

计算数学讲义(四)

偏微分方程数值解法

南京大学数学系计算数学专业 编

科学出版社

中国数学进展 (四)

偏微分方程数值解法

傅闻达 傅圣平 傅圣毅 傅圣武 编

科学出版社

计算数学讲义(四)

偏微分方程数值解法

南京大学数学系计算数学专业 编

科 学 出 版 社

1 9 7 9

内 容 简 介

本书共分八章：第一、二、三章分别讨论了抛物型、双曲型、椭圆型三类方程的差分解法，第四章介绍了变分方法，第五章讨论常微分方程和偏微分方程的有限元方法，第六章讨论构造高精度差分格式的 Hermite 方法，第七章讨论解 Poisson 方程的直接方法，第八章介绍直线法。

本书可作为大学计算数学专业教材，亦可供科技工作者参考。

计算数学讲义(四) 偏微分方程数值解法

南京大学数学系计算数学专业 编

*
科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1979 年 6 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1979 年 6 月第一次印刷 印张：13 1/4

印数：0001—58,160 字数：304,000

统一书号：13031·919

本社书号：1303·13—1

定 价： 1.35 元

说 明

一、这一套《计算数学讲义》是在我专业过去所编教材的基础上修改补充而成的。

二、这套讲义共分下列九册：

- (一) 数值逼近方法；
- (二) 线性代数计算方法；
- (三) 常微分方程数值解法；
- (四) 偏微分方程数值解法；
- (五) 最优化方法；
- (六) 概率统计基础和概率统计方法；

数学基础之一：线性代数；

数学基础之二：常微分方程；

数学基础之三：偏微分方程；

三、这套讲义可作为综合性大学理科计算数学专业教材，也可供利用电子计算机从事科学计算的科技人员参考。

四、这套《计算数学讲义》的主编是何旭初同志。

讲义各册由我专业有关同志分工负责。

这册《偏微分方程数值解法》的编写者为苏煜城、吴启光同志。

五、由于理论水平和实践经验有限，讲义中的缺点和错误在所难免，我们衷心盼望读者提出宝贵意见，以便进一步修改。

南京大学数学系计算数学专业

1978年7月

• i •

目 录

第一章 抛物型方程的差分解法	1
§ 1. 差分格式的建立	2
§ 2. 热传导方程混合问题的差分方法	16
§ 3. 热传导方程初值问题差分解法	65
§ 4. 半显式格式	70
§ 5. 二维热传导方程的交替方向隐式方法	75
§ 6. 二阶线性抛物型方程解法	83
§ 7. 其他格式	88
§ 8. 拟线性抛物型方程的预测——校正方法	93
第二章 双曲型方程和双曲型方程组的解法	96
§ 1. 双曲型方程混合问题的差分解法	96
§ 2. 双曲型方程初值问题的差分解法	129
§ 3. 交替方向法	135
§ 4. 一阶偏微分方程的差分方法	141
§ 5. 线性双曲型方程组的差分解法	146
§ 6. 拟线性双曲型方程组的差分方法	159
§ 7. 拟线性双曲型方程组的特征线法	165
第三章 解椭圆型方程的差分方法	171
§ 1. 解 Laplace 方程第一边值问题的差分方法	171
§ 2. 迭代法及其收敛性	181
§ 3. 逐次超松弛迭代法 (SOR 方法)	185
§ 4. 块迭代法	213
§ 5. 对称逐次超松弛方法 (SSOR 方法)	216

§ 6. 一般二阶椭圆型方程边值问题的差分方法	228
第四章 变分方法	240
§ 1. 基本概念	240
§ 2. 与常微分方程边值问题等价的变分问题	251
§ 3. 关于泛函 $I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx$ 的极值问题	260
§ 4. 和椭圆型方程相联系的变分问题	262
§ 5. Ritz 方法	273
§ 6. Галёркин 方法简介	291
第五章 有限元方法	293
§ 1. 常微分方程边值问题的有限元方法	293
§ 2. 椭圆型方程边值问题的有限元方法	304
§ 3. 抛物型方程混合问题的有限元方法	317
§ 4. 双曲型方程混合问题的有限元方法	320
第六章 Hermite 方法	322
§ 1. Hermite 方法的基本公式	322
§ 2. 利用 Hermite 公式解一个常微分方程边值问题	325
§ 3. 偏微分方程的 Hermite 方法	327
§ 4. 热传导方程初值问题差分格式的稳定性	337
§ 5. 波动方程初值问题差分格式的稳定性	340
第七章 解 Poisson 方程的直接方法	344
§ 1. 引言	344
§ 2. 离散域上的 Fourier 变换和快速 Fourier 变换	344
§ 3. 矩阵分解法	360
§ 4. 块循环约简法	364
§ 5. 应用	371
§ 6. CORF 算法的精度分析	380
§ 7. Buneman 方法及其变形	383

§ 8. 应用 Buneman 方法解 Poisson 方程	386
§ 9. Buneman 方法的精度分析	389
第八章 直线法	392
§ 1. 直线法的基本思想	392
§ 2. 解 Poisson 方程 Dirichlet 问题的直线法	394
§ 3. 解弦振动方程混合问题的直线法	402
§ 4. 解热传导方程混合问题的直线法	409
参考文献	418

第一章 抛物型方程的差分解法

大家知道,在研究热传导现象或气体扩散现象时,得到二阶抛物型偏微分方程. 对此类型方程可提出初值问题和混合问题. 我们着重研究最简单的一维热传导方程的差分解法,也提到多维情形、一般线性抛物型方程和拟线性方程.

初值问题

在区域 $Q: \{-\infty < x < +\infty, t \geq 0\}$ 内求函数 $u(x, t)$ 满足方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0, \quad (1)$$

及初始条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2)$$

其中 L 表示微分算子 $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\varphi(x)$ 是给定的初始函数.

混合问题

对于方程 (1) 可提第一、第二、第三边值问题, 由于第二边界条件在数学上只是第三边界条件的特殊情形, 因此我们只研究第一和第三边值问题.

1) 第一边值问题

在区域 $R: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ 内求函数 $u(x, t)$ 满足方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

及初始条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

边界条件

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(1, t) = \mu_2(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

并且 $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(1) = \mu_2(0)$, 其中 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ 是给定的函数.

2) 第三边值问题

在区域 $R: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ 内求函数 $u(x, t)$ 满足方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

及初始条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

边界条件

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda_1(t) u \right) \Big|_{x=0} = v_1(t), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2(t) u \right) \Big|_{x=1} = v_2(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

其中 $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ 是给定的函数, $\lambda_1(t) \geq 0$, $\lambda_2(t) \geq 0$.

现就以上典型问题研究其差分解法.

§ 1. 差分模式的建立

假设 $h = \Delta x$, $\tau = \Delta t$ 分别是自变量 x , t 的改变量, 如由此由 $x_k = kh$, $t_j = j\tau$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 两组平行线构成的长方形网格覆盖了整个 $x-t$ 平面, h 称为沿 x 方向的步长, τ 称为沿 t 方向的步长, 网格线的交点称为网格的结点. 对初值问题来说其网格是

$$\begin{cases} t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, m_0; m_0 = \left\lfloor \frac{T}{\tau} \right\rfloor, \\ x_k = kh, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

其中 m_0 是 T/τ 的最大整数部分, 即

$$m_0\tau \leq T < (m_0 + 1)\tau.$$

在 $t = 0$ 上的结点称为边界结点, 其余所有属于 $\{-\infty < x < +\infty, 0 < t \leq T\}$ 内的结点称为内部结点.

对于边值问题来说, 其网格是

$$\begin{cases} t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, m_0; m_0 = \left\lfloor \frac{T}{\tau} \right\rfloor, \\ x_k = kh, k = 0, 1, 2, \dots, N; Nh = 1. \end{cases}$$

在 $t = 0, x = 0, x = 1$ 上的结点称为边界结点, 其余所有属于 $\{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ 内的结点称为内部结点.

差分方法就是在网格的结点上求出微分方程解的近似值, 因此这一方法又名网格法.

为方便起见, 将网格点 (x_k, t_j) 简记为 (k, j) . 在点 (k, j) 我们列出以后常用的一些公式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{(k, j)} &= \frac{u(k+1, j) - 2u(k, j) + u(k-1, j)}{h^2} \\ &\quad - \frac{h^2}{12} u_{xxxx}^{(4)}(\tilde{x}, j), \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$|\tilde{x} - x_k| \leq h.$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(k, j)} = \frac{u(k, j+1) - u(k, j)}{\tau} - \frac{\tau}{2} u''_{tz}(k, \tilde{t}), \quad (6)$$

$$|\tilde{t} - t_j| \leq \tau.$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(k, j)} = \frac{u(k, j) - u(k, j-1)}{\tau} - \frac{\tau}{2} u''_{tz}(k, \tilde{t}), \quad (7)$$

$$|\tilde{t} - t_{j-1}| \leq \tau.$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(k,j)} = \frac{u\left(k, j + \frac{1}{2}\right) - u\left(k, j - \frac{1}{2}\right)}{\tau} - \frac{\tau^2}{24} u_{tj}^{(3)}(k, t'), \quad (8)$$

$$|t' - t_{j-\frac{1}{2}}| \leq \tau/2.$$

公式(5)右端第一项是 $u(x, t)$ 关于自变量 x 的二阶中心差商, 公式(6), (7), (8)的右端第一项分别是 $u(x, t)$ 关于自变量 t 的向前差商、向后差商和中心差商。

• 现在用以下符号表示 $u(x, t)$ 关于自变量 x 的差商:

一阶向前差商

$$(\Delta_x u)_{(k,j)} = [u(k+1, j) - u(k, j)]/h,$$

一阶向后差商

$$(\Delta_{\bar{x}} u)_{(k,j)} = [u(k, j) - u(k-1, j)]/h,$$

一阶中心差商

$$(\delta_x u)_{(k,j)} = \left[u\left(k + \frac{1}{2}, j\right) - u\left(k - \frac{1}{2}, j\right) \right] / h,$$

二阶中心差商

$$(\delta_x^2 u)_{(k,j)} = [u(k+1, j) - 2u(k, j) + u(k-1, j)]/h^2,$$

或

$$(\Delta_{x\bar{x}} u)_{(k,j)} = [u(k+1, j) - 2u(k, j) + u(k-1, j)]/h^2.$$

同样, 关于自变量 t 的差商亦作类似表示。

1.1. 显式格式(格式 I) 利用 $u(x, t)$ 关于 t 的向前差商, 关于 x 的二阶中心差商, 即利用公式(5)和(6), 在点 (k, j) 我们有

$$\begin{aligned} (Lu)_{(k,j)} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{(k,j)} = \frac{u(k, j+1) - u(k, j)}{\tau} \\ &\quad - \frac{u(k+1, j) - 2u(k, j) + u(k-1, j)}{h^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{12} h^2 u_{x^4}^{(4)}(\tilde{x}, j) - \frac{\tau}{2} u_{t^2}''(k, i).$$

设

$$L_{h,\tau}^{(1)} u(k, j) = \frac{u(k, j+1) - u(k, j)}{\tau} - \frac{u(k+1, j) - 2u(k, j) + u(k-1, j)}{h^2}, \quad (9)$$

$$R_{h,\tau}^{(1)} = \frac{h^2}{12} u_{x^4}^{(4)}(\tilde{x}, j) - \frac{\tau}{2} u_{t^2}''(k, i), \quad (10)$$

则上式可改写为

$$(Lu)_{(k,i)} = L_{h,\tau}^{(1)} u(k, j) + R_{h,\tau}^{(1)},$$

其中 $L_{h,\tau}^{(1)}$ 表示差分算子, $R_{h,\tau}^{(1)}$ 表示在点 (k, j) 以 $L_{h,\tau}^{(1)}$ 逼近 Lu 的截断误差. 由表达式 (10) 看出, 若 u_{x^4} , u_{t^2} 在所考虑的区域保持有界, 则当 $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ 时有

$$R_{h,\tau}^{(1)} = O(\tau + h^2).$$

以后我们总假定 $u(x, t)$ 具有我们所需要的有界偏导数. 因为在内部结点 (k, j) 上微分方程解 $u(x, t)$ 应满足

$$(Lu)_{(k,i)} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{(k,i)} = 0,$$

故有

$$L_{h,\tau}^{(1)} u(k, j) + R_{h,\tau}^{(1)} = 0.$$

以后我们用 $u_{k,j}$ 表示 $u(k, j)$ 的近似值. 在上式中略去 $R_{h,\tau}^{(1)}$, 则得到方程 (1) 的差分方程

$$L_{h,\tau}^{(1)} u_{k,j} = \frac{u_{k,j+1} - u_{k,j}}{\tau} - \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{h^2} = 0. \quad (11)$$

可简写为

$$\Delta_t u_{k,j} - \delta_x^2 u_{k,j} = 0.$$

设

$$r = \frac{\tau}{h^2}, \quad (12)$$

则差分方程(11)可以改写为

$$u_{k,j+1} = (1 - 2r)u_{k,j} + r(u_{k+1,j} + u_{k-1,j}). \quad (13)$$

这是一组线性代数方程组,由此方程组可知,在 (k, j) 点列方程时,用到 $(k+1, j)$, $(k-1, j)$, $(k, j+1)$ 三个点. 因此这个差分格式可用下图表示:

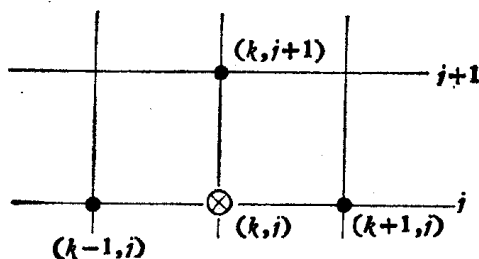


图 1.1

此外,如在第 j 层的值 $u_{k,j}$ 已算得,可根据方程(13)求得第 $j+1$ 层的值. 因此在 $j=0$ 这一层的值给定后即可依次求得以后各层的值,这种差分格式称为显式差分格式.

1.2. 隐式差分格式 (格式 II) 利用 $u(x, t)$ 关于 t 的向后差商公式,由公式(5), (7)在点 (k, j) 有

$$(Lu)_{(k,j)} = L_{h,\tau}^{(2)}u(k, j) + R_{h,\tau}^{(2)}$$

其中

$$L_{h,\tau}^{(2)}u(k, j) = \frac{u(k, j) - u(k, j-1)}{\tau} - \frac{u(k+1, j) - 2u(k, j) + u(k-1, j)}{h^2},$$

$$R_{h,\tau}^{(2)} = \frac{\tau}{2} u''_{tt}(k, \bar{t}) + \frac{h^2}{12} u^{(4)}_{xxxx}(\tilde{x}, j) = O(\tau + h^2). \quad (14)$$

因为

$$(Lu)_{(k,j)} = 0,$$

故有

$$L_{h,\tau}^{(2)}u(k,j) + R_{h,\tau}^{(2)} = 0.$$

略去 $R_{h,\tau}^{(2)}$, 则得到差分方程

$$L_{h,\tau}^{(2)}u_{k,j} \equiv \frac{u_{k,j} - u_{k,j-1}}{\tau} - \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{h^2} = 0. \quad (15)$$

可以简写为

$$\Delta_i u_{k,j} - \delta_x^2 u_{k,j} = 0.$$

也可改写为以下形式

$$(1 + 2r)u_{k,j} - ru_{k-1,j} - ru_{k+1,j} = u_{k,j-1}. \quad (15')$$

这也是一组线性代数方程组,但它和方程组(13)不同。当我们已知第 $(j-1)$ 层的 $u_{k,j-1}$ 值以后,要求出第 j 层的值 $u_{k,j}$ 时,必须解一线性代数方程组,这种格式称为隐式差分格式。此外,在点 (k,j) 建立这种格式时,用到 $(k-1,j)$, $(k+1,j)$, $(k,j-1)$ 三点。因此这一格式可用下图表示:

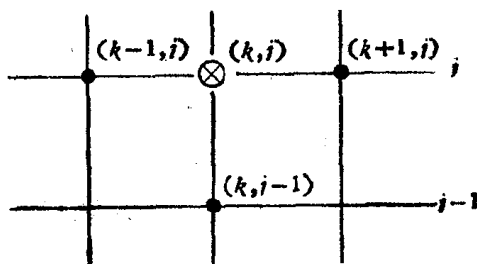


图 1.2

由(14)知道,当 $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ 时差分方程(15)逼近微分方程(1),其截断误差为 $O(\tau + h^2)$ 。

1.3. 六点格式 (Crank-Nicolson) (格式 III) 在点

$(k, j + \frac{1}{2})$ 利用 $u(x, t)$ 关于 t 的中心差商得到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(k, j+\frac{1}{2})} = \frac{u(k, j+1) - u(k, j)}{\tau} + \frac{\tau^2}{24} u_{t^3}^{(3)}(k, \tilde{t}),$$

$$|\tilde{t} - t_{j+\frac{1}{2}}| \leq \tau/2. \quad (16)$$

由 Taylor 公式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k, j+1)} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k, j+\frac{1}{2})} + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)_{(k, j+\frac{1}{2})} \\ &\quad + \frac{\tau^2}{8} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{(k, \eta_1)}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k, j)} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k, j+\frac{1}{2})} - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)_{(k, j+\frac{1}{2})} \\ &\quad + \frac{\tau^2}{8} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{(k, \eta_2)}, \end{aligned}$$

其中

$$\eta_1 = t_{j+\frac{1}{2}} + \theta_1 \frac{\tau}{2}, \quad \eta_2 = t_j - \theta_2 \frac{\tau}{2},$$

$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1,$$

故有

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k, j+\frac{1}{2})} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k, j+1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k, j)} \\ &\quad - \frac{\tau^2}{16} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{(k, \eta_1)} - \frac{\tau^2}{16} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{(k, \eta_2)} \\ &= [u(k+1, j+1) - 2u(k, j+1) \\ &\quad + u(k-1, j+1) + u(k+1, j) \\ &\quad - 2u(k, j) + u(k-1, j)]/2h^2 \\ &\quad - \frac{h^2}{24} u_{x^4}^{(4)}(\tilde{x}, j+1) - \frac{h^2}{24} u_{x^4}^{(4)}(\tilde{x}, j) \\ &\quad - \frac{\tau^2}{16} u_{x^2 t^2}^{(4)}(k, \eta_2) - \frac{\tau^2}{16} u_{x^2 t^2}^{(4)}(k, \eta_1). \quad (17) \end{aligned}$$

由 (17), (16) 得到

$$\begin{aligned}(Lu)_{(k, j+\frac{1}{2})} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{(k, j+\frac{1}{2})} \\ &= L_{h, \tau}^{(3)} u \left(k, j + \frac{1}{2} \right) + R_{h, \tau}^{(3)},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}L_{h, \tau}^{(3)} u \left(k, j + \frac{1}{2} \right) &= \frac{u(k, j+1) - u(k, j)}{\tau} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\frac{u(k+1, j+1) - 2u(k, j+1) + u(k-1, j+1)}{h^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u(k+1, j) - 2u(k, j) + u(k-1, j)}{h^2} \right], \\ R_{h, \tau}^{(3)} &= \frac{h^2}{24} u_{x^4}^{(4)}(\tilde{x}, j+1) + \frac{h^2}{24} u_{x^4}^{(4)}(\tilde{x}, j) \\ &\quad - \frac{\tau^2}{16} u_{x^2 t^2}^{(4)}(k, \eta_1) + \frac{\tau^2}{16} u_{x^2 t^2}^{(4)}(k, \eta_2) \\ &\quad + \frac{\tau^2}{24} u_t^{(3)}(k, \tilde{t}) = O(h^2 + \tau^2).\end{aligned}\quad (18)$$

因为

$$(Lu)_{(k, j+\frac{1}{2})} = 0,$$

所以

$$L_{h, \tau}^{(3)} u \left(k, j + \frac{1}{2} \right) + R_{h, \tau}^{(3)} = 0.$$

略去 $R_{h, \tau}^{(3)}$ 不计, 则得差分方程

$$\begin{aligned}L_{h, \tau}^{(3)} u_{k, j+\frac{1}{2}} &= \frac{u_{k, j+1} - u_{k, j}}{\tau} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\frac{u_{k+1, j+1} - 2u_{k, j+1} + u_{k-1, j+1}}{h^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{k+1, j} - 2u_{k, j} + u_{k-1, j}}{h^2} \right] = 0.\end{aligned}$$