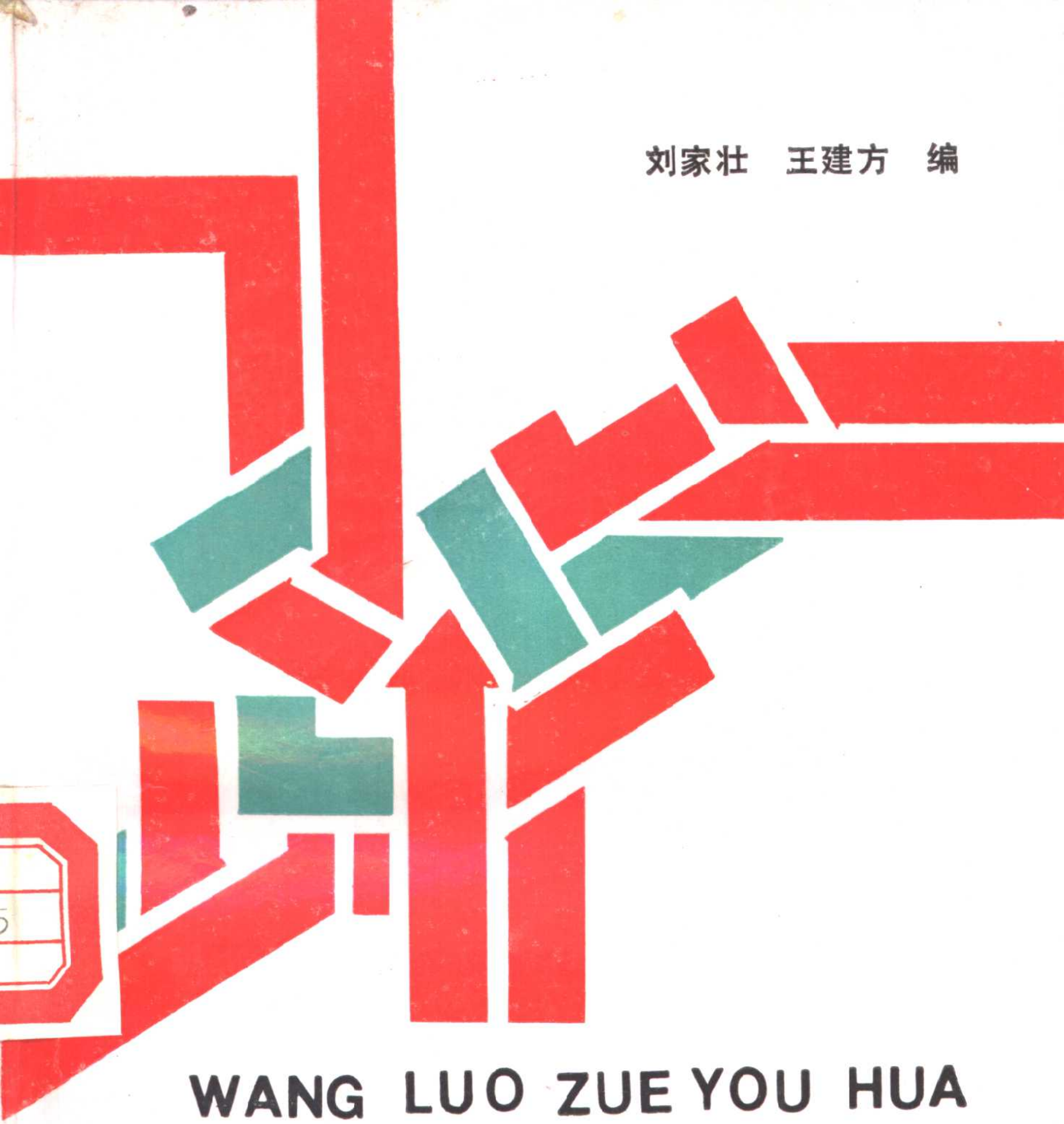
刘家壮　王建方　编



WANG LUO ZUE YOU HUA

网络最优化

华中工学院出版社

网络最优化

刘家壮　王建方　编

华中工学院出版社

网 络 最 优 化

刘家壮 王建方 编

*

责任编辑 龙纯曼

华中工学院出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

湖北省通城县印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：8 字数：168,000

1987年8月第一版 1987年8月第一次印刷

印数：1—2000

ISBN 7—5609—0069—0/TM·6

统一书号：13255—068 定价：1.53元

内 容 简 介

全书共分五章，除第一章简单介绍有关预备知识和基本概念外，其余四章分别对网络理论的几个主要分支作了介绍，重点介绍了网络理论的近代常用的有效算法，同时也介绍了各个分支的某些应用。

本书可供高等学校学生、工程技术人员和生产管理人员学习参考。

序　　言

网络理论是图论与数学规划相结合的产物，近二十年来发展十分迅速，应用也非常广泛。例如在生产-分配系统、交通运输系统、通讯系统、财贸系统、军事后勤系统、管道网络系统和电网络系统中都得到了很好的应用。

我国在网络最优化方面的工作，已经取得很多可喜的成果。近几年来，通过举办各种讲习班进行了系统的介绍，因而有力地推动了这方面工作的开展。网络最优化的广泛用途引起了广大工程技术人员和生产管理人员的极大兴趣，他们迫切要求我国能出版这方面的书籍。为适应这个需要，使网络理论和方法在我国四化建设中发挥应有作用，我们特编写了这本书。

本书共分五章，第一章简单地介绍了有关的基本概念和预备知识，后四章对网络理论的几个主要分支作了介绍；重点介绍了网络理论的近代的常用有效算法，同时也介绍了各个分支的某些应用，其目的在于说明如何使用网络方法解决实际问题，以图起到抛砖引玉的作用。

由于水平所限，书中难免会有很多缺点和错误，我们恳切地希望广大读者批评指正。

编　者

1986．5．

目　　录

第一章 基本概念

本章主要介绍有关集合、图和线性规划的基本概念和基础知识。它是以后各章讨论的基础。

§1.1 集合和关系

假定读者是熟悉$\in$、$\notin$、$\sim$、$\cup$、$\cap$、$\subseteq$、$\subset$、$\varnothing$等符号和集合基本运算的。例如，用$S\subset T$表示S是T的真子集，即$S\subset T$但$S\neq T$。用大括号$\{\ ,\ \}$表示一个集合或一个无序集。用$(\ ,\ )$表示一个有序集或一个序列。为了表示方便，采用

$$S+e=S\cup\{e\}\text{和}S-e=S-\{e\}.$$

两个集合的对称差用符号$\oplus$表示，即$S\oplus T$表示在S中或在T中但不同时在S和T中的所有元素的集合，例如

$$S=\{4,1,0,5\}\text{和}T=\{1,3,2,4\},$$

则

$$S\oplus T=\{0,2,3,5\}.$$

令$|S|$表示S中元素的数目，则$|S|$称为S的基数。显然，如果$e\notin S$，则$|S+e|=|S|+1$。若集合$\mathscr{P}(S)$是S的所有子集的集合，则$|\mathscr{P}(S)|=2^n$，其中$n=|S|$。

设$\mathscr{T}$是一个集合簇，我们称S是$\mathscr{P}$中的极小集合，如果不存在$T\in\mathscr{T}$，使得$T\subset S$；类似地，我们说S是$\mathscr{T}$中的极大集合，如果不存在$T\in\mathscr{T}$，使得$T\supset S$。显然极小集合不必唯一，也不必有最小基数；一个集合可以既是$\mathscr{T}$的极小集合也是$\mathscr{T}$的极大集合。例如$\mathscr{T}=\{\{0,1\},\{0,1,3\},\{4\},\{3\},\{1,3\}\}$，则$\mathscr{T}$中的极小集合是$\{0,1\}$，$\{3\}$和$\{4\}$，极大集合

是$\{0,1,3\}$和$\{4\}$。

如果S是一个有有限个数的数集，则$\min S$($\max S$)表示S中的最小(最大)元素。例如$S=\{-1,2,3,8\}$，则$\min S=-1$，$\max S=8$。如果

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},$$

则$\min A$还可表示成

$$\min\{a_i|\,1\leqslant i\leqslant n\}\text{或}\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\},$$

或简记为$\min\limits_i a_i$。

如果A是一个矩阵$A=(a_{ij})$，则$\min\limits_j a_{ij}$表示A的第i行中的最小元素；$\max\limits_i a_{ij}$表示A的第j列中的最大元素。例如

$$A=\begin{pmatrix}0&4&3\\2&1&7\\9&8&6\end{pmatrix},$$

则
$$\max_i\min_j a_{ij}=6,\ \min_j\max_i a_{ij}=7.$$

我们还假定读者熟悉代数概念、等价关系和偏序等基本知识。例如，等价关系满足反身性、对称性和传递性，等价关系可以导出集合的一个分划；反之，分划也可以导出一个等价关系；而偏序满足反身性、反对称性、传递性。

若设“$\leqslant$”是集A的一个全序，即对A中任两个元素a和b，或者有$a\leqslant b$，或者有$b\leqslant a$。由这个全序可导出A^n的一个字典序“$\preccurlyeq_1$”如下，其中A^n为A的n-阶笛卡儿乘积：

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$。
如果$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$或者存在$k(1\leqslant k\leqslant n)$，使得$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,k-1)$和$a_k<b_k$，则称$\boldsymbol{a}\preccurlyeq_1\boldsymbol{b}$。

若$\mathscr{A}=A\cup A^2\cup A^3\cup\cdots$，我们也可以定义$\mathscr{A}$的一个字典

序$\preceq_2$：

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$， $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，
其中，$m\leqslant n$。如果$(a_1,a_2,\cdots,a_m)\preceq_1(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，则称$\boldsymbol{a}\preceq_2\boldsymbol{b}$；否则称$\boldsymbol{b}\preceq_2\boldsymbol{a}$。

若$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(A)$，

$$a=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\},\quad b=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}.$$

不失一般性，设

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_m,\quad b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n,$$

如果$(a_1,a_2,\cdots,a_m)\preceq_2(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则称$a\preceq_3 b$。

以上三种典型的字典序都是全序，有时用起来很方便。例如，我们考虑如下最优化问题：任给正整数n，如何将n分解成若干正因子相乘，并使其因子之和达到最小？若$n=8$，则$2\times2\times2$和2×4都是最优解。如果希望解唯一，则取两个解中字典序较小者，便得到$2\times2\times2$。

n维向量间的字典序自然不会同一般的偏序相混淆。一般的偏序，即设

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n),$$

如果$a_i\leqslant b_i(i=1,2,\cdots,n)$，则$a\leqslant\boldsymbol{b}$。我们有时也使用偏序

$$A\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$$

其中，$A=(a_{ij})$是一个$m\times n$阶矩阵，x和$\boldsymbol{b}$分别是n维向量和m维向量。上面的向量不等式意味着

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i,\qquad i=1,2,\cdots,m.$$

§1.2 图

现实世界的许多现象可以用这样一种图形来描绘，这种

图形由一个点集和连接这个点集中的某些点对的连线所构成。例如，点可以代表人，连线表示一对朋友；或者，点代表通讯中心，而连线表示通讯线路。在这种图形中，人们主要感兴趣的是：两点是否被一根线所连接，而连接方式则无关紧要。这种类型的现象经过数学抽象便产生了图的概念。

一个无向图G是一个有序二元组(N,E)，记为$G=(N,E)$，其中

$$N=\{n_1,n_2,\cdots,n_n\},$$

称为G的点集合，

$$E=\{e_{ij}\},$$

称为G的边集合，并且$e_{ij}=\{n_i,\ n_j\}$是一个无序二元组。图1.2-1就是一个无向图。为简便起见，以后我们将无向图称为图。

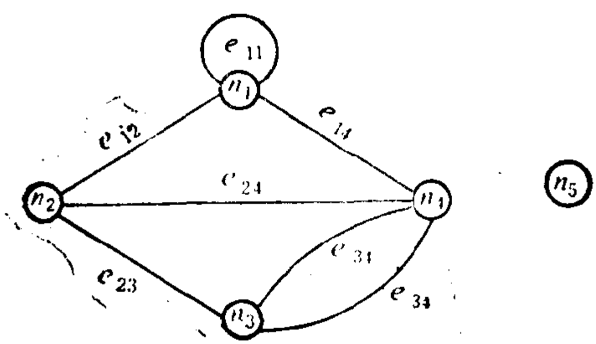


图1.2-1

若$e_{ij}=\{n_i,\ n_j\}$，则说e_{ij}连结点n_i和n_j；点n_i和n_j称为e_{ij}的端点。

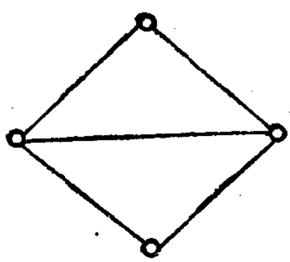
一个图可以用一个几何图形来表示，在保持图的点和边的关系不变的情况下，图形的位置、大小、形状都是无关紧要的。因此，在图的论讨中，我们常常画出图的一个几何图

形，并且把它作为这个图的本身。以后，我们将用圆圈表示点，用线表示边。图论中大多数概念都是根据图的表示形式提出来的。一条边的端点称为与这条边关联，反之，一条边也称为与它的端点关联。与同一条边关联的两个端点称为是邻接的；如果两条边有一个公共端点，则称这两条边也是邻接的。两个端点重合为一点的边称为圈（如图1.2-1中的e_{11}）；不与任何边关联的点称为孤立点（如图1.2-1中的n_5）。

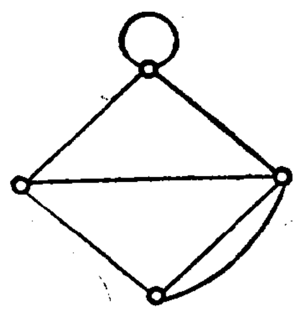
任给图$G=(N,E)$。若N和E都是有限集合，则称图G为有限图；否则，称为无限图。本书只限于讨论有限图。

没有任何边的图称为空图，只有一个点的图称为平凡图。

一个图，如果它既没有圈，也没有两条边连接同一对点，则称为简单图。例如图1.2-2中(a)是一个简单图；(b)就不是简单图。



(a)



(b)

图1.2-2

设$G=(N, E)$是一个简单图，若$|N|=n$，$|E|=m$，则显然有$m\leqslant n(n-1)/2$。

一个简单图，若每对点之间均有一条边相连，则称为完全图。具有n个点的完全图，记作K_n，显然K_n有$n(n-1)/2$条边。

图1.2-3所示的图就是一个完全图K_5。

一个图$G=(N,E)$，若存在N的一个二分划(S, T)，使得G的每条边有一个端点在S中，另一个端点在T中，则称G为**二分图**。这时记为$G=(S, T, E)$。

设$G=(S,T,E)$是一个简单二分图。如果S中的每个点与T中的每个点都相连，则称G为**完全二分图**，若设$|S|=p$，$|T|=q$，则这个完全二分图记为$K_{p,q}$。

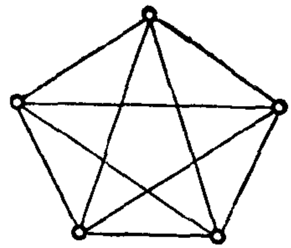
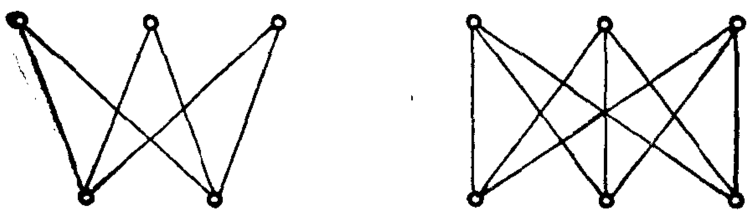


图1.2-3

图1.2-4的（a）和（b）分别为$K_{3,2}$和$K_{3;3}$的图形。



(a)　　　　(b)

图1.2-4

一个简单图G的补图$\bar{G}$，是与G有相同点集合的一个简单图，并且$\bar{G}$中两个点相邻接，当且仅当它们在G中不相邻接。图1.2-5的（a）和（b）就是互补的两个图。

一个有向图G是一个有序二元组(N,A)，记为$G=(N,A)$其中

$$N=\{n_1,n_2,\cdots,n_n\},$$

称为G的点集合，

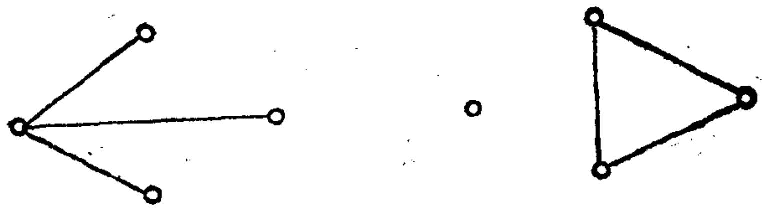


图1.2-5

$$A=\{a_{ij}\}$$

称为G的弧集合，并且$a_{ij}=(n_i, n_j)$是一个有序二元组。图1.2-6就是一个有向图。

若$a_{ij}=(n_i, n_j)$，则称a_{ij}从点n_i连向点n_j；点n_i称为a_{ij}的尾，n_j称为a_{ij}的头；n_i称为n_j的先辈，n_j称为n_i的后继。

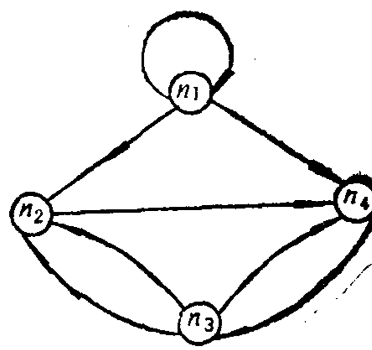


图1.2-6

类似地，可以定义有向图中点、弧的关联关系，以及简单有向图、完全有向图、二分有向图和有向图的补图等概念。

在有向图G中，对于每条弧我们用一条边来代替它，于是得到一个无向图，这个无向图称为G的基本图。

设$G=(N, A)$是一个简单有向图，若$|N|=n$，$|A|=m$，则显然有$m\leqslant n(n-1)$。

若K_n是一个完全有向图，则K_n显然有$n(n-1)$条弧。

设G是一个图（有向图），若对G的每一条边（弧）都赋予一个实数，并称它为这边（弧）的权，则G连同边（弧）上的权称为一个（有向）网络，记为$G=(N,E,W)$。本书将着重讨论网络上的各种最优化问题。

§1.3 关联关系

每个简单图$G=(N, E)$，都对应着一个$|N|\times|E|$阶矩阵$B=(b_{ik})$，其中

$$b_{ik}=\begin{cases}1, & \text{当点}i\text{与边}k\text{关联；}\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

B称为G的关联矩阵。

图1.3-1的关联矩阵为

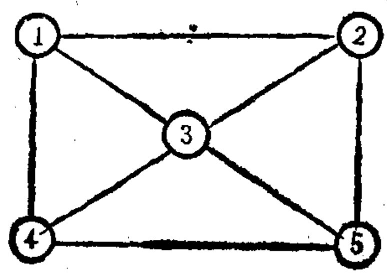


图1.3-1

$$\begin{array}{c}
 \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}\{1,2\} & \{1,3\} & \{1,4\} & \{2,3\} & \{2,5\} & \{3,4\} & \{3,5\} & \{4,5\}\end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

一个简单有向图$G=(N,A)$也对应着一个$|N|\times|A|$阶矩阵$B=(b_{ik})$，其中

$$b_{ik}=\begin{cases}1, & \text{当弧}k\text{以点}i\text{为尾；}\\ -1, & \text{当弧}k\text{以点}i\text{为头；}\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

B称为简单有向图G的关联矩阵。

图1.3-2的关联矩阵为

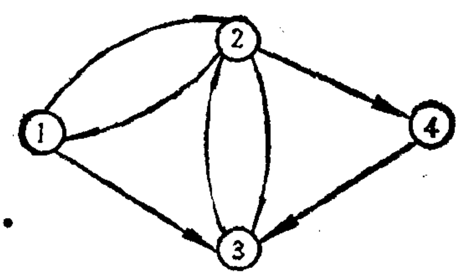


图1.3-2

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
(1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,3) & (2,4) & (3,2) & (4,3)
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

一个简单图$G=(N, E)$，还对应着一个$|N|\times|N|$阶矩阵$A=(a_{ij})$，其中

$$
a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当点}i\text{和点}j\text{相邻接；}\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}
$$

A称为G的邻接矩阵。

图1.3-1的邻接矩阵为

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}.
$$

一个简单有向图$G=(N, A)$，也对应着一个$|N|\times|N|$阶邻接矩阵$A=(a_{ij})$，其中

$$
a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当有弧从}i\text{连向}j\text{；}\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}
$$

图1.3-2的邻接矩阵为

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}.
$$