目　录

第一章　绪　论

§1·1　连续介质的力学模型

现代物理和化学都已证实，任何物质都是由离散的基本粒子构成的，也就是说，客观存在的一切物质在构造上是不连续的，我们将把这种不连续的物质构造称为物质原型。

从小于原子的粒子到原子以致分子的尺度与工程力学所研究的物质在空间中随时间的宏观机械运动涉及的基本尺度比起来，那还是非常之小的。例如，室温下地面附近空气分子的平均自由程约为 5×10^{-6} 厘米，水分子的大小约为 10^{-8} 厘米，这和所研究的空气运动（如机翼附近的气流）和船舶或水力机械附近的水流的一些统观平均值或比值的尺度相比还是很小的。决定物质宏观运动性质的，不是物质个别粒子的行为，而是大量粒子行为统计平均的反映，譬如对于压力、温度、力和速度等所用到的尺度，考虑微观结构的不连续性与经过光滑化的连续处理，其差别并不很大。

因此，正如理论力学中引入了质点、刚体等力学模型一样，连续介质力学中引入了连续介质模型。它是一种设想的、近似的、而又有广泛实际意义的合理力学模型。

连续介质模型忽略物质实际上离散的粒子结构，理想地认为物质连续地充满它所占的空间。由于两个无论多么接近的不同实数之间都有无限多个实数，因此，物质构造上的连续模型，在数学上就是允许用实数系的连续性来理解物质分布。所谓时间和三维欧氏空间（t, x, y, z）所形成的四个实数系，即一种四维时空连续区域，将被用来表达连续介质的机械运动。在这种简化的力学数学模型上，可以充分运用建立在连续函数基础上的数学分析工具。将连续介质模型作为分析基础的力学一般称为连续介质力学。当然这仍允许局部的不连续例如跳跃等。

对于连续介质力学的分析，可以用解析方法（但更多地将是用数值分析方法）得到一系列初值-边值问题的解答，再将这些解答与实际情况或实验结果进行比较，以检验这种力学数学模型的合理性与所用数学方法的精确性。

这种体系，实质上说明了应用连续介质力学是一门唯象的科学。当然从分析的含义上来说它是完全精确的，但作者认为，初学者还是应该注意到概念上的近似意义，并更多地从应用和实际中去求得更深入的认识。

§1·2　质点、密度与比力

本书从统计平均的观点去简化、处理真实物质粒子的不连续性，同时又在物质连续分布的含义下将物体分为很多个微元，如果把这些微元离散化，就形成很多小块的物质即所谓质点。因此，物体可视为质点的组合，即质点系。

质点实质上是一个物质微元，这个微元不能太小，其大小和所研究的分子运动的尺度比起来应足够大，因而微元内仍含有大量分子，从而可以对分子运动进行统计平均（也就是光

滑化的处理）得到表征宏观现象的物理量。同时，微元也不能太大，其大小和所研究问题的宏观尺度比起来必须足够小，以致可以认为微元内任何物理量都是常数，唯有这样，才可以在数学上把它当作一个点来处理。

由此可见，这种质点的概念，与物质构造的粒子并不是一回事。理论力学中的质点，实际上就是这里所说的质点但已刚化。

对于已经理想化了的连续介质力学模型，可以建立连续体内一点处的密度的概念。

设有某种连续介质充满空间的某一区域 V_0，设 P 是 V_0 内的一点。

连续地将 V_0 向 P 点收缩，得到连续的子空间序列 V_0，V_1，V_2，…，V_{n-1}，V_n，…，引用集合论中的符号$\subset$（包含于），$\in$（属于），于是：

$$V_n \subset V_{n-1} \qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

$$P \in V_n \qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

设 V_0 内介质的质量为 m_0，V_n 内质量为 m_n，于是比值 m_n/V_n 就是 V_n 内的平均密度。V_n 取得越小就越精确，当 $n\to\infty$ 时（这时 $V_n\to 0$，即 V_n 收缩到 P 点），比值 m_n/V_n 的极限，定义为 P 点的密度，以 $\rho(P)$ 表示，即：

$$\rho(P)=\lim_{\substack{n\to\infty \\ V_n\to 0}}\frac{m_n}{V_n}=\left.\frac{dm}{dV}\right|_P \tag{1·2·1}$$

$\rho(P)$ 是一个标量，它说明连续介质各处的密度可以是不同的，但取极限的过程，只能对连续的介质模型进行。

如果对于 V_0 内的任意一点，该比值的极限都存在，也就是说 V_0 内任一点都有完全确定的密度，那么物质在 V_0 内就是连续分布的。

密度是点的位置的函数，一般情况下此函数是连续函数，但也可能出现密度的不连续面，即穿过此面时密度发生跳跃。实际上这个不连续面也不是没有厚度的几何面，密度的不连续并不是物质分布不连续。不同种类的连续介质，尽管在同样大小的空间中可以有不同质量，不同密度，但它们都是连续地充满空间。

与建立（质量）密度的概念完全类似地可以定义动量密度，能量密度（也叫比能）、内力密度（也就是面积比力，即应力）、体力密度（也就是体积比力，即单位体积物质所受的体积力）等等。

下面具体写出物体内任一点 P 处的体积比力 $\boldsymbol{F}(P)$，设 $\boldsymbol{f}(P)$ 代表单位质量的体力，$\boldsymbol{f}_n$ 是作用在 V_n 上的体力，于是：

$$\boldsymbol{F}(P)=\rho(P)\boldsymbol{f}(P)=\lim_{\substack{n\to\infty \\ V_n\to 0}}\frac{m_n\boldsymbol{f}_n}{V_n} \tag{1·2·2}$$

而两相邻部分之间相互作用的面积比力 $\boldsymbol{t}(P)$（它作用于过 P 点的某个面上）为：

$$\boldsymbol{t}(P)=\lim_{\substack{n\to\infty \\ S_n\to 0}}\frac{\boldsymbol{F}_n}{S_n} \tag{1·2·3}$$

式中

$$S_n\subset S_{n-1},\ P\in S_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

质点，密度与比力都是连续介质力学分析的基础。关于面力和体力，在第三章还将进一步讨论。

§1·3 连维介质运动具有的点-点变换的性质

实际粒子结构的物质原型，在运动（包括变形）前的一个粒子，总对应着运动后的一个粒子，反之也是，即运动前后粒子间是一一对应的。但由于物质原型的粒子不充满它占有的整个空间 V_0，即 V_0 内并不是每个点上都有粒子占据，如 V_0 内某点 P 有一个粒子 M，另一点 Q 没有粒子，那么运动后物质占有的空间从 V_0 变到了 V，作为一种空间变换，这时相应地有 P 变到了 $\bar{P}$，Q 变到了 $\bar{Q}$，而 $\bar{P}$ 处不一定有粒子占据，$\bar{Q}$ 处也不一定没有粒子，粒子 M 可能到了 V 内 $\bar{P}$，$\bar{Q}$ 之外的某点，因此无法建立运动前后两个区域 V_0 与 V 内点-点间与物质粒子间对应的联系。尽管 V_0 变到 V 可能发生了伸缩、变形，但它们间点-点对应关系还是单值连续的，可以运用连续函数表示。对于已经从实际粒子结构理想化了的连续介质模型来说，这时，不但任何一个质点都占有空间一个点，而且反过来，连续介质所占空间中的任一点也一定有物质占据，于是，运动前后的两个空间区域 V_0 与 V 中，点与点的一一对应关系，与连续介质质点的一一对应可以一致起来，从而连续介质的运动可由不同空间区域内点到点的变换来描述，由此还可以进一步指明下列性质：

设连续体运动前，某一质点 P 的坐标为 $\mathbf{X}$，运动后变到了 $\bar{P}$，它的坐标为 $\mathbf{x}$，如图 1·1 所示。图中的坐标系 $X_1X_2X_3$ 是随动坐标系，即跟随质点运动的坐标系，在此坐标系中，质点坐标不随时间变化，图中的坐标系 $x_1x_2x_3$ 是固定在空间的坐标系，在这坐标系中，质点的坐标是时间 t 的函数。

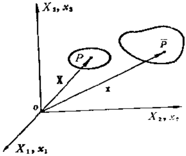

图 1·1

V_0 内任一点 $\mathbf{X}$ 处都有质点占据，V_0 变到 V 时，$\mathbf{X}$ 变到了 $\mathbf{x}$，占据 $\mathbf{X}$ 的质点运动到了 $\mathbf{x}$，反之，V 内任一点 $\mathbf{x}$ 处也都有质点，它是原来位于 V_0 内 $\mathbf{X}$ 处的质点运动过来的。这种一一对应关系，要求：

(1) 与质点有关的任何物理量都必须是坐标的单值连续可微函数。

(2) V_0 与 V 内点-点间的变换必须满足

$$J \equiv \left|\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} > 0 \qquad (1\cdot3\cdot1)$$

这里 J 是雅可比行列式，它代表的几何和物理的含意可由下面看出：运动前的体元 dV_0 在运动后变完成 dV，它们间的关系为

$$dV = dx_1dx_2dx_3 = J\,dV_0 = J\,dX_1dX_2dX_3 \qquad (1\cdot3\cdot2)$$

而运动前的密度 ρ_0 变到了运动后的密度 ρ，它们间的关系满足质量守恒：

$$dm = \rho_0 dV_0 = \rho dV = \rho J dV_0, \qquad (1\cdot3\cdot3)$$

所以

$$\frac{\rho_0}{\rho}=J \tag{1·3·3}$$

由于密度总是正数，故 J 也一定是正数，所以这种变换是正常的（也叫正规的，即右手系仍变为右手系）。

由此可知，连续介质的运动既然必须是点与点一一对应，因此：

(1) 运动前域内的任一点，在运动后不会扩大成为有限体积，因为任何有限体积内都有无限多个点。

(2) 反之运动前的任何有限体积，在运动后也不可能压缩为一个点。

关于雅可比行列式可详见附录 §C·2，而 §1·2 和 §1·3 只是连续介质力学一些基本概念的介绍，关于运动和变形的几何及力的分析可详见第二章和第三章。

第二章　连续介质的变形和运动

§2·1　引　　言

物体$\mathscr{B}$被简化为连续介质后，就可以对它的变形和运动从几何上进行描述。这里先不考虑引起连续体变形和运动的动力学因素，所以这是纯几何或运动学性质的问题。

在连续介质力学中，可以把连续体的一个微小部分（体元）$\mathscr{X}$称为质点，而把整个连续体叫做物体，即

$$\mathscr{X}\subset\mathscr{B}$$

因此连续介质力学中所说的质点，是连续体中的物质点。

物体$\mathscr{B}$的体积 V 及其周界面 S，由于变形和运动而随时间 t 变化，在某一时刻 t，连续体在几何空间占有某一区域 B

$$B\in E^3$$

E^3 代表三维欧氏空间。质点$\mathscr{X}$在区域 B 中所占的位置就看作几何点 $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}\in B$$

设以 I 代表变形或运动的时间间隔

$$t\in I$$

则有

$$\mathscr{X}=\theta(\mathbf{x},t) \tag{2·1·1}$$

$$\mathbf{x}=\Theta(\mathscr{X},t) \tag{2·1·2}$$

θ 和 Θ 互为反函数。

这种处理办法简化了实际物质的粒子性质，一系列实践已经证实这种简化是足够精确的。

本章着重讨论变形和运动，并介绍随体导数、传运公式等基本内容。其中 §2·6 关于形变梯度的内容，对一时尚不准备分析有限变形的读者，可以推迟学习，初学者也可以先不看。§2·9 和 §2·10 关于简单流场的例子，则是为讨论第七章流体力学内容作准备的。

§2·2　拉格朗日坐标和欧拉坐标

2.2.1　描述连续介质运动的两种方法

物体的变形和运动是绝对的，但对物体运动的认识和描述只能是相对的，只能从一定的参考坐标系来描述。

拉格朗日描述

物体是质点的集合，简称为质点系。每个质点可用一大写矢量 $\mathbf{X}$ 或其分量 X_I 来识别和标记。最简单的是选该质点的初始位置为 X_I，称为拉格朗日坐标，也叫物质坐标或随

体坐标。不同质点有不同的物质坐标，不同的物质坐标代表着不同的质点。

如把物体开始变形和运动的时刻称为初始时刻，那么拉格朗日坐标就是变形和运动开始之前质点的坐标，所以拉格朗日坐标具有原位（原时）的特点。

以拉格朗日坐标作为自变量，把各个物理量表示为拉格朗日坐标的函数，并研究这些函数变化的规律，这就叫拉格朗日描述。

欧拉描述

质点 X_i 因物体变形和运动，不同时刻将占据空间不同位置。用小写的矢量 $\mathbf{x}$ 或其分量 x_i 来表示这空间位置。称之为欧拉坐标，也叫空间坐标。所以欧拉坐标表示的是变形和运动过程之中质点的坐标，因此具有现位（即时）的特点。

以欧拉坐标作为自变量，把各物理量表示为欧拉坐标 x_i 和时间 t 的函数来研究它们变化规律的，就叫欧拉描述。

两种坐标的关系

同一时刻，不同质点占据空间的不同位置，反之，不同位置（由连续性假设）都有不同质点占据。因此，拉格朗日坐标和欧拉坐标之间有确定的对应关系：

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},\ t),\ \ X_i=X_i(x_1,x_2,x_3,t) \\ &\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t),\ \ x_i=x_i(X_1,X_2,X_3,t) \end{aligned} \tag{2·2·1}$$

前式表示在时刻 t 位于空间位置 $\mathbf{x}$ 处的是那一个质点，后式表示在时刻 t 质点 $\mathbf{X}$ 占据着空间的那一位置。连续介质力学认为，这种坐标变换是连续和一一对应的，即变形和运动之前的邻域，在变形和运动过程中仍保持为邻域，对每个时刻 t，一个质点 $\mathbf{X}$ 只对应一个位置 $\mathbf{x}$，一个位置 $\mathbf{x}$ 也只有一个质点 $\mathbf{X}$ 占据，所以 $\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ 和 $\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ 都是单值连续函数，两者互为反函数。

以后一律取 $t=0$ 时质点的空间坐标为物质坐标，即

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},0),\ \ X_i=X_i(x_1,x_2,x_3,0) \tag{2·2·2}$$

由于固体变形前各质点有明确的位置，因此固体力学一般都采用拉格朗日坐标，但流体要以变形和运动之前质点的位置作为参考坐标就很不方便，因此流体力学中一般都采用欧拉坐标。

2·2·2 质点的位移

不同质点的位移一般不同，形成位移场。以 u_i 代表质点 X_i 的位移，（见图 2·1），显然

$$\begin{aligned} &\text{E:}\quad u_i(x_1,x_2,x_3,t)=x_i-X_i(x_1,x_2,x_3,t) \\ &\text{L:}\quad u_i(X_1,X_2,X_3,t)=x_i(X_1,X_2,X_3,t)-X_i \end{aligned} \tag{2·2·3a,b}$$

即

$$\begin{aligned} &\text{E:}\quad X_i(x_1,x_2,x_3,t)=x_i-u_i(x_1,x_2,x_3,t) \\ &\text{L:}\quad x_i(X_1,X_2,X_3,t)=X_i+u_i(X_1,X_2,X_3,t) \end{aligned} \tag{2·2·4a,b}$$

式中 $i=1,2,3$，所以上面每个式子都代表着 3 个方程。u_i 是 X_i 在时刻 t 相对于 $t=0$ 时

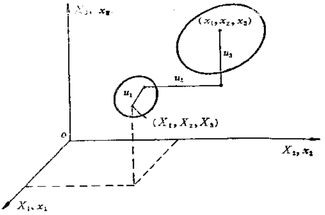

图 2•1

的位移。各式左侧的 E，L 分别代表欧氏描述和拉氏描述(以下均同)。由于研究变形的几何性质时总是在固定瞬时 t 进行分析，因此 t 只是一个参数，为简单起见，可将 t 略去。

§2•3 均匀变形

所谓均匀变形是指物体中取任意两个相同的平行六面体，其变形都相同，也就是说物体内各点的变形都一样。在 §2.4 讲过应变张量之后，可以说，均匀变形时物体各点的应变张量相同，即应变张量的各分量都不是点的坐标的函数，也就是常应变张量场。

因此，每个质点在变形前后的坐标间有如下的线性代数变换关系

$$x_i = A_{ij}X_j, \quad X_j = A_{ij}^{-1}x_i \tag{2•3•1}$$

均匀变形情况下 A_{ij} 为常数。

如果在物体中任取一微小正六面体，那么均匀变形后它将变成微小平行六面体（见图 2•2）。变形前的两个平行平面：

$$C_iX_i = D_1, \quad C_iX_i = D_2$$

（式中 i 是哑指标 C_i，D_1，D_2 都是常数），在均匀变形后，分别变为

$$E_jx_j = D_1, \quad E_jx_j = D_2$$

式中

$$E_j = C_iA^{-1}{}_{ij}$$

E_j 为常数。这说明均匀变形后原来平行的两个平面仍是平行平面。

数学上总可以把 A_{ij} 分解为两部分，即从 A_{ij} 中分出一个 δ_{ij}，剩下部分记为 B_{ij}：

$$A_{ij} = \delta_{ij} + (A_{ij} - \delta_{ij}) = \delta_{ij} + B_{ij}$$

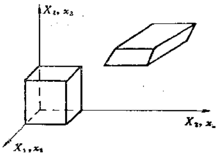

图 2•2

于是 (2·3·1) 式变成

$$(\delta_{ij}+B_{ij})X_j=x_i \tag{2·3·2}$$

与 (2·2·5) 式比较，可知

$$B_{ij}X_j=u_i \tag{2·3·3}$$

均匀变形是一种经常遇到的重要基本变形，在研究一点邻域的变形时需要用到这个概念。它使直线仍变为直线，但可伸缩，它使平面仍变为平面，原来平行的平面仍保持平行，但线段间的夹角可以改变。

§2·4 应变张量、应变张量的不变量

物体不论何种变形形态，都有一个共同点，就是质点间距离改变，所以可用质点间距离的变化来度量变形。

试考察物体在两个时刻的位置，一是初始时刻，这时拉格朗日和欧拉坐标重合，另一个是给定时刻，例如变形结束时。由于时间给定了，因此 t 不再是变量，于是，取笛卡尔坐标时

$$\begin{aligned} X_i&=X_i(x_1,x_2,x_3)\\ x_i&=x_i(X_1,X_2,X_3)\end{aligned} \tag{2·4·1}$$

考虑初始时物体内相邻的两个质点 $P(\mathbf{X})$ 和 $Q(\mathbf{X}+d\mathbf{X})$，这两点间的距离（即线段 $\overline{PQ}$ 的长度）用 ds_0 表示，在时刻 t，$P(\mathbf{X})$ 变到了 $P'(\mathbf{x})$，$Q(\mathbf{X}+d\mathbf{X})$ 变到了 $Q'(\mathbf{x}+d\mathbf{x})$ P' 和 Q' 两点间的距离（即线段 $\overline{P'Q'}$ 的长度）用 ds 表示（见图 2·3）。下面分别用拉格朗日坐标和欧拉坐标来描述变形。

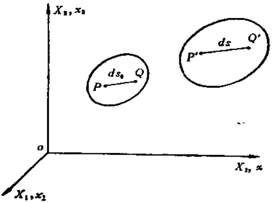

图 2·3

2·4·1 拉格朗日应变张量和欧拉应变张量拉格朗日应变张量也叫格林应变张量。

由 (2·4·1) 式和 (2·2·3) — (2·2·5) 式可得

$$\begin{aligned} &\text{L:}\quad x_i(X_1,X_2,X_3)=X_i+u_i(X_1,X_2,X_3)\\ &\text{E:}\quad X_i(x_1,x_2,x_3)=x_i-u_i(x_1,x_2,x_3)\end{aligned} \tag{2·4·1a·b}$$

设这些函数连续可微，则有

L:
$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = \frac{\partial}{\partial X_j}(X_i + u_i) dX_j = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right) dX_j$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \tag{2·4·2a}$$

E:
$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i - u_i) dx_j = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) dx_j$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2·4·2b}$$

所以

$$ds^2 \equiv (ds)^2 = dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j$$

$$= \delta_{ij}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_k\right)\left(\frac{\partial x_j}{\partial X_l} dX_l\right) = \frac{\partial x_i}{\partial X_k}\frac{\partial x_i}{\partial X_l} dX_k dX_l \tag{2·4·3a}$$

$$ds_0^2 \equiv (ds_0)^2 = dX_i dX_i = \delta_{ij} dX_i dX_j$$

$$= \delta_{ij}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k\right)\left(\frac{\partial X_j}{\partial x_l} dx_l\right) = \frac{\partial X_i}{\partial x_k}\frac{\partial X_i}{\partial x_l} dx_k dx_l \tag{2·4·3b}$$

为明显对比和区别两种描述，可将下标也分为大写和小写，但一般无需对比时仍一律用小写。

于是

L:
$$ds^2 - ds_0^2 = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_K}\frac{\partial x_i}{\partial X_L} - \delta_{KL}\right) dX_K dX_L$$

$$= \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_I}\frac{\partial x_k}{\partial X_J} - \delta_{IJ}\right) dX_I dX_J \tag{2·4·4a}$$

E:
$$ds^2 - ds_0^2 = \left(\delta_{kl} - \frac{\partial X_I}{\partial x_k}\frac{\partial X_I}{\partial x_l}\right) dx_k dx_l$$

$$= \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_K}{\partial x_i}\frac{\partial X_K}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j \tag{2·4·4b}$$

现在定义

L: $\quad ds^2 - ds_0^2 = 2\xi_{IJ} dX_I dX_J$

E: $\quad ds^2 - ds_0^2 = 2\eta_{ij} dx_i dx_j$ $\qquad$ (2·4·5a,b)

即令

$$\xi_{IJ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_I}\frac{\partial x_k}{\partial X_J} - \delta_{IJ}\right)$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_K}{\partial x_i}\frac{\partial X_K}{\partial x_j}\right) \tag{2·4·5c,d}$$

将（2·4·2a）式代入（2·4·5c）式，得

$$\xi_{IJ}=\frac{1}{2}\left[\left(\delta_{KI}+\frac{\partial u_K}{\partial X_I}\right)\left(\delta_{KJ}+\frac{\partial u_K}{\partial X_J}\right)-\delta_{IJ}\right]=\frac{1}{2}(u_{J,I}+u_{I,J}+u_{K,I}u_{K,J}) \tag{2·4·6a}$$

同理，将（2·4·2b）式代入（2·4·5d）式，得

$$\eta_{ij}=\frac{1}{2}\left[\delta_{ij}-\left(\delta_{ki}-\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(\delta_{kj}-\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\right]=\frac{1}{2}(u_{j,i}+u_{i,j}-u_{k,i}u_{k,j}) \tag{2·4·6b}$$

由（2·4·5a,b）可知，因为（$ds^2-ds_0^2$）是标量，dX_IdX_J 和 dx_idx_j 都是二阶张量，因此，根据商法则，可以判断 ξ_{IJ} 和 η_{ij} 都是二阶张量。

ξ_{IJ} 叫格林有限应变张量。η_{ij} 叫阿尔曼希（Almansi）有限应变张量。

可以把 ξ_{IJ} 和 η_{ij} 分别分解为线性和非线性两部分，即：

L: $$\xi_{IJ}=\epsilon_{IJ}+\frac{1}{2}u_{K,I}u_{K,J} \tag{2·4·7a}$$

E: $$\eta_{ij}=\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j} \tag{2·4·7b}$$

其中线性部分为

$$\epsilon_{IJ}=\frac{1}{2}(u_{J,I}+u_{I,J}) \tag{2·4·7c}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{2·4·7d}$$

交换下标即可知

$$\xi_{JI}=\xi_{IJ},\quad \epsilon_{JI}=\epsilon_{IJ}$$

$$\eta_{ji}=\eta_{ij},\quad \varepsilon_{ji}=\varepsilon_{ij}$$

以小写希腊字母 ξ 表示分量为 ξ_{IJ} 的二阶张量，$\boldsymbol{\eta}$ 表示分量为 η_{ij} 的二阶张量，$\boldsymbol{\epsilon}$ 表示其分量为 ϵ_{IJ} 的二阶张量，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示分量为 ε_{ij} 的二阶张量，则有

$$\boldsymbol{\xi}^T=\boldsymbol{\xi},\quad \boldsymbol{\epsilon}^T=\boldsymbol{\epsilon},\quad \boldsymbol{\eta}^T=\boldsymbol{\eta},\quad \boldsymbol{\varepsilon}^T=\boldsymbol{\varepsilon}$$

因此它们全都是二阶对称张量，并非只有线性部分才是对称张量。

应变张量的对称性纯粹是一个几何结论，在得出这一结论的过程中，并未要求小变形，更未涉及应力张量。

如果物体无变形，只有刚性运动，则 $ds=ds_0$，因此，这时 ξ_{IJ} 和η_{ij} 全都为零。

2.4.2 沿坐标轴的线元的伸长率

设变形前沿 X_1 的线元

$$d\mathbf{X}_1(dX_1,0,0)=d\mathbf{X}(ds_0,0,0)$$

变形后其长度为 ds，则该线元的伸长率（即相对伸缩）为

L: $$\epsilon_{11}=\frac{ds-ds_0}{ds_0}$$

反之，若取变形后沿 x_1 的线元

$$d\mathbf{x}(dx_1,0,0)=d\mathbf{x}(ds,0,0)$$

设此线元变形之前的长度为 ds_0，则该线元的伸长率为

E: $$\varepsilon_{11}=\frac{ds-ds_0}{ds}$$

所以

L: $$ds=(1+\epsilon_{11})ds_0$$

E: $$ds_0=(1-\varepsilon_{11})ds \qquad (2\cdot4\cdot8a\cdot b)$$

于是

L: $$ds^2-ds_0^2=[(1+\epsilon_{11})^2-1]ds_0^2$$

E: $$ds^2-ds_0^2=[1-(1-\varepsilon_{11})^2]ds^2$$

与 $(2\cdot4\cdot5a,b)$ 比较可知

L: $$(1+\epsilon_{11})^2-1=2\xi_{11}$$

即 $$\epsilon_{11}=\sqrt{1+2\xi_{11}}-1 \qquad (2\cdot4\cdot9a)$$

E: $$1-(1-\varepsilon_{11})^2=2\eta_{11}$$

即 $$\varepsilon_{11}=1-\sqrt{1-2\eta_{11}} \qquad (2\cdot4\cdot9b)$$

同理

L: $$\epsilon_{22}=\sqrt{1+2\xi_{22}}-1$$

$$\epsilon_{33}=\sqrt{1+2\xi_{33}}-1$$

E: $$\varepsilon_{22}=1-\sqrt{1-2\eta_{22}}$$

$$\varepsilon_{33}=1-\sqrt{1-2\eta_{33}}$$

2·4·3 沿两个坐标轴的线元间夹角的变化

在拉格朗日描述法中，在变形前的物体上，沿 X_1 和 X_2 各选取线元

$$d\mathbf{X}=d\mathbf{X}(dX_1,0,0),\quad dX_1=ds_0$$

$$d\mathbf{X}'=d\mathbf{X}'(0,dX_2,0),\quad dX_2=ds_0'$$

变形后分别变为 $d\mathbf{x}$ 和 $d\mathbf{x}'$，$d\mathbf{x}$ 的长度记为 ds，$d\mathbf{x}'$ 的长度记为 ds'，$d\mathbf{x}$ 与 $d\mathbf{x}'$ 间的夹角记为 θ。

欧拉描述法是在变形后的物体上，沿 x_1 和 x_2 轴各取线元

$$d\mathbf{x}=d\mathbf{x}(dx_1,0,0),\quad dx_1=ds$$

$$d\mathbf{x}'=d\mathbf{x}'(0,dx_2,0),\quad dx_2=ds'$$

设此两线元是变形前物体上长度分别为 ds_0 和 ds_0' 而夹角为 θ_0 的两线元 $d\mathbf{X}$ 和 $d\mathbf{X}'$ 变来的。于是

E:

$$d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}'=ds\,ds'\cos\theta=dx_k dx_k'=\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}\right)dX_i dX_j'$$

$$=\frac{\partial x_k}{\partial X_1}\frac{\partial x_k}{\partial X_2}ds_0 ds_0' \qquad (2\cdot4\cdot10a)$$

L:

$$d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X}'=ds_0 ds_0'\cos\theta_0=dX_k dX_k'=\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i}dx_i\right)\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_j}dx_j'\right)$$

$$=\frac{\partial X_k}{\partial x_1}\frac{\partial X_k}{\partial x_2}ds\,ds' \qquad (2\cdot4\cdot10b)$$

由（$2\cdot4\cdot5c,d$）式可知

L:
$$\frac{\partial X_k}{\partial X_1}\frac{\partial x_k}{\partial X_2}=2\xi_{12}$$

E:
$$\frac{\partial X_k}{\partial x_1}\frac{\partial X_k}{\partial x_2}=-2\eta_{12}$$

所以（$2\cdot4\cdot10a,b$）式可分别写为

$$ds\,ds'\cos\theta=2\xi_{12}ds_0 ds_0'$$

$$ds_0 ds_0'\cos\theta_0=-2\eta_{12}ds\,ds'$$

将（$2\cdot4\cdot8a,b$）式和（$2\cdot4\cdot9a,b$）式代入，则

$$(\sqrt{1+2\xi_{11}}\,ds_0)(\sqrt{1+2\xi_{22}}\,ds_0')\cos\theta=2\xi_{12}ds_0 ds_0'$$

$$(\sqrt{1-2\eta_{11}}\,ds)(\sqrt{1-2\eta_{22}}\,ds')\cos\theta_0=-2\eta_{12}ds\,ds'$$

所以

$$\cos\theta=\frac{2\xi_{12}}{\sqrt{1+2\xi_{11}}\sqrt{1+2\xi_{22}}}$$

$$(2\cdot4\cdot11a,b)$$

$$\cos\theta_0=\frac{-2\eta_{12}}{\sqrt{1-2\eta_{11}}\sqrt{1-2\eta_{22}}}$$

以 γ'_{12} 代表 dX_1 与 dX_2 原来的夹角（90°）在变形后的变化，以 γ_{12} 代表 dx_1 与 dx_2 的夹角（90°）与它们变形之前的对应两线元夹角的变化，即

$$\gamma_{12}'=\frac{\pi}{2}-\theta,\quad \gamma_{12}=\theta_0-\frac{\pi}{2}$$

于是，取正弦可得

$$\sin\gamma_{12}'=\cos\theta=\frac{2\xi_{12}}{\sqrt{1+2\xi_{11}}\sqrt{1+2\xi_{22}}}$$

$$(2\cdot4\cdot11c,d)$$

$$\sin\gamma_{12}=-\cos\theta_0=\frac{2\eta_{12}}{\sqrt{1-2\eta_{11}}\sqrt{1-2\eta_{22}}}$$

推导以上各式时都未用过小变形的要求。

2·4·4 小变形

因坐标变化引起的位移变化，即位移对坐标的一阶偏导数 $u_{i,j}$，叫位移梯度。

如果对所有的 i, j，都有$|u_{i,j}|\ll 1$，从而可以忽略其平方项和乘积项以及二阶以上的偏导数，这时，线元的伸长率和两线元之间夹角的变化（即线元的旋转）都很小，故称为小变形。

在小变形时两种描述方法没有差别。因为

$$x_i = X_i + u_i$$

所以

$$\frac{\partial u_k}{\partial X_j} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial X_j}(X_i + u_i) = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right)$$

$$= \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial X_j}\right) \approx \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \qquad (2\cdot4\cdot12)$$

同时，因略去二阶小量，所以

$$\xi_{IJ} \approx \epsilon_{IJ} \qquad \eta_{ij} \approx \varepsilon_{ij}$$

并且，由（2·4·12）式可知，小变形时

$$\xi_{IJ} \approx \eta_{ij} \approx \epsilon_{IJ} \approx \varepsilon_{ij} \qquad (2\cdot4\cdot13)$$

将（2·4·9a·b）式用二项式展开，保留一次项，得

$$\epsilon_{11} = \xi_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}, \quad \varepsilon_{11} = \eta_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

并且

$$\epsilon_{11} = \varepsilon_{11} = \xi_{11} = \eta_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \qquad (2\cdot4\cdot14)$$

同理

$$\epsilon_{22} = \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2}$$

$$\epsilon_{33} = \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3}$$

同时，因

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \ll 1, \quad \eta_{11} \ll 1, \quad \eta_{22} \ll 1, \quad \gamma_{12} \ll 1$$

所以由（2·4·11d）式

$$\gamma_{12} \approx 2\eta_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \qquad (2\cdot4\cdot15)$$

因此

$$\eta_{12} \approx \frac{1}{2}\gamma_{12}$$

类似地