\emptyset$ 补余律

(10) $P\cup(P\cap Q)=P$

$P\cap(P\cup Q)=P$ 吸收律

(11) $\overline{\emptyset}=E$

$\overline{E}=\emptyset$

8° **幂集** 集合 A 的幂集是以 A 的一切子集为元素的集合，记作 $\mathscr{P}(A)$。

9° **集合 N 的定义** 集合 A 的**后继** A^+，定义为 $A^+=A\cup\{A\}$。

从空集 $\emptyset$ 开始，它的后继为 $\{\emptyset\}$，$\{\emptyset\}$ 的后继为 $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$，……，并分别记作 $0=\emptyset, 1=\{\emptyset\}, 2=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$，……，即 $0^+=1$，$1^+=2$，$2^+=3$，……。

我们定义集合 N 如下：

(a) N 包含集合 0。

(b) 如果集合 $n\in N$，则 $n^+\in N$。

(c) N 中不包含其它集合。

10° **有限集和无限集** 如果一个集合 A 的元素与某一集合 n 的元素之间存在着一一对应，其中 $n\in N$，那末，A 称为有限集，而称 n 为 A 的**基数**，记作 $|A|$。如果一个集合不是有

限集，就称为无限集。如果一个集合的元素与N的元素之间存在着一一对应，则称该集合为**可数无限集**，它的基数是可数无限，记作$\aleph_0$。

如果两个集合之间元素存在一一对应，则称此两个集合的基数相等。

对于任意两个集合A和B，如果$A\subseteq B$，且C与A的基数相等，则称C的基数$\leqq B$的基数。

显然，如果$A\subseteq B$，则A的基数$\leqq B$的基数。

关于有限集合的基数，有下列关系式：

$$|P\cup Q|\leqq|P|+|Q|$$
$$|P\cap Q|\leqq\min(|P|,|Q|)$$
$$|P\oplus Q|=|P|+|Q|-2|P\cap Q|$$
$$|P-Q|\geqq|P|-|Q|。$$

11° **数学归纳法**　对于给定一个与自然数n有关的论断，如果我们能证明：

(*a*) 这个论断对于$n=n_0$时是成立的。

(*b*) 如果假定$n=k(k\geqq n_0)$时，该论断成立，能推出$n=k+1$时，这个论断也成立。

那么，我们就说，该论断对一切$n\geqq n_0$的自然数都是成立的。通常，把（a）称为归纳基础，把（*b*）称为归纳步骤。

12° **包含与排斥原则**

对于两个集合A_1，A_2，就有

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$$

一般地，对于集合A_1，$A_2,\cdots,A_n$，就有

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_r|=\sum_i|A_i|-\sum_{1\leqq i<j\leqq r}|A_i\cap A_j|$$

$$+\sum_{1\leq i<j<k\leq r}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots$$
$$+(-1)^{r-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_r|$$

13° **多重集** 多重集是一些对象的聚集，但这些对象并不要求是不同的。一个元素在多重集中出现的次数称为该元素的重数。

14° **命题** 具有"真"或"假"的一个陈述句就是一个命题。在所有情况下都是真的命题称为**重言式**(永真命题)。在所有情况下都是假的命题称为**矛盾**（永假命题）。习惯上，用T表示真，用F表示假。一个命题的"真"或"假"值，统称为它的真值。

15° **两个命题的等价** 命题往往用符号来表示。设p和q是两个命题，如果p与q的真值相同，那末，称命题p和q是等价的。

16° **命题的组合** 能由其它命题组合而得到的命题，称为复合命题。一个不是其它命题组合而得的命题称为原子命题。

命题的组合，我们定义下列五种：

析取 命题p和q的析取，表示为$p\vee q$，它是这样一个命题，只要p和q中有一个为真时，它就为真。当p和q两者都为假时，它才为假。

合取 命题p和q的合取，表示为$p\wedge q$，它是这样一个命题，当p和q两者都为真时，它才为真。只要p和q中有一个为假时，它就为假。

否定 命题p的否定，表示为$\bar{p}$，它是这样一个命题，当p为真时，$\bar{p}$为假，当p为假时，$\bar{p}$为真。

蕴涵 命题p和q的蕴涵，表示为$p\to q$，它是这样一个命题，当且仅当p为真，q为假时，它才为假。其它情况下，它都是真。命题$p\to q$显然与命题$\bar{p}\vee q$等价。

等价　命题 p 和 q 的等价，表示为 $p\leftrightarrow q$，它是这样一个命题，当且仅当 p 和 q 真值相同时，它才为真。其它情况下，它都是假。

它们的真值表，分别如下：

p	q	$p\vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

p	q	$p\wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

p	$\bar{p}$
F	T
T	F

p	q	$p\rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

p	q	$p\leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

习 题 解 答

1.1　判别下列命题是真的还是假的。并简单说明你的答案。

(a) $\emptyset\subseteq\emptyset$

(b) $\emptyset\in\emptyset$

(c) $\emptyset\subseteq\{\emptyset\}$

(d) $\emptyset\in\{\emptyset\}$

(e) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$

(f) $\{a,b\}\in\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$

(g) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

(h) $\{a,b\}\in\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

解 (a) 真。因为空集是任意集的子集。

(b) 假。因为空集不包含任意元素。

(c) 真。理由同(a)。

(d) 真。因为$\emptyset$是集合$\{\emptyset\}$中的元素。

(e) 真。因为a,b都是集合$\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$中的元素。

(f) 假。因为$\{a,b\}$不是$\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$中的元素。

(g) 真。因为a,b都是$\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$中的元素。

(h) 假。因为$\{a,b\}$不是$\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$中的元素。

1.2 举出三个集合A,B和C,使得$A\in B,B\in C$,且$A\notin C$。

解 设$A=\{a\}$, $B=\{b,\{a\}\}$, $C=\{c,\{b,\{a\}\}\}$,则明显地有:$A\in B$, $B\in C$, 但$A\notin C$。

1.3 对任意集合A,B和C,判断下述每一个论断是否正确,并论证你的答案。

(a) 若$A\in B$, $B\subseteq C$, 则$A\in C$。

(b) 若$A\in B$, $B\subseteq C$, 则$A\subseteq C$。

(c) 若$A\subseteq B$, $B\in C$, 则$A\in C$。

(d) 若$A\subseteq B$, $B\in C$, 则$A\subseteq C$。

解 (a) 真。

因为$B\subseteq C$,所以,对于任意的$b\in B$,必有$b\in C$。现在,$A\in B$,因此,必有$A\in C$。

(b) 假。

例如:设$A=\{a\}$, $B=\{\{a\},b\}$, $C=\{\{a\},b,c\}$,即有$A\in B$, $B\subseteq C$, 但$A\nsubseteq C$。

(c) 假。

例如：设$A=\{a\},B=\{a,b\},C=\{\{a,b\},c\}$，即有$A\subseteq B$，$B\in C$，但$A\notin C$。

(*d*) 假。

例如：设$A=\{a\},B=\{a,b\},C=\{\{a,b\},c\}$，即有$A\subseteq B$，$B\in C$，但$A\nsubseteq C$。

1.4 设A,B和C是U的子集，并已知

$$A\cap B=A\cap C$$
$$\bar{A}\cap B=\bar{A}\cap C$$

那么，一定有$B=C$吗？并论述你的理由。

?**解** $B=C$必定成立。

对于任一$b\in B$：

如果$b\in A$，则$b\in A\cap B$，即$b\in A\cap C$，所以，$b\in C$。

如果$b\in\bar{A}$，则$b\in\bar{A}\cap B$，即$b\in\bar{A}\cap C$，所以，$b\in C$。

由此可知，$B\subseteq C$。

同理可证$C\subseteq B$。

因此，$B=C$。

1.5 假设

$$(A\cap C)\subseteq(B\cap C)$$
$$(A\cap\bar{C})\subseteq(B\cap\bar{C})$$

证明 $A\subseteq B$。

证 对于任一$a\in A$，

如果 $a\in C$，则$a\in A\cap C$

因为$(A\cap C)\subseteq(B\cap C)$，而$B\cap C\subseteq B$，所以，$a\in B$

如果 $a\in\bar{C}$，则$a\in A\cap\bar{C}$

因为$(A\cap\bar{C})\subseteq(B\cap\bar{C})$，而$B\cap\bar{C}\subseteq B$，所以，$a\in B$

可见，若$a\in A$，必有$a\in B$，因此，$A\subseteq B$。

1.6 对下述每一种情况，说明P和Q要满足什么条件。

(a) $P \cap Q = P$

(b) $P \cup Q = P$

(c) $P \oplus Q = P$

(d) $P \cap Q = P \cup Q$

解 (a) $P \cap Q = P$要求$P \subseteq Q$。

(b) $P \cup Q = P$要求$Q \subseteq P$。

(c) $P \oplus Q = P$要求Q为空集。

(d) $P \cap Q = P \cup Q$要求$P = Q$。

1.7 (a) 设 $A \subseteq B$，$C \subseteq D$，那么，一定有$(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$吗？又是否$(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$一定成立？

(b) 设 $W \subset X$且$Y \subset Z$，那么，一定有$(W \cup Y) \subset (X \cup Z)$吗？是否$(W \cap Y) \subset (X \cap Z)$一定成立？

解 (a) 对于任一元素$x \in A \cup C$，即$x \in A$或$x \in C$，

若$x \in A$，而$A \subseteq B$，$B \subseteq B \cup D$，所以，$x \in B \cup D$

若$x \in C$，而$C \subseteq D$，$D \subseteq B \cup D$，所以，$x \in B \cup D$

可见，若$x \in A \cup C$，则必有$x \in B \cup D$，因此，$(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$一定成立。

用类似方法，可证$(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$也一定成立。

(b) $(W \cup Y) \subset (X \cup Z)$不一定成立。

例如：$W = \{a\}$，$Y = \{b\}$，$X = Z = \{a, b\}$，显然，$W \subset X$，$Y \subset Z$，但$(W \cup Y) = (X \cup Z)$。

所以，一般有：当$W \subset X$，$Y \subset Z$时，可推出$(W \cup Y) \subseteq (X \cup Z)$。

$(W \cap Y) \subset (X \cap Z)$也不一定成立。

例如：$W = \{a, b\}$，$Y = \{b, d\}$，$X = \{a, b, c\}$，$Z = \{b, d, e\}$，显然，$W \subset X$，$Y \subset Z$，但$(W \cap Y) = (X \cap Z)$。

所以，一般有：当$W \subset X$，$Y \subset Z$时，可推出$(W \cap Y) \subseteq$

$(X \cap Z)$。

1.8 (a) 若 $A \cup B = A \cup C$，一定有 $B = C$ 吗？

(b) 若 $A \cap B = A \cap C$，一定有 $B = C$ 吗？

(c) 若 $A \oplus B = A \oplus C$，那么，一定有 $B = C$ 吗？

论证你的答案。

解 (a) 不一定。

例如：$A = \{a\}$，$B = \{a, b\}$，$C = \{b\}$。

显然，$A \cup B = A \cup C$，但，$B \neq C$。

(b) 不一定。

例如：$A = \{a\}$，$B = \{a, b\}$，$C = \{a, c\}$。

显然，$A \cap B = A \cap C$，但，$B \neq C$。

(c) 一定有 $B = C$。

对于任一元素 $x \in B$，可以有两种情况：

① 如果 $x \in A$，则 $x \in A \cap B$，$x \notin A \oplus B$，即 $x \notin A \oplus C$，所以，$x \in A \cap C$，即得 $x \in C$。

② 如果 $x \notin A$，因为，$x \in B$，所以，$x \in A \cup B$，，但 $x \notin A \cap B$，$x \in A \oplus B$，即 $x \in A \oplus C \subseteq A \cup C$，而 $x \notin A$，所以，$x \in C$。

可见，若 $x \in B$，必有 $x \in C$，即 $B \subseteq C$。

同理可证：$C \subseteq B$。

因此，$B = C$。

1.9 设 $A = \{a, b, \{a, b\}, \varnothing\}$，求出下列各式。

(a) $A - \{a, b\}$

(b) $A - \varnothing$

(c) $A - \{\varnothing\}$

(d) $\{\{a, b\}\} - A$

(e) $\varnothing - A$

(f) $\{\emptyset\}-A$

解 (a) $A-\{a,b\}=\{\{a,b\},\emptyset\}$

(b) $A-\emptyset=A=\{a,b,\{a,b\},\emptyset\}$

(c) $A-\{\emptyset\}=\{a,b,\{a,b\}\}$

(d) $\{\{a,b\}\}-A=\emptyset$

(e) $\emptyset-A=\emptyset$

(f) $\{\emptyset\}-A=\emptyset$

1.10 设 A,B,C 是任意三个集合，证明

(a) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

(b) $(A-B)-C=(A-C)-B$

(c) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

证 (a) 对任一元素 $x\in(A-B)-C$，则 $x\notin C$，同时，$x\in A-B$，$x\in A$，$x\notin B$，所以，$x\in A$，$x\notin B\cup C$，即 $x\in A-(B\cup C)$，由此可见$(A-B)-C\subseteq A-(B\cup C)$。

反之，对任一元素 $x\in A-(B\cup C)$，则 $x\in A$，且 $x\notin B\cup C$，也就是说，$x\in A$，$x\notin B$，$x\notin C$。所以，$x\in(A-B)-C$，由此可见 $A-(B\cup C)\subseteq(A-B)-C$。

因此，$(A-B)-C=A-(B\cup C)$。

(b) 有两种证法。

(1) 由(a)可得

$$\begin{aligned}(A-B)-C&=A-(B\cup C)\\&=A-(C\cup B)\\&=(A-C)-B\end{aligned}$$

(2) 对任一元素 $x\in(A-B)-C$，可知 $x\in A$，$x\notin B$，$x\notin C$。因为，$x\in A$，$x\notin C$，所以，$x\in A-C$。又由 $x\notin B$，$x\in(A-C)-B$。所以，$(A-B)-C\subseteq(A-C)-B$。

同理可证得，$(A-C)-B\subseteq(A-B)-C$。