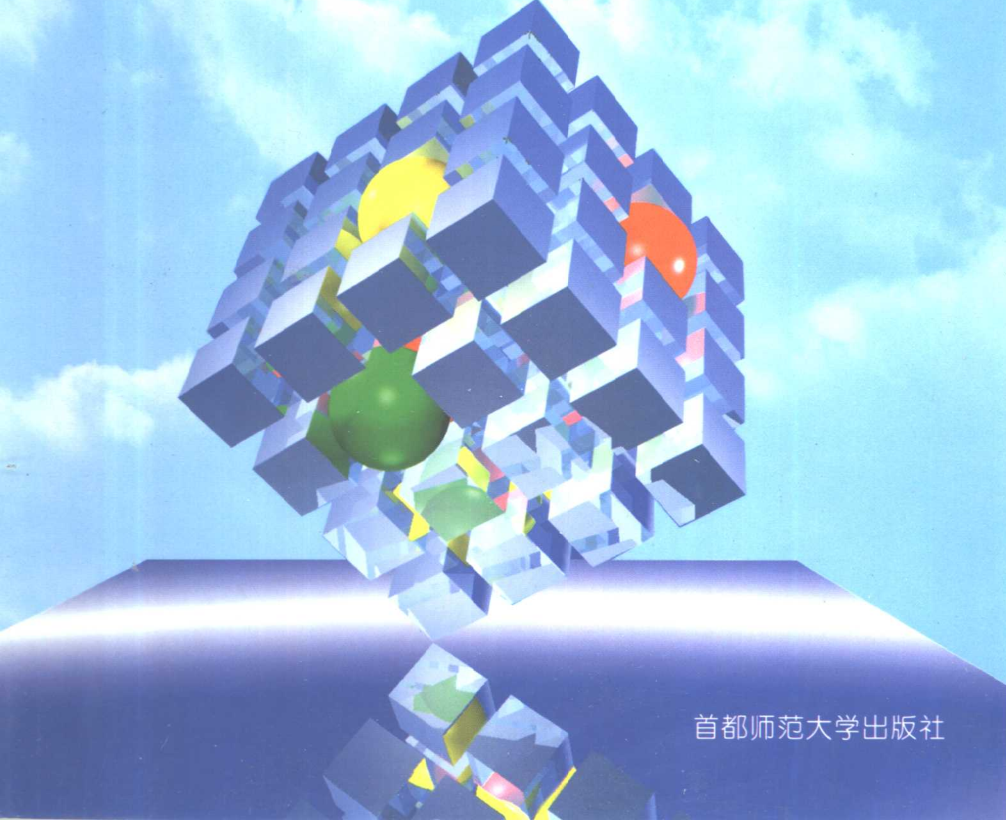
中学数学方法与解题能力培养

曾宪梓教育基金一等奖获得者

立体几何34讲

（修订版）

贾士代　主编



首都师范大学出版社

中学数学方法与解题能力培养

立体几何34讲

（修订版）

贾士代　主编

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

立体几何 34 讲:中学教学方法与解题能力培养丛书/贾士代主编. 一北京:首都师范大学出版社 (2000.6 修订)

ISBN 7-81039-027-9

Ⅰ. 立… Ⅱ. 贾… Ⅲ. 立体几何课-中学-教学参考资料

Ⅳ. G633.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1995)第 04347 号

LITI JIHE 34 JIANG

立体几何 34 讲

(修订版)

首都师范大学出版社

(北京西三环北路 105 号　邮政编码 100037)

北京首师大印刷厂印刷　全国新华书店经销

2000 年 6 月第 2 版　2000 年 11 月第 2 次印刷

开本 850×1168　1/32　印张 8.125

字数 204 千　印数 10,501～16,500 册

定价 9.20 元

贾士代先生

作者简介

贾士代，教授，1947年11月生，1969年武汉大学数学系毕业。1983年起，他即从事一整套关于《数学素质教育工程》的理论研究和实践，其实质是通过数学“四法教育”，使每一个学生都能掌握数学的思想与方法，并具有较高的数学素质。为此，他已奋斗了16年，发表论文120篇，出版著作32部。代表作有《中学数学方法与解题能力培养》丛书、《高中数学巧妙解法400例》等。他的论文论著在国内外教育界及读者中产生较大反响，深受广大读者厚爱。1995年被河南省委、省政府命名为优秀专家，1997年荣获曾宪梓教育基金会全国高等师范院校教师奖一等奖。他的业绩曾被《中国教育报》、《组织信息报（上海）》、河南广播电台、河南电视台等多家媒体报道，并已载入《世界优秀华人教育专家名典》等30种名人辞书中。

曾宪梓教育基金会授予:

贾士代 老师一九九七年高等师范院校教师奖一等奖，奖金捌万元人民币。

曾宪梓教育基金会
理事长 曾宪梓

曾宪梓教育基金会
一九九七年十二月

再版前言

贾士代教授主编的《中学教学方法与解题能力培养》丛书(一套五种)自1993年出版以来,在全国各地中学师生中产生了很大的反响,深受广大读者厚爱,收到了良好的社会效益.

这六年来,中学数学的教学内容已有一定变动,许多读者纷纷来信,建议该丛书修订再版.为了满足广大读者的需要,我们对原丛书进行了认真修订.修改时,初中部分我们按照全国九年义务教育数学教材,高中部分依据1998年教育部发布的《关于调整现行普通高中数学、物理学科教学内容和教学要求的意见》.

修订后的丛书有下列三个显著特点:

(一)培养素质　突出“三法”

为了应付高考和中考,学生们在学习中不得不做大量的习题集、练习册.面对茫茫题海,许多学生苦恼,不少教师忧虑.怎样从根本上提高学生的解题能力,使学生早日摆脱题海的束缚,怎样更好地进行素质教育,成了人们议论的焦点.

我们认为,在素质教育中,要想真正提高学生的数学能力,就必须注重发展学生的思维,必须对学生进行以“数学三法”为主要内容的数学方法教育.所谓“数学三法”,就是思维方法、学科方法和类型题解证法.思维方法是处理数学问题的一般方法,如分析法、综合法和数形结合法等.学科方法是每门学科的思想方法,例如,立体几何中有辅助图形法与割补法、转化为平面几何法和体积法等.类型题解证法是数学各学科中每一种类型题的各种解法,是思维方法与学科方法、数学知识在不同类型题中的灵活应用.解题时,思维方法是解题的先导,学科方法与类型题解证法则是解题的具体实施.我们平常所说的解题方法与技巧,往往是在正确的思维

方法引导下，灵活运用学科方法、类型题解证法与数学知识的结果．因此，“数学三法”是解数学题的思路、方法与技巧的源泉，是数学的“宗”．只有使学生真正掌握了数学的“宗”，才能达到以不变应万变的目的．

本丛书修订后的每一册都是按照思维方法、学科方法与类型题解证法这三章精心编写的，力求做到层次分明、条理清晰、难易适度．

（二）方法全面　题型新颖

本丛书从几千种书刊中汲取了丰富的营养，把各家之精髓熔为一炉，汇集了中学数学的各种思维方法与解题技巧．因此，本丛书中的方法具有全面性、系统性、普遍性和灵活性．

另外，在编写过程中，我们特别注意题型的新颖性和典型性．除从各类书刊中精选有代表性的题目外，我们的重点是从 1994 年以来全国各地各类考试中精选数学题，因为这些题目最为活跃、最富有生命力．

（三）巧解妙证　趣味横生

数学问题的巧妙解法，往往简捷得使人惊叹，巧妙得令人叫绝．巧妙解法能激发学生的学习兴趣，有利于培养创造思维能力．因此，本丛书在指导学生掌握解数学题的通法外，还常常向学生展示问题的巧妙解法，使读者得到无穷的乐趣和美的享受．

本书是该丛书的一种．第一、二章分别讲解立体几何的思维方法和学科方法，可作为高中生全面复习立体几何时使用；第三章是按教材顺序全面讲述各种类型题及其解法，可作为初学者同步学习之用．

本书由贾士代先生主编，参加编写工作的有贾士代、张子莲、贾玲娟、贾迎乐、曹全友、马十成、詹红庆、张伟奇、李济克、李光显等老师．

书中有不足和错误之处，恳请广大读者指正．

编者

目　录

第一章　思维方法

§1.1　综合法、分析法和分析综合法

证明一个数学命题，重要的是寻找"条件"(已知)与"结论"(未知)之间的逻辑关系. 寻找的方法通常分成正面思考和反面思考两大类. 正面思考的方法有综合法、分析法和分析综合法等，反面思考的方法有反证法和同一法等.

(一)综合法

所谓综合法就是从"已知条件"出发，运用已学过的数学知识(定义、公理、定理等)，一步步地进行推理，直至导出"结论"为止. 综合法以"结论"为目标，由"已知"推出"可知"，逐步靠拢目标. 因此，综合法证明命题 $A\Rightarrow B$ 的思路可简记作：

$$A\Rightarrow C\Rightarrow D\Rightarrow\cdots\cdots\Rightarrow B.$$

例 1　如图 1-1. 已知：$\alpha\perp\beta$，$b\perp\beta$ 且 $b\not\subset\alpha$. 求证：$b/\!/\alpha$.

【分析】　由 $\alpha\perp\beta$ 和平面与平面垂直的性质定理可知，在 α 内，作垂直于 α 与 β 交线的直线 c 必垂直于 β. 从而由 $b\perp\beta$、$c\perp\beta$ 和直线与平面垂直的性质定理可得，b 与 c 重合或平行. 若 b 与 c 重合，则 $b\subset\alpha$，与已知条件 $b\not\subset\alpha$ 不合；若 $b/\!/c$，则 $b/\!/\alpha$.

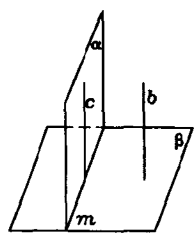


图 1-1

【证明】　设 $\alpha\cap\beta=m$，在 α 内作直线 $c\perp m$.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta\\ \alpha\cap\beta=m\\ c\subset\alpha\\ c\perp m\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}c\perp\beta\\ b\perp\beta\end{array}\right\}\Rightarrow b\text{ 与 }c\text{ 重合或 }b/\!/c.$$

$$\left.\begin{array}{l} b\text{ 与 }c\text{ 重合} \\ c\subset\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b\subset\alpha \\ b\not\subset\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow\text{矛盾，于是，}b\text{ 与 }c\text{ 不重合}.$$

$$\left.\begin{array}{l} b /\!/ c \\ c\subset\alpha \\ b\not\subset\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow b /\!/ \alpha.$$

【解说】 用综合法证明立体几何题，从“已知”过渡到“可知”时，必须注意挖掘几何图形的性质，充分运用性质定理去推证，这是综合法证题的一个规律.

例 2 如图 1-2. 已知：在四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp DC$，$AC\perp BD$. 求证：$AD\perp BC$.

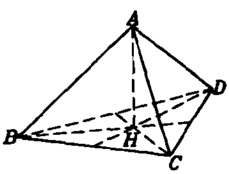


图 1-2

【分析】 由 $AB\perp DC$ 和 $AC\perp BD$ 可得出什么？注意到 CD、BD 都在平面 BCD 内，AB、AC 都是这个平面的斜线，这样，已知条件就是平面 BCD 的两条斜线与该平面内的两条直线分别垂直. 因此，由三垂线定理的逆定理可得，两条斜线的射影也分别垂直于这两条直线. 于是，作 AH 垂直于平面 BCD，垂足为 H，连结 BH、CH、DH，则 $BH\perp CD$，$CH\perp BD$. 从而 H 是 $\triangle BDC$ 的垂心，可知 $DH\perp BC$. 由 DH 是 AD 在平面 BDC 内的射影和三垂线定理，可得 $AD\perp BC$.

【证明】 如图 1-2. 过 A 作 AH 垂直于平面 BCD，垂足为 H，连结 BH、CH、DH.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AH\perp\text{平面 }BCD \\ AB\perp DC \end{array}\right\}\Rightarrow BH\perp CD \\ \left.\begin{array}{l} AH\perp\text{平面 }BCD \\ AC\perp BD \end{array}\right\}\Rightarrow CH\perp BD \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow H\text{ 是}\triangle BCD\text{ 的垂心}\Rightarrow DH\perp BC \\ AH\perp\text{平面 }BCD \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow AD \perp BC$.

(二)分析法

所谓分析法就是从“结论”入手，去追溯“结论”成立的条件(即在什么条件下“结论”成立)，再把所得的条件作为结论，去寻找这个新结论成立的条件. 像这样，追根求源，一直追溯到“已知”为止.

分析法证明命题 $A \Rightarrow B$ 的思路是：证明 $A \Rightarrow B$，就是寻找使 B 成立的条件(充分条件). 若 $D \Rightarrow B$，则问题转化为证 $A \Rightarrow D$. 再去寻找 D 成立的条件，若 $C \Rightarrow D$，则又转化为证 $A \Rightarrow C$. 如此这样，由“结论”出发，逐步向“已知”靠拢. 它的思路可简记作：$B \Leftarrow D \Leftarrow C \Leftarrow \cdots \Leftarrow A$. 因此，分析法是与综合法的思维方向恰好相反的思维方法.

例 3 如图 1-3. 已知 $A_1B_1C_1—ABC$ 是正三棱柱，D 是 AC 的中点. 求证：$AB_1 /\!/$ 平面 DBC_1. (1994 年全国高考文科、理科试题)

【分析】 欲证 $AB_1 /\!/$ 平面 DBC_1，即证 AB_1 平行于平面 DBC_1 内的一条直线. 由于 D 是 AC 的中点，联想$\triangle CAB_1$ 的中位线的性质，只需找到 B_1C 的中点 E. 而由已知易得 B_1BCC_1 是矩形，B_1C 与 BC_1 的交点就是 E.

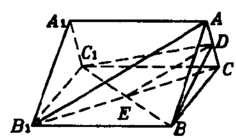


图 1-3

【证明】 连结 B_1C、BC_1，设 $B_1C \cap BC_1 = E$，再连结 DE.

$A_1B_1C_1—ABC$ 是正三棱柱 $\Rightarrow B_1BCC_1$ 是矩形

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\Rightarrow B_1E=EC \\ AD=DC\end{array}\right\} \Rightarrow DE /\!/ AB_1 \\ \quad DE \subset \text{平面 } DBC_1 \\ \quad AB_1 \not\subset \text{平面 } DBC_1\end{array}\right\} \Rightarrow AB_1 /\!/ \text{平面 } DBC_1.$$

【解说】 在本例的分析中，用分析法作了一番探索后，发现了由“已知”通向“未知”的思维过程，为综合法证明铺平了道路.

例 4 如图 1-4. 已知：在四面体 $ABCD$ 中，$AC = BC$，

$AD=BD$. 求证：$AB\perp DC$.

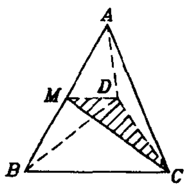


图 1-4

【分析 1】 欲证 $AB\perp DC$，由直线与平面垂直的性质知，需证 AB 垂直于过 DC 的某个平面. 因此，需找两条相交直线，它们都垂直于 AB，且与 DC 共面. 因 AB 是 $\triangle CAB$ 和 $\triangle DAB$ 的公共边，问题转化为在 AB 上是否存在一点 M，使 $AB\perp MC$，且 $AB\perp MD$，但这由已知条件 $CA=CB$ 和 $DA=DB$ 可知.

【证法 1】 设 M 是 AB 的中点，连结 MC 和 MD.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}CA=CB\\AM=MB\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp MC\\\left.\begin{array}{l}DA=DB\\AM=MB\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp MD\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp\text{平面 }MDC\\\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad DC\subset\text{平面 }MDC\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow AB\perp DC$.

【分析 2】 如图 1-5.

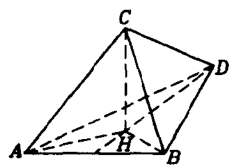


图 1-5

AB 在平面 ABD 内，CD 与这个平面相交. 要证 $AB\perp CD$，若 CD 是平面 ABD 的斜线，则问题转化为证 CD 在平面 ABD 内的射影 DH（$CH\perp$ 平面 ABD）垂直于 AB. 因 $DA=DB$，只需证 $\angle ADH=\angle BDH$. 由 $DA=DB$ 知，只需证 $AH=BH$，这可由 $CA=CB$ 得出. 若 $CD\perp$ 平面 ABD，则易得 $CD\perp AB$.

【证法 2】 (1)当 CD 不垂直于平面 DAB 时（如图 1-5），过 C 作 $CH\perp$ 平面 DAB，垂足为 H，连结 AH、BH、DH.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}CH\perp\text{平面 }ABD\\CA=CB\end{array}\right\}\Rightarrow AH=HB\\AD=BD\\DH=DH\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow\angle ADH=\angle BDH\\ AD=DB\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}DH\perp AB\\ CH\perp \text{平面 } ABD\end{array}\right\}\Rightarrow CD\perp AB.$$

(2)当 $CD\perp$ 平面 DAB 时,$CD\perp$ 平面 $DAB\Rightarrow CD\perp AB$.

于是,由(1)、(2)可知,$CD\perp AB$.

【解说】 这两种证法都需要添置适当的辅助线,而这些辅助线都是在探索"结论"成立的条件中发现的.因此,分析法是立体几何中添置辅助线的一种重要方法.

(三)分析综合法

综合法由"条件"靠拢"结论"是正向思维,分析法由"结论"追溯"条件"是逆向思维. 因此,在思维方法上,这两种方法构成一对矛盾.

分析法和综合法是证明数学命题的两种有效方法,在立体几何中都大有用武之地,但是,使用这两种方法要灵活机动,因题制宜,不可拘泥于某一种方法. 有的题目,单用一种方法简直到了山穷水尽疑无路的地步,一旦改换另一种方法,思维沿着相反的方向进行,就会出现柳暗花明又一村的美景. 因此,一旦把两种方法结合起来,互相穿插使用,便能加快解题速度.这样,分析法和综合法互相配合就产生了分析综合法. 这种方法从一个命题的两头("条件"和"结论")向中间靠拢,思路清晰,目标明确,思维集中,容易找到问题的突破口,发现解题途径.

例 5 如图 1-6,在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$E\in BB_1$,截面 $A_1EC\perp$ 侧面 AC_1. 求证:$BE=EB_1$. (1996 年全国高考理科试题改编)

【分析】 如图 1-6,欲证 $BE=EB_1$,即证 $BE=\frac{1}{2}BB_1$,又 $AA_1=BB_1$,即证 $BE=\frac{1}{2}AA_1$(以上为分析法). 由已知条件平面 $EA_1C\perp$ 平面 ACC_1,在平面 A_1CE 内可作 $EG\perp A_1C$ 于 G,设 AC 的中点

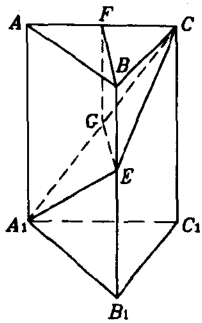


图 1-6

为 F，连 BF、FG，然后利用已知条件去证 $BE=FG$且 $FG=\frac{1}{2}AA_1$(以上为综合法).

【证明】 如图 1-6. 在截面 A_1EC 内，过 E 作 $EG\perp A_1C$ 于 G，则由截面 $EA_1C\perp$侧面 A_1C，得 $EG\perp$侧面 A_1C.

设 F 是 AC 的中点，连结 BF、FG，则由 $BA=BC$，得 $BF\perp AC$.

$\because$ 平面 $ABC\perp$侧面 AC_1，

$\therefore$ $BF\perp$侧面 AC_1.　　$\therefore$ $BF/\!/EG$.

从而 BF、EG 确定一个平面，这个平面与侧面 A_1C 的交线为 FG.

又 $BE/\!/$侧面 A_1C，$\therefore$ $BE/\!/FG$.

于是 $BE=FG$.

在$\triangle CAA_1$ 中，$\because$ $FG/\!/BE$，$BE/\!/AA_1$，

$\therefore$ $FG/\!/AA_1$. 又 F 是 AC 的中点，

$\therefore$ $FG=\frac{1}{2}AA_1$.

$\because$ $AA_1=BB_1$，$\therefore$ $FG=\frac{1}{2}BB_1$.

$\therefore$ $BE=\frac{1}{2}BB_1$. 故 $BE=EB_1$.

习　题　1.1

1. 已知：$b\subset\alpha$，$c\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$b/\!/c$，$b\not\subset\beta$. 求证：$b/\!/l$.

2. 在三棱锥 S-ABC 中，已知$\angle ASB=\angle BSC=\angle CSA=90°$. 求证：$\triangle ABC$ 是锐角三角形.

3. 已知：$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 为一正四棱柱，过 A、C、B_1 三点作一截面. 求证：截面 $ACB_1\perp$对角面 DBB_1D_1.

4. 已知：在三棱锥 S-ABC 中，$\angle ASB=\angle BSC=\angle CSA=90°$. 求证：顶点 S 在底面 ABC 内的射影 O 是$\triangle ABC$ 的垂心.

5. 已知：$\beta\perp\alpha$，$\gamma\perp\alpha$，$\beta\cap\gamma=l$．求证：$l\perp\alpha$．

6. 已知：$B\in\alpha$，$A\notin\alpha$，$AA_1\perp\alpha$，垂足为 A_1，C 是 A_1B 的中点，$\beta\perp A_1B$，$C\in\beta$，$AB\cap\beta=D$．求证：$AD=DB$．

7. 已知：在四面体 $ABCD$ 中，$AB=AC$，$DB=DC$，在 $\triangle CAD$ 中，$CE\perp AD$ 于 E，连结 BE，在 $\triangle BCE$ 中，$BH\perp CE$ 于 H．求证：$BH\perp$ 平面 ACD．

习题 1.1　答案或提示

1. 欲证 $b/\!/l$，由于 $l=\alpha\cap\beta$，只需证 $b/\!/\beta$．这可由 $b/\!/c$ 且 $c\in\beta$，$b\notin\beta$ 而得到．

2. 欲证 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，则由余弦定理可得，即证这个三角形的每一边的平方小于其他两边的平方和，这可由在已知的三个直角三角形中，利用勾股定理即得．

3. 欲证截面 $\perp$ 对角面 DBB_1D_1，需在平面 ACB_1（或平面 DBB_1D_1）中找一条直线垂直于平面 DBB_1D_1（或平面 ACB_1）．这可由 $AC\perp DB$，$AC\perp B_1B$（或 $D_1B\perp AB_1$，$D_1B\perp B_1C$）而得到．

4. 欲证 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心，即证 $AO\perp BC$ 和 $CO\perp AB$．要证 $AO\perp BC$，因 AO 是 AS 在平面 ABC 内的射影，所以只需证 $AS\perp BC$．又 BC 在平面 SBC 内，从而问题转化为证 $AS\perp$ 平面 SBC，这可由已知条件 $\angle ASB=\angle ASC=90°$ 而得到．

5. 欲证 $l\perp\alpha$，只需证 l 垂直于 α 内两条相交直线．由于 $\alpha\perp\beta$、$\alpha\perp\gamma$，可过 α 内一点 P 在 α 内作垂直于 α 与 β 的交线和 α 与 γ 的交线的垂线 PM、PN，则易得 $PM\perp l$，$PN\perp l$．

6. 连结 DC，由 $A_1C\perp\beta$，得 $A_1C\perp CD$，由 $AA_1\perp\alpha$，得 $AA_1\perp A_1C$，从而 $AA_1/\!/DC$．又 $A_1C=CB$，得 $A_1D=DB$．

7. 欲证 $BH\perp$ 平面 ACD，因为 $BH\perp CE$，所以转化为证 $BH\perp AD$．BH 在 $\triangle BCE$ 内，因此只需证 $AD\perp$ 平面 BCE．但 $AD\perp CE$，又由 $AB=AC$ 和 $DB=DC$ 可证得 $AD\perp BC$．

§1.2 反证法

(一)什么叫反证法

反证法是一种间接证明方法.它先假设“结论”不成立,然后把“结论”的反面当作已知条件,进而运用数学知识进行正确的逻辑推理,得出与题设或已知的公理、定义、定理相矛盾的结论,从而说明假设不成立,即原“结论”成立. 这种先驳倒“结论”反面,尔后肯定“结论”本身的证明方法叫做反证法.

当“结论”的反面只有一个时,这种反证法又叫做归谬法;当“结论”的反面不只一个时,这种反证法又叫做穷举法.

反证法证明命题 $A\Rightarrow B$ 的思路可记作 $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$. 因此,反证法的实质是证明与原命题等价的逆否命题.

(二)哪些题型宜用反证法

反证法是证明数学命题的一种重要方法,是数学家的一个精良武器.

一般地说,当“结论”的反面比“结论”本身更简单、更具体、更明确时,宜考虑用反证法去证.

在立体几何中,常用反证法证明的题型有:

1. 证明两条直线是异面直线

例 1 已知:$\alpha\cap\beta=m$,$b\subset\alpha$,$c\subset\beta$,$m\cap b=A$,$c/\!/m$. 求证:b、c 是异面直线.

【证明】 如图 1-7. 假设 b、c 不是异面直线,则 b、c 共面.

$$\left.\begin{array}{r}c/\!/m\Rightarrow c/\!/\alpha\\ b、c\text{ 共面}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow c/\!/b\\ \quad c/\!/m\end{array}\right\}\Rightarrow b/\!/m \text{ 或 } b \text{ 与 } m \text{ 重合}. \text{ 这与 } b\cap m=A \text{ 矛盾}.$$

这就说明假设不成立,故 b、c 是异面直线.