

最优化原理与 微观经济学

王川龙 冯 梅 编著

经济科学出版社

98
F016
32
2/

最优化原理与微观经济学

王川龙 冯 梅 编著

经济科学出版社

一九九七年·北京



C

482600

责任编辑:杜 鹏

责任校对:董蔚挺

封面设计:卜建晨

电脑制作:卜建晨

版式设计:代小卫

技术编辑:舒天安

最优化原理与微观经济学

王川龙 冯 梅 编著

*

经济科学出版社出版、发行 新华书店经销

北京第二外国语学院印刷厂印刷

出版社电话:62541886 发行部电话:62568479

经济科学出版社暨发行部地址 北京海淀区万泉河路 66 号

邮编:100086

*

850×1168 毫米 32 开 7.625 印张 200000 字

1997 年 7 月第一版 1997 年 7 月第一次印刷

印数 0001-2500 册

ISBN 7-5058-1101-0/F·808 定价:11.50 元

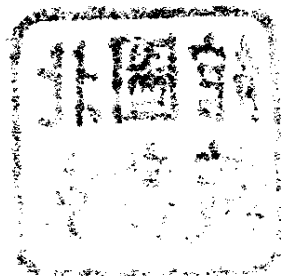
图书在版编目(CIP)数据

最优化原理与微观经济学/王川龙,冯梅编著,-北京:
经济科学出版社,1997.4

ISBN 7-5058-1101-0

I. 最… I. ①王… ②冯… III. 微观经济-最优化-
分析 IV. F224.31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 04675 号



前 言

“做出最合理的规划,选择最佳策略,获得最佳方案”,这是每个人、每个行业所努力寻求的,而这也正是“最优化原理”的基本出发点。因此,它的理论和方法在科学管理、工程技术、社会经济和军事决策等方面起着重要的作用,并已产生巨大的社会和经济效益,掌握这门知识已成为各行业的普遍要求。

随着科学技术的日益发展,尤其是电子计算机的产生和广泛使用,使得最优化理论与方法逐步成为一门独立的学科。然而这种“独立”使得人们主要研究其本身的规律而“无暇”顾及它在其他学科的系统应用。它的许多成果由于数学理论概念太多,阅读困难而难以得到广泛应用。为此,需要在最优化原理及方法与其他学科之间建立相互作用的关系,使其成为一门交叉学科。

到目前为止,经济学家对经济学提出了较为一致的定义:经济学主要研究如何利用和配置稀缺的社会资源进行生产,以及如何把社会产品分配给社会成员以供他们消费的问题。我国已故著名经济学家孙冶方说过:社会主义经济最大的问题就是只讲费用不讲效果,或只讲效果不讲费用,因而他大声疾呼要“用最小的劳动消耗去取得最大的经济效果”。显然,他的话正是经济学的主题所在。即如何充分地、最节约地、最合理地使用这些稀缺资源,为人类谋取福利。这一点同最优化原理的本质完全一致,这就说明了最优化原理与经济学的密切关系。在微观经济学中,研究的对象是消费者和厂商。消费者在有限的收入下追求最大的消费满足(效用),厂商利用有限的资源进行生产,追求利润最大化,这正是消费者、厂商选择最佳消费、生产方式的最优化问题。因此,可以说经济学是

最优化理论及方法发展的一个推动力,最优化理论与方法是解决经济学问题强有力的数学工具。

马克思说过,一种科学只有成功地运用数学时,才算达到真正完善的地步。经济学的三个重要发展阶段也证实了这一点。纯粹的非数理经济是经济学历史上的第一个阶段,第二阶段引入了一些初等的数学方法,并认识到在经济学中应用数学的优越性,用数学语言和平面几何图像来替代一些文字分析。但几何描述有很大的局限性(维数 ≤ 3)。因此,要论证一些基本原理,需要用数学分析的术语和推理来替代初等数学,这就进入了第三个阶段。这也说明学科之间的相互渗透和相互作用是科学技术发展的一个规律,也证实了马克思的预言。

本书共分两篇。第一篇介绍了最优化理论的基本内容:凸集、凸函数、广义凸性、最优性条件、对偶理论及线性与多目标规划的简介。第二篇运用最优化理论较系统地介绍和推导了微观经济学的基本原理,它包括消费者行为、弹性理论、厂商理论、市场均衡、分配原理、一般均衡论及福利经济学基本原理。

本书期望达到的目标有两个:(1)反映最优化理论的应用,使从事该方向的研究人员及学生了解最优化理论在经济学中的重要作用,了解它的应用价值及问题来源背景。(2)对具有微观经济学基本知识的研究人员及学生了解这些基本原理的数学论证,进一步加深对微观经济学的理解和掌握,并从中了解最优化的一般理论与方法,提高解决经济问题的实际能力。为此,本书对微观经济学进行了较系统的阐述。

由于作者水平所限,错漏之处在所难免,恳请读者批评指正。

作 者

一九九六年九月

目 录

第一篇 最优化原理	(1)
第 1 章 凸集与凸函数	(3)
§ 1.1 凸集及基本性质	(3)
§ 1.2 凸函数	(8)
§ 1.3 凸函数微分性质	(15)
§ 1.4 凸函数的极值	(18)
第 2 章 广义凸性	(20)
§ 2.1 拟凸函数	(20)
§ 2.2 伪凸函数	(24)
§ 2.3 不变凸函数	(26)
第 3 章 约束极值的最优性条件	(29)
§ 3.1 极值及 Lagrange 函数	(29)
§ 3.2 一般约束极值的最优性条件	(34)
§ 3.3 凸性规划的最优性条件	(39)
§ 3.4 Lagrange 函数的鞍点	(42)
第 4 章 对偶理论	(46)
§ 4.1 共轭函数	(46)
§ 4.2 对偶凸规划	(48)
§ 4.3 对偶形式	(51)
第 5 章 线性规划与多目标规划	(55)
§ 5.1 线性规划概述	(55)
§ 5.2 单纯形方法	(60)
§ 5.3 对偶线性规划	(64)
§ 5.4 多目标规划简介	(66)
第二篇 微观经济学	(69)

第 6 章	消费者行为理论	(71)
§ 6.1	基数效用论和消费者行为	(71)
§ 6.2	序数效用论和消费者行为	(76)
§ 6.3	需求函数与需求曲线	(87)
§ 6.4	从个人需求曲线到市场需求曲线	(92)
§ 6.5	线性支出系统	(93)
第 7 章	弹性理论	(96)
§ 7.1	需求弹性	(96)
§ 7.2	收入—消费曲线	(101)
§ 7.3	需求收入弹性和交叉弹性	(105)
§ 7.4	效应总论	(107)
§ 7.5	对 n 种商品推广	(114)
§ 7.6	供给弹性	(115)
第 8 章	厂商理论	(117)
§ 8.1	生产函数	(117)
§ 8.2	最优化行为	(118)
§ 8.3	等产量线与技术替代率	(124)
§ 8.4	生产均衡点的几何描述	(127)
§ 8.5	成本函数	(133)
§ 8.6	线性生产函数	(143)
第 9 章	市场均衡	(147)
§ 9.1	完全竞争市场	(147)
§ 9.2	垄断市场	(159)
§ 9.3	垄断竞争市场	(166)
§ 9.4	寡头市场	(169)
第 10 章	分配原理	(175)
§ 10.1	生产要素的需求	(175)
§ 10.2	完全竞争条件下要素价格理论	(176)
§ 10.3	完全竞争条件下的工资、地租、利息和利润	(185)
§ 10.4	非完全竞争条件下要素市场均衡	(190)
§ 10.5	欧拉定理和分配论简述	(195)

第 11 章 市场的一般均衡.....	(198)
§ 11.1 瓦尔拉斯一般均衡模型	(198)
§ 11.2 投入—产出分析	(202)
第 12 章 福利经济理论	(210)
§ 12.1 帕累托最优	(210)
§ 12.2 完全竞争的市场效率	(216)
§ 12.3 不完全竞争市场的效率	(218)
§ 12.4 社会福利函数	(219)
§ 12.5 阿罗不可能定理	(223)
§ 12.6 平等与效率	(226)
§ 12.7 次优理论	(226)
参考文献	(229)
符号说明	(232)

第一篇

最 优 化 原 理

第 1 章 凸集与凸函数

本章简要介绍凸集与凸函数的基本性质,这在最优化理论中起着重要的作用。

§ 1.1 凸集及基本性质

定义 1.1 若对于任意的 $x, y \in D$ 和数 $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, 均有

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in D \quad (1.1)$$

则称 D 是凸集。

几何意义:凸集 D 内任意两点连线上的点仍在 D 中。

定义 1.2 若对于任意的 $x, y \in D (x \neq y)$ 和数 $\lambda (0 < \lambda < 1)$ 均有 $\lambda x + (1 - \lambda)y \in D$ 的内点, 则称 D 为严格凸集。

定义 1.3 若存在常数 $\gamma > 0$, 使得对于任意 $x, y \in D$ 和任意向量 $z \in R^n$, 只要 $\|z\| < \gamma \|x - y\|$, 均有

$$\frac{1}{2}(x + y) + z \in D \quad (1.2)$$

则称 D 是强凸集。

例:

(1) 空集, 单点集。

(2) 设 $c \neq 0$ 是已给向量, b 是已给数, 集合

$$H = \{x | c^T x = b, x \in R^n\} \quad (1.3)$$

称为超平面,

$$H_b = \{x | c^T x \leq b, x \in R^n\}$$

称为半闭空间。

$$H_0 = \{x : c^T x > b\} \quad (1.4)$$

称为半开空间。

$$(3) \quad S_a(x_0) = \{x : \|x - x_0\| \leq a, x \in R^n\} \quad (1.5)$$

称为超球。

可以证明,空集、单点集及超平面是凸集但不是严格凸集,半开空间为严格凸集,超球是强凸集。

以下讨论凸集的基本性质,从凸集、严格凸集、强凸集定义可知:

性质 1.1 设 D 是强凸集,则 D 必为严格凸集;

性质 1.2 设 D 是严格凸集,则 D 必为凸集;

性质 1.3 任意一组凸集之交集仍为凸集;

性质 1.4 集合 $D \subset R^n$ 是凸集的充要条件是:点 $x_1, \dots, x_s \in D$ 的每个凸组合仍包含在 D 中。

证明:充分性显然;现证必要性,即假设 D 为凸集,用归纳法证明,当 $s=1$ 时结论显然成立,现假设 $s \geq 1$ 时正确。令:

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_s x_s + \alpha_{s+1} x_{s+1}$$

不失一般性。我们假定 $\alpha_{s+1} \neq 1$,于是上式写成

$$x = (1 - \alpha_{s+1})Z + \alpha_{s+1}x_{s+1}$$

此处, $Z = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_{s+1}}x_1 + \dots + \frac{\alpha_s}{1 - \alpha_{s+1}}x_s$

由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{s+1}$ 的假设可推出: $\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_{s+1}} \dots \frac{\alpha_s}{1 - \alpha_{s+1}}$ 是一组凸组合数,由 D 的凸性及归纳假设可推出: $x \in D$

根据性质 1.3,我们引出以下定义:

定义 1.4 设 $A \in R^n$,包含 A 的所有凸集之交称为 A 的凸包,记为 $C_0(A)$ 。

由性质 1.3 可知, $C_0(A)$ 是一个凸集且是包含 A 的最小凸集。

由集合的和及数乘还有以上性质可得:

性质 1.5 设 C 和 D 是 R^n 中的凸集, $\lambda \in R$,则 $C + D, \lambda D$ 均是凸集。

在数学规划中,许多重要结果能够利用凸集的分离定理来证明,因而凸集分离定理是凸集的一个最重要性质。

引理 1.1 设 C 是 R^n 中的非空闭凸集,它不包含原点,则存在一个超平面,它严格分离 C 和原点。

证明:令 $S_\alpha(0)$ 是以原点为中心的闭超球,即

$$S_\alpha(0) = \{x \in R^n : \|x\| \leq \alpha\}$$

且使 $C \cap S_\alpha(0) \neq \emptyset$, 于是 $C \cap S_\alpha(0)$ 是一个紧致集,又连续函数 $\|x\|$ 在 $C \cap S_\alpha(0)$ 上达到极小,极小点为某个 $x_0 \in C$ 。

根据 $S_\alpha(0)$ 的定义,对每个 $x \in C$ 也成立 $\|x\| > \|x_0\| > 0$, 下面设 x 是 C 中任一点,因为 C 是凸集,对任何 $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in C$, 且

$$\|\lambda x + (1-\lambda)x_0\|^2 \geq \|x_0\|^2$$

则有

$$(\lambda x + (1-\lambda)x_0)^T (\lambda x + (1-\lambda)x_0) \geq (x_0)^T x_0, 1 \geq \lambda \geq 0$$

也就是

$$(\lambda)^2 (x-x_0)^T (x-x_0) + 2\lambda (x_0)^T (x-x_0) \geq 0, 1 \geq \lambda \geq 0 \quad (1.6)$$

假如 $(x_0)^T (x-x_0) = -\epsilon < 0$, 我们便能选择充分小的 λ 使

$$2\epsilon > \lambda (x-x_0)^T (x-x_0) > 0.$$

于是便有

$$2\lambda (x_0)^T (x-x_0) < -\lambda^2 (x-x_0)^T (x-x_0)$$

从而与(1.6)式矛盾,因此必定有

$$(x_0)^T (x-x_0) \geq 0$$

或者说,对每个 $x \in C$ 均有

$$(x_0)^T x \geq (x_0)^T x_0 > 0$$

令 $\alpha = (x_0)^T (x_0)/2$, 于是超平面

$$H_c = \{x : x \in R^n, (x_0)^T x = \alpha\}$$

严格分离 C 与原点。

定理 1.1(严格分离定理)

设 C_1 和 C_2 是 R^n 中两个互不相交的非空闭凸集, 并设 C_2 是紧致的, 则存在一个超平面分离 C_1 和 C_2 。

证明: 由于 C_2 是紧致集, 所以 $C_1 - C_2 = C_1 + (-C_2)$ 是闭集(例如参见[1]), 并且由性质 1.5, 它是凸集。由于 C_1 和 C_2 互不相交, $C_1 - C_2$ 便不包含原点。根据引理 1.1, 必存在一个超平面

$$H_{C_1 - C_2} = \{x : x \in R^n, (x_0)^T x = \alpha\}$$

它严格分离 $C_1 - C_2$ 和原点, 此处 $x_0 \in C_1 - C_2$, 使 $C_1 - C_2$ 到原点的距离达到极小, 且 $\alpha = (x_0)^T (x_0) / 2$

对每个 $x \in C_1 - C_2$, 有

$$(x_0)^T x > \alpha > 0$$

令 $x = u - v$, 这里 $u \in C_1, v \in C_2$, 我们得到

$$(u_0 - v_0)^T (u - v) > \alpha > 0$$

所以

$$\inf_{u \in C_1} (u_0 - v_0)^T u \geq \sup_{v \in C_2} (u_0 - v_0)^T v + \alpha > \sup_{v \in C_2} (u_0 - v_0)^T v$$

选择 β 使

$$\inf_{u \in C_1} (u_0 - v_0)^T u > \beta > \sup_{v \in C_2} (u_0 - v_0)^T v$$

于是超平面 $\{x : x \in R^n, (x_0)^T x = \beta\}$ 严格分离 C_1 和 C_2

在关于严格分离两个凸集的上述结论中, 关键性的假定是闭集条件, 如果我们不限定它们为闭凸集, 那还可以得到类似于引理 1.1 和定理 1.1 的条件较弱的结论。

引理 1.2 设 C 是 R^n 中非空凸集, 它不包含原点, 则存在一个超平面分离 C 和原点。

证明: 对每个 $x \in C$, 令

$$Y(x) = \{y : y \in R^n, y^T y = 1, y^T x \geq 0\}$$

这个集合是非空的闭集。

设 $x_1, \dots, x_k$ 是 C 中任意有限点集, 因为 C 为凸集, 根据性质 1.4, 下式给出的 x 属于 C :

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$$

这些 x 的集合是 C 中紧致集, (它是 $x_1, \dots, x_k$ 组成的点集的凸包), 由引理 1.1, 必存在 $y_0 \neq 0$, 使

$$(y_0)^T x_i > 0, i = 1, \dots, k$$

不失一般性, 我们可以假定上述 y_0 满足 $(y_0)^T y_0 = 1$, 于是

$$\bigcap_{i=1}^k Y(x_i) \neq \emptyset$$

由于 $Y(x)$ 是紧致集 $Y = \{y : y \in R^n, y^T y = 1\}$ 的闭子集, 根据有限交集性质可知

$$\bigcap_{x \in C} Y(x) \neq \emptyset$$

选择任一 $\hat{y} \in \bigcap_{x \in C} Y(x)$, 于是对两个 $x \in C$ 均有 $\hat{y}^T x \geq 0$, 所以超平面 $\{x : x \in R^n, \hat{y}^T x = 0\}$ 分离 C 和原点。

定理 1.2 (分离定理)

设 C_1 和 C_2 是 R^n 中两个互不相交的非空凸集, 则存在一个超平面分离它们。

证明: 集合 $C_1 - C_2$ 是凸集, 且不包含原点, 根据引理 1.2 存在一个向量 $\hat{y}$, 使对每个 $x \in C_1 - C_2$, 均有 $\hat{y}^T x \geq 0$, 或等价地, 对 $u \in C_1, v \in C_2$, 必有 $\hat{y}^T (u - v) \geq 0$, 所以, 存在一个数 β 满足

$$\inf_{u \in C_1} \hat{y}^T u \geq \beta \geq \sup_{v \in C_2} \hat{y}^T v,$$

于是超平面 $\{x : x \in R^n, \hat{y}^T x = \beta\}$ 分离 C_1 和 C_2 。

引理 1.3 (Far kas 引理)

假设 A 为给定 $m \times n$ 实矩阵, b 为给定的 n 维向量, 那么, 对所有满足 $Ay \geq 0$ 的向量 y 均成立 $b^T y \geq 0$ 的充要条件为: 存在 m 维向量 $\beta \geq 0$ 使 $A^T \beta = b$ 。

证明: 这个结论等价于 $Ay \geq 0, b^T y < 0$ 有解的充要条件是 $A^T \beta = b$ 与 $\beta \geq 0$ 无解, 而后一组无解的充要条件是下列非空闭集互不相交。

$C_1 = \{x : x \in R^n, x = A^T \beta, \beta \geq 0\}, C_2 = \{b\}$, 注意 C_2 是紧致的。

如果上述条件成立,则由定理 1.1,存在一个非零向量 $c \in R^n$ 及一个实数 α 使 $c^T b > \alpha$,并对每个 $x \in C_1$ 有 $c^T x > \alpha$,或者等价,对每个 $\beta \geq 0$ 有 $c^T A^T \beta > \alpha$ 。

令 $\beta = 0$,我们得到 $\alpha < 0$,又令 $\beta_i = (0, \dots, b_i, 0, \dots, 0)^T (i=1, 2, \dots, m)$,其中 b_i 是很大的正数,得到 $c^T A^T \beta \geq 0$,因此 $Ac \geq 0$, c 是 $Ay \geq 0$ 与 $b^T y < 0$ 的解。反之,若 $A^T \beta = b, \beta \geq 0$ 又 $Ay \geq 0$,则 $b^T y = \beta^T Ay \geq 0$ 。

Farkas 引理的形式多种多样,下面再介绍一种形式,又称择一定理。

择一定理 设 m, m' 是两个非负整数, $a_0, a_i (i=1, 2, \dots, m)$ 和 $b_i (i=1, 2, \dots, m')$ 是 R^n 中的向量,则线性方程组及不等式组

$$\begin{aligned} d^T a_i &= 0 & i=1, 2, \dots, m \\ d^T b_i &\geq 0 & i=1, 2, \dots, m' \\ d^T a_0 &< 0 \end{aligned}$$

无解当且仅当存在实数 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, m)$ 和非负实数 $\mu_i (i=1, 2, \dots, m')$ 使得

$$a_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{m'} \mu_i b_i$$

§ 1.2 凸 函 数

本节讨论定义在凸集上的一类特殊函数——凸函数。凸函数并非新的概念,读者在高等数学中已经比较熟悉了。

但是在高等数学上见到的凸函数,立足于几何上的直观,一般只在 R^1, R^2 上讨论,下面在 R^n 空间上进行研究。

一、凸函数分类

凸函数的类型很多,本节只讨论常见的三种凸函数:凸函数、严格凸函数、强凸函数。