保险费计算理论与应用

0.4

西南财经大学出版社

责任编辑：谢胜智
封面设计：童　恺

保险费计算的理论与应用

许仁忠　　著

西南财经大学出版社出版　西南财经大学出版社发行
四川省新华书店经销　郫县科技书刊印刷厂印刷

787×1092毫米　1/32　印张 5.5　字数 120 千字
1990年4月第一版　1990年4月第一次印刷
印数：1—2000册

书号：ISBN 7—81017—186—0/F·141
定价：2.20元

前　言

保险费计算是保险业发展中一个极其重要的应用问题，也是保险研究中一个极其重要的理论问题。它既涉及保险理论与务实中的若干问题，更与概率论、数理统计等高等数学方法密切相关。国外对这一问题的研究较多，由于理论研究的发展与保险业务展开的需要，已经形成了“保险数学”这个交叉学科方向；而在国内，对这一问题的系统研究还不多，有待于各方面的共同努力。笔者从1984年起开始讨论这方面的问题，所成这本小册子，愿以此为引玉之砖，促进计量保险的研究，以期与更多的学者仁人一起共同探讨，为我国保险数学研究的发展尽绵薄之力。

本书的内容中，相当一部份是笔者接受国家“七·五”社会科学重点研究项目《保险业研究》的计量保险二级子课题，以及中国人民银行总行“七·五”金融重点科研项目《保险费计算》的研究任务后所完成的研究成果。研究过程中，得到中国人民银行总行教育司、中国人民保险总公司保险研究所、中国社会科学院数量经济与技术经济研究所以及西南财经大学金融系等方面的大力支持与协作，谨在此表示诚挚的谢意。

笔者水平有限，恳请各位读者批评修正。

许　仁　忠

1989年6月于光华园

目　录

第一章　随机变量及其分布……………………………（ 1 ）

§1.1　随机变量………………………………………（ 1 ）

§1.2　离散型随机变量的概率分布……………（ 5 ）

§1.3　连续型随机变量的概率分布……………（ 11 ）

§1.4　概率分布函数…………………………………（ 18 ）

§1.5　随机变量的数字特征………………………（ 22 ）

第二章　大数定律与中心极限定理…………………（ 29 ）

§2.1　大数定律………………………………………（ 29 ）

§2.2　中心极限定理…………………………………（ 35 ）

第三章　模糊变量的随机性……………………………（ 42 ）

§3.1　模糊子集与模糊事件………………………（ 42 ）

§3.2　模糊事件的概率……………………………（ 48 ）

第四章　保险费计算的基本概念………………………（ 55 ）

§4.1　保险费与保险费率…………………………（ 55 ）

§4.2　保险业务的财政稳定性……………………（ 59 ）

§4.3　保险总准备金与分保关系…………………（ 64 ）

第五章　保险费计算的理论与分析方法……………（ 66 ）

§5.1　风险的概率分布……………………………（ 66 ）

§5.2　保险费计算方法（一）……………………（ 74 ）

§5.3 保险费计算方法（二）…………………（84）
§5.4 附加费与附加费率…………………………（95）

第六章 保险费的性质……………………………（97）

§6.1 保险费的无欺条件………………………（97）
§6.2 保险费的均值超前性……………………（103）
§6.3 保险费的可加性…………………………（108）
§6.4 保险费的平移不变性……………………（112）
§6.5 保险费的齐次性…………………………（116）
§6.6 保险费的其它性质………………………（118）
§6.7 风险的序关系……………………………（121）

第七章 保险总准备金……………………………（131）

§7.1 巨灾发生的频率…………………………（131）
§7.2 承保额的预测与分析……………………（135）
§7.3 总准备金积累的适度规模………………（156）

第八章 再保险与分保关系………………………（159）

§8.1 最大自留额………………………………（159）
§8.2 分保额……………………………………（165）

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　随机变量及其分布

保险费计算的数理基础是应用数学的一个重要分支——概率论与数理统计。本章作为准备知识介绍与保险费计算若干问题密切相关的概率论的基本内容，其中包括随机变量的概念，随机变量的概率分布与随机变量的概率分布函数，以及随机变量的数字特征，等等。

§1.1　随机变量

大自然和社会上经常发生多种多样的自然现象与社会现象。各种自然现象与社会现象可以归结为两大类：确定性现象与非确定性现象。例如，水在0°C结冰，这是一个必然发生的现象，称为确定性现象。在非确定现象中，有一类被称为随机现象。例如，工厂的产品，可能是合格品，也可能是废品；某个地区对某种商品的需求量，可能较多，也可能较少；保险标的的受损次数及受损程度；可能较大，也可能较小。这些现象，都是随机现象。

对随机现象进行的观察与试验称为随机试验，随机试验的结果称为随机事件。例如，抽查某产品的质量就是进行了一次随机试验，抽查结果“它是一件合格品”，就是一个随机事件。

为了深入研究随机现象，引入了随机变量这一概念。什

么是随机变量呢？我们先看如下的例子。

例1 投掷一颗骰子，出现的点数可能有1，2，3，4，5，6。每投掷一次，“出现的点数”可能是1，也可能是2，3，4，5，6，就是说“出现的点数”无法在掷骰子前确定，这是问题的一方面；另一方面，当任何一次掷骰子的过程完成后，“出现的点数”又是一个确定的值。这样，“出现的点数”实质上是一个变量，这个变量的特点在于，它是随着投掷结果而变的变量。我们称这种变量的随机变量。

例2 某保险机构对某类产品实行质量保险，现在有100件产品拟进行这种质量保险，已知其中有5件次品。现从中随便抽取20件来投保。这个保险机构关心的是参加投保所“抽到的次品件数”，它可能是1，也可能是2，3，4，5，甚至可能是零（没有抽到次品）。这里，“抽得的次品件数”也有两方面的情况：一方面，在未抽之前，它是一个不确定的数；另一方面，在任何一次抽取中，它又总有一个确定的结果。这样，“抽得的次品件数”也是一个随机变量。

抽象出来，可以提出随机变量的定义：

定义1.1 在一定的条件下，随机试验的每一个可能的结果ω，都唯一的对应到一个实数值$X(\omega)$，则称$X(\omega)$是一个随机变量，简记为X。

例3 在保险机构投保的标的，在保险期间它受灾的结果只有“受灾”和“未收灾”两种，似乎这样的结果没有对应的实数值。但是，如果我们把“受灾”记为0，把“未收灾”记为1，这样，保险标的在保险期间受灾的结果也对

应了一个随机变量X，它的取值分别为 0 与 1．当随机变量取值 0 时，表示随机事件“保险标的受灾”，可记为$\{X=0\}$；当随机变量X取值 1 时，表示随机事件“保险标的未收灾”，可记为$\{X=1\}$。于是，被我们定义的随机变量为

$$X=\begin{cases}1 & \text{当保险标的受灾时}\\ 0 & \text{当保险标的未收灾时}\end{cases}$$

这样，我们可以知道随机变量是用来描述随机事件的。说明确一些，它以自己的取值来描述随机事件，即描述随机试验的结果。于是我们知道，了解随机变量的取值是讨论随机事件的重要内容。但是，只是清楚随机变量取什么值，对研究问题还是不够的。概率论所要研究的，不仅是随机变量取什么值，更重要的，它还要讨论随机变量以什么样的规律取这些值，这是问题更重要的一方面。所谓随机变量以什么样的规律取这些值，实质就是随机变量取这些值的可能性各有多大．这些随机变量取值的可能性，我们称为事件的概率，用P表示．如例1中，随机变量X取值3表示“掷一枚骰子出现 3 点”这一随机事件，可以用$\{X=3\}$表示，易于知道，随机事件$\{X=3\}$的概率是$\frac{1}{6}$，记为 $P\{X=3\}=\frac{1}{6}$，它表示“掷一枚骰子出现 3 点”的概率为$\frac{1}{6}$。同样，在例 3 中，可以知道

$$P\{X=0\}=\frac{1}{2}\qquad P\{X=1\}=\frac{1}{2}$$

例 4　有n件相同的产品来投质量保险，已知每件产品

出现质量问题的概率为p，那么这n件产品投保后“发生质量问题的次数”是保险机构十分关心的问题。这类问题，抽象出来，可以归结为讨论如下更一般的问题：设单次试验中，事件A发生的概率为p，则在n次重复试验中，“事件A发生的次数”也是一个随机变量X，它的可能取值范围是0，1，2，…，n。$\{X=k\}$表示随机事件“A发生了k次”（$k=0, 1, 2, \cdots, n$）。今后可以知道，它的概率为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

上边几个例子中的随机变量X，它们的取值都是有限个或无穷可列个，即所有可能的取值都能按照一定顺序排列起来，这类能够把所有可能取的值都按照一定顺序排列起来的随机变量，称为离散型随机变量。

相应的，如果X的所有可能取的值不能按照一定顺序排列起来，则称X是非离散型随机变量。在非离散型随机变量中，最重要的一类是在实际工作中经常遇到的所谓连续型随机变量。下边两个例子所介绍的都是连续型随机变量。

例5 某公共汽车站每隔5分钟有一辆汽车通过。一个乘客对于汽车通过这个车站的时间完全不知道，而汽车在任一时刻到达车站的可能性都是相同的。这样，这位乘客的“候车时间”T是一个随机变量。显然$0\leqslant T\leqslant 5$。象这样不能按一定顺序排列起来，其取值是“连续的”随机变量称为连续型随机变量。可以知道，$\{0\leqslant T<2\}$表示随机事件“候车时间少于2分钟”，$\{3<T<5\}$表示随机事件“候车时间大于3分钟小于5分钟”。

例6 在洪水灾害中，沿河两岸的财产损失率$X=\frac{Q}{A}$是一个连续型随机变量，其中A是沿河两岸财产总值，Q是受洪水灾害的财产额。由于$Q\leqslant A$，显然随机变量$X=\frac{Q}{A}$可能取的值是〔0，1〕。$\{0.8<X\leqslant 1\}$表示随机事件“损失率大于0.8”。

§1.2 离散型随机变量的概率分布

离散型随机变量X的取值是可以一一列举的，因而只可能取有限个值或者一串值。设X可能取的值为x_1，x_2，…，x_k，…，我们要研究的不仅是随机变量X可能取值的范围x_k（$k=1$，2，…）更重要的是研究X以多大的概率取它所可能取的值，即要研究对于随机事件$\{X=x_k\}$（$k=1$，2，…），它的概率$P\{X=x_k\}$是多少。

例1 为了对某种产品进行质量保险，需要对这种产品进行检验。这种产品有100件，其中有5件不合格品，其余95件是合格品。如以$\{X=1\}$表示“从这批产品中任取一件是合格品”，以$\{X=0\}$表示“从这批产品中任取一件是不合格品”，易于知道它们的概率分别是

$$P\{X=0\}=0.05 \qquad P\{X=1\}=0.95$$

可以观察到：

（1）$P\{X=0\}\geqslant 0 \qquad P\{X=1\}\geqslant 0$

（2）$P\{X=0\}+P\{X=1\}=1$

一般地，对于离散型随机变量X，如相应于X的一切可

能值x_1, x_2, …, x_k, …, 有

$P\{X=x_1\}=p_1$, $P\{X=x_2\}=p_2$, …, $P\{X=x_k\}=p_k$, …即分别知道随机变量X取值x_k的概率是p_k($k=1, 2, \cdots$), 也可记为

$$P\{X=x_k\}=p_k \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

这时，就把上式称作离散型随机变量X的概率分布，也称为概率函数。

把$P\{X=x_k\}=p_k$($k=1, 2, \cdots$)列成一个表，称为随机变量X的概率分布表（表1—1）

表1—1

X	x_1	x_2	…	x_k	…
$P\{X=x_k\}=p_k$	p_1	p_2	…	p_k	…

离散型随机变量X的概率分布中的概率p_k具有下述性质：

（1）$p_k\geqslant 0 \qquad (k=1, 2, \cdots)$

（2）$\sum\limits_{k} p_k=1$

例2 求出§1.1例1中随机变量X的概率分布。

解 显然 $P\{X=k\}=\frac{1}{6} \qquad (k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$列成概率分布表为（表1—2）

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

表1—2

X	1	2	3	4	5	6
$P\{X=k\}=p_k$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

易于验证 $p_k \geqslant 0$，$\sum_{k=1}^{6} p_k = 1$

关于常用的离散型随机变量，我们介绍主要的三种。

一 二点分布

定义1.2 如果随机变量X的分布是

$P\{X=1\}=p \quad P\{X=0\}=q=1-p \quad (0<p<1)$

则称随机变量X服从以p为参数的二点分布。

例 1 中的随机变量X就是服从二点分布，它的参数 $p=0.95$，$q=0.05$，§1.1例 3 中的X也服从二点分布，其 $p=q=0.5$。

二 二项分布

定义1.3 如果随机变量X的分布是

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k p^{n-k}$$

$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ 0<p,\ q<1,\ p+q=1)$

则称随机变量X服从以n、p为参数的二项分布。记为 $X \sim B(n,\ p)$

§1.1例 4 中的n次重复试验表示事件A发生了k次的随

机变量X就是一个二项分布。这表明，若单项试验中事件A发生的概率是p，在n次重复试验中，事件A恰好发生k次的概率是

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

易于知道，当$n=1$时，二项分布就是二点分布。

在实际工作中，服从二项分布的随机变量是比较多的。

例3 某保险机构对某工厂正在运转的机床投保生产正常进行的保险。设有10台机床来投保，已知每台发生故障的概率是$p=0.2$，问同时有3台机床不发生故障，7台机床发生故障的概率是多少？

解 设随机变量X为“10台机床中发生故障的机床数”，可以知道，X服从$n=10$，$p=0.2$的二项分布，即$X\sim B(10,0.2)$，于是有3台机床不发生故障（亦即有7台机床发生故障）的概率为

$$P\{X=7\}=C_{10}^7(0.2)^7(0.8)^3=0.000736$$

例4 某保险公司承保了某化工系统30个保险标的。资料表明每个标的发生火灾的概率是0.005。试求30个标的中有二个发生火灾与没有一个标的发生火灾的概率。

解 显然，如果设X是30个标的中发生火灾的标的数，那么X服从$n=30$，$p=0.005$的二项分布，即$X\sim B(30,0.005)$，于是

$$P\{X=2\}=C_{30}^2(0.005)^2(0.995)^{28}=0.0094$$

$$P\{X=0\}=C_{30}^0(0.005)^0(0.995)^{30}=0.8604$$

例5 为了确定对某工厂进行质量保险的产品的保险费

率，需要知道这种产品中次品的概率分布。已知这个工厂某批产品中有15%的次品。重复抽样检查，共抽取4个样品，试求4个样品中次品数的概率分布。

解　设4个样品中的次品个数为X，则

$$X \sim B(4, 0.15)$$

$$P\{X=0\}=C_4^0(0.15)^0(0.85)^4=0.5220$$

$$P\{X=1\}=C_4^1(0.15)^1(0.85)^3=0.3685$$

$$P\{X=2\}=C_4^2(0.15)^2(0.85)^2=0.0975$$

$$P\{X=3\}=C_4^3(0.15)^3(0.85)^1=0.0115$$

$$P\{X=4\}=C_4^4(0.15)^4(0.85)^0=0.0005$$

可以看到，在例5中，当$X=0$时的概率最大，也可以说4个样品中没有次品的可能最大。象这样在二项分布$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$中概率最大时的随机变量$X$的取值$k_0$称为$X$的最可能值，它可由下式计算

$$k_0=\begin{cases} np & \text{当}np\text{是整数} \\ np+p\text{和}np-p & \text{当}np+p\text{是整数} \\ np+p\text{的整数部份} & \text{其　它} \end{cases}$$

例6　某保险公司在某地区承保了1000个标的，已知每个标的发生火灾的概率是0.003，问这1000个标的中发生火灾概率最大的标的数是多少。

解　设X是1000个标的中发生火灾的标的数，于是可知

$$X \sim B(1000, 0.003)$$

$\because$　$np=1000\times0.003=3$

$\therefore$　X当$=3$时概率最大

于是知承保的1000个标的中有3个标的发生火灾的概率最大。

三 普阿松分布

定义1.4 如果随机变量X的概率分布是

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

则称随机变量X服从以λ为参数的普阿松分布。记为$X\sim P(\lambda)$。

例7 某保险公司所承保的一批标的数量较大，假定每一标的在某段时间内发生火灾的概率相同，那么可以认为在这一段时间内发生火灾的标的数服从普阿松分布。设其参数$\lambda=0.1$，问在这段时间内，保险标的有一个发生火灾的概率以及发生火灾的标的数不超过2个的概率各是多少？

解 因为发生火灾的标的数$X\sim P(0.1)$

$$\therefore\ P\{X=1\}=\frac{(0.1)^1}{1!}e^{-0.1}=0.091$$

$$P\{X\leqslant 2\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}$$

$$=\sum_{k=0}^{2}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{2}\frac{(0.1)^2}{k!}e^{-0.1}=0.9998$$

服从普阿松分布的随机变量X也有一个最大可能值m_0，它由下式计算

$$m_0=\begin{cases}\lambda\text{和}\lambda-1 & \text{当}\lambda\text{是整数时}\\ \lambda\text{的整数部份} & \text{当}\lambda\text{不是整数时}\end{cases}$$

例8 在例7中，显然$m_0=0$，这是因为$\lambda=0.1$不是整数，而0.1的整数部份是0，由此可知，例7中发生火灾的标的数中，概率最大的是0，即没有标的发生火灾的概率最大。

在二项分布中，当重复试验的次数很大而每次试验中某事件发生的概率p又较小时，可以用普阿松分布去近似替代二项分布，这样可避免因n大而导致的二项分布计算上的繁复。这时，普阿松分布的参数$\lambda=np$。

例9 某保险公司承保了100个标的，已知每个标的受灾的概率$p=0.015$，试求100个标的中恰有一个受灾的概率。

解 由于$n=100$较大，而$p=0.015$较小，这时可用二项分布或普阿松分布来计算

按二项分布计算

$$P\{X=1\}=C_{100}^{1}(0.015)(0.985)^{99}=0.33595$$

按普阿松分布计算，这时$\lambda=np=1.5$

$$P\{X=1\}=\frac{e^{-1.5}}{1!}\times 1.5=0.334695$$

可以看到，这两种计算得到的结果是十分相近。一般说来，当$n\geqslant 10$而$np\leqslant 5$时，可采用普阿松分布去代替二项分布。

§1.3 连续型随机变量的概率分布

定义1.5 对于随机变量X，如果存在一个非负的可积

函数，使对于任意的a、b（$a<b$）都有

$$P\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)dx$$

则称X为连续型随机变量，并称$f(x)$是连续型随机变量X的概率密度，简称密度。

这里，$P\{a<X<b\}$表示事件$\{a<X<b\}$的概率，即X落在区间（a，b）上的概率。

由随机变量的定义可知

$$P\{X=a\}=P\{X=b\}=0$$

于是 $P\{a<X<b\}=P\{a<X\leqslant b\}$

$$=P\{a\leqslant X<b\}=P\{a\leqslant X\leqslant b\}=\int_a^b f(x)dx$$

例1 已知随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x & x<0\\ \frac{1}{2}e^{-x} & x\geqslant 0\end{cases}$$

求X落在（-1，1）内的概率。

解 $P\{-1\leqslant X<1\}=\int_{-1}^1 f(x)dx$

$$=\int_{-1}^0 \frac{1}{2}e^x dx+\int_0^1 \frac{1}{2}e^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^x\Big|_{-1}^0-\frac{1}{2}e^{-x}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}=1-e^{-1}\approx 0.632$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com