萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

平面幾何學
比例及相似形

山地哲太郎 林鶴一著

崔朝慶譯

商務印書館發行

目　　次

第二節 關於複比及二乘比之面積 ………… 78

平面幾何學—比例及相似形

第 一 章

關於比及比例之說明及定理

說比, 有須豫述之事項, 述之於次:

1. **定義**. 某量 A 爲同種類之量 B 之若干倍, 則 A 爲 B 之**倍量**, B 爲 A 之**約量**.

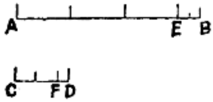
例如一丈爲一尺之倍量, 而一尺爲一丈之約量.

2. **定義**. 二量 A, B, 同爲量 C 之倍量, 則 C 爲 A 及 B 之**公約量**, 或謂之**公度量**.

例如一升爲一斗及一斛之公約量.

3. **定義**. 有公約量之二量, 謂之**可通約量**, 無公約量之二量, 謂之**不可通約量**.

4. 求二直線 AB, CD 之最大公約量.



解. AB>CD, 以 CD 之長爲度, 從 AB 之 A 端起, 依 CD 之長截 AB 爲若干段, 生次之二種情形.

(1)　AB 等於 CD 之若干倍之情形.

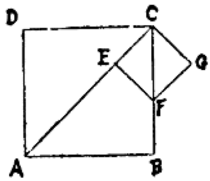
例如 AB=4CD, 則 CD 爲所求之最大公約量.

(2)　AB 含 CD 之若干倍與殘餘之情形.

例如 AB=3CD+EB. 又以 EB 之長爲度, 從 CD 之 C 端起, 截 CD, 得 CD=2EB+FD, 再以 FD 之長爲度, 從 EB 之 E 端起, 截 EB, 設 EB=2FD, 則 CD=5FD, AB=17FD, 所求之最大公約量, 卽 FD 也.

此方法, 與算術及代數學中之求最大公約數, 其理相同.

設二直線爲正方形之一邊 BC 及其對角線 AC, 用前之方法, 求最大公約量.



正方形之對角線, 不能恰等於其一邊之若干倍, 故以 BC 爲度, 從 AC 之 A 端起, 截 AC 於 E, 殘餘爲 CE, 作垂線至 AC 上之 E 點, 此垂線與 BC 相交於 F, 則 CE=EF=BF, 故從 BC 減 CE, 其殘餘爲 CF, 由此知 CE, CF 乃第二正方形 CEFG 之一邊及對角線也.

卽求第一正方形 ABCD 之一邊及對角線之最大公約量, 變爲求第二正方形 CEFG 之一邊及對角線之最大公約量, 如是輾轉相求.

恆爲求正方形之一邊及對角線之最大公約量，而無終局之時，故此情形不能有公約量.

5. 定義. 計算某量，須先定同種類之量爲單位，而後檢定其量含此單位之若干倍，或爲此單位之若干分之一之幾倍.

某量之測度乃以單位計其量所得之數也. 整數及分數，通稱爲有理數，或謂之盡數，奇零數謂之無理數，或謂之不盡數.

6. 定理 1. 某量能以單位通約，其測度爲有理數.

證明. 以 A 表某量. U 爲單位，P 爲公約量.

假設 $A=mP$, $U=nP$. (m, n 爲正整數.)

因 $P=\frac{1}{n}U$. $\therefore$ $A=m\left(\frac{1}{n}U\right)=\frac{m}{n}U$.

即 A 之測度爲有理數 $\frac{m}{n}$.

此定理之對偶亦眞，故得次之系 1.

系 1. 量之測度，非有理數，其量與單位不能通約.

系 2. 量之測度爲有理數，其量與單位能通約.

證明. 單位爲 U，量 A 之測度爲 $\frac{m}{n}$. (m, n 爲正整數.)

因 $A=\frac{m}{n}U=m\left(\frac{1}{n}U\right)$.

以 P 代 $\frac{1}{n}U$, 則 $A=m\left(\frac{1}{n}U\right)=mP$, $U=nP$.

∴ P 爲 A 及 U 之公約量.

由此知 A 與 U 爲可通約之量.

卽系 2 之對偶亦眞, 故得次之系 3.

系 3. 某量與其單位不可通約, 則其測度非有理數, 必爲無理數.

以正方形之一邊爲單位, 其對角線與單位不可通約, (見第 4 節) 故其測度爲無理數, 說明於次.

以 A 代正方形之一邊, P 代其對角線, 知 $2A>P>A$.

用 A 之十分之一, 則 $1.5A>P>1.4A$.

又用 A 之百分之一, 則 $1.52A>P>1.51A$.

又用 A 之千分之一, 則 $1.515A>P>1.514A$.

觀前之各式, P 之測度, 乃介於兩箇小數之間, 卽更用 A 之萬分之一, A 之十萬分之一, 其結果亦同, 故可決定 P 之測度, 不能爲分數.

換言之, 卽能決定 P 之測度, 不能爲有理數.

非有理數, 則不盡數也. 此不盡數, 乃 2 之平方根也.

如此之不盡數, 在實地計算時, 無法能求得眞正密合之數.

如以 1.415A 代 P, 則失之稍多, 而以 1.414A 代 P, 則失之微少, 考其誤差之略數爲 0.001A, 實不足 A 之千分之一也.

因不盡數無法能求得眞正密合之數,故運算時,卽用不盡數之近似數,失之稍多者,名曰過剩近似數,失之微少者,名曰不足近似數 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 皆不盡數 $\sqrt{2}$ 之過剩近似數, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 皆不盡數 $\sqrt{2}$ 之不足近似數也.

7. 定義. 量 A 對於與之同種類之量 B 之比,卽乘 B 可得 A 之數也.

換言之,則 A 之對於 B 之比,卽用 B 爲單位計 A 時, A 之測度也.

記 A 之對於 B 之比爲 A : B, 或用分數式 $\frac{A}{B}$.

A 爲比之前項, B 爲比之後項.

注意. A 之對於 B 之比,通稱爲 A 與 B 之比.

8. 定義. 某比與交換其前後項而成之比,謂之互爲反比.

如 A : B 與 B : A, 卽互爲反比.

9. 定理 2. 某比與其反比之積,等於 1.

設 $\frac{A}{B}=m$ 則 $\frac{B}{A}=\frac{1}{m}$. $\therefore$ $\frac{A}{B}\times\frac{B}{A}=m\times\frac{1}{m}=1$.

10. 定義. 量 A 與 B 之比,等於量 C 與 D 之比,則 A, B, C, D 成比例,或謂之比例量.

記比例之法，有次之三式.

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

$$A:B=C:D$$

$$A:B::C:D$$

A 與 D 爲比例之**外項**，B 與 C 爲比例之**內項**，D 爲 A, B, C 之**第四比例項**. 又 A 與 C, B 與 D **爲相對應之項**.

注意. A, B, C, D, 皆爲同種類之量，則比例成立. 又 A, B 爲同種類之量，而 C, D 爲與 A, B 異種類者，比例亦能成立.

例如 A, B, C, D 皆爲線分，能成比例，A, B 爲線分，C, D 爲面積，亦無妨.

11. 定義. 有同種類之量 A, B, C, 若 A 與 B 之比，等於 B 與 C 之比，則此三量成比例，其 C 爲 A, B 之**第三比例項**，B 爲 A, C 之**比例中項**.

注意. 第四比例項與第三比例項之意義有區別，不可誤解.

12. 定理 3. 量 A 與 B 之比，A 及 B 能以同一之單位計之，其比等於以 B 之測度除 A 之測度之商.

證明. 假設 $A=aP$, $B=bP$.

因 $P=\frac{1}{b}B$ $\therefore$ $A=a\left(\frac{1}{b}B\right)=\frac{a}{b}B$.

故依比之定義 $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$.

系. 若 A, B, C, D 爲比例量, A, B 以同一之單位計之測度爲 a, b. C, D 以同一之單位計之測度爲 c, d, 必有次之關係.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

證明. 比例式爲 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, 因 $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$, $\frac{C}{D}=\frac{c}{d}$, $\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

此最後之式, 乃代數學中所常用之比例式也.

故量之比之研究, 得歸於測度之比 (卽數之比) 之研究.

卽代數學中關於數之比之事項, 亦得視爲關於量之比之事項.

今以代數學中最重要之定理, 述之於次.

13. 定理 4. a, b, c, d, …… 表任意之數, 有 I 至 IX 之九種變化如次.

I. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 爲 $ad=bc$.

證明. 假設之式之兩邊, 同以 bd 乘之, 卽得終結之式.

II. 從 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 知 $a\gtreqless b$ 則 $c\gtreqless d$.

證明. $a>b$, 因 $\frac{a}{b}>1$, 則 $\frac{c}{d}>1$. $\therefore$ $c>d$.

餘可依同法證明.

III. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 爲 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

此名曰反轉之理.

證明. 以假設之式之兩邊各除 1, 卽得終結之式.

IV. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

此名曰更迭之理.

證明. 假設之式之兩邊, 同以 $\frac{b}{c}$ 乘之, 卽得終結之式.

V. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

此名曰合比之理.

VI. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

此名曰分比之理.

VII. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

上之三定理, 讀者試自證明.

VIII. 設 $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}$, 則 $\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}=\frac{a}{b}$.

此名曰加比之理.

證明. 以 r 代假設之比之值.

從 $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=r.$

得 $a=br,\quad a'=b'r,\quad a''=b''r.$

三式相加. $a+a'+a''=br+b'r+b''r=(b+b'+b'')r.$

$\therefore\quad \frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}=r=\frac{a}{b}.$

IX. k 爲任意之數, $\frac{a}{b}=\frac{ka}{kb}.$

此易證明.

注意. I 至 IX 之變化, 乃此後屢應用者, 必須諳記.

例 題 I.

1. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 求證 $\frac{a}{b}=\frac{ma-nc}{mb-nd}$, ($m$, n 爲任意之數.)

*2. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 之 a 爲最大, 求證 $a+d>b+c$.

(初學幾何學之人, 遇有符號 * 之題可省略.)

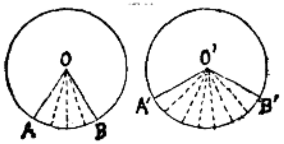
3. 設 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$, 求證 $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$ 及 $\frac{a}{d}=\frac{a^3}{b^3}$.

4. 設 $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{a}{b}$, 求證 $\mathrm{A}\times b=\mathrm{B}\times a$. (A, B 爲量而 a, b 爲數也.)

第　二　章

中　心　角

14. 定理 5. 在等圓（或同圓）之兩箇中心角之比，等於其夾弧之比.



題意. $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ 爲在等圓 O, O′ 之中心角，AB, A′B′ 爲二角所夾之弧.

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{\text{弧 } AB}{\text{弧 } A'B'}$$

證明 I. $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ 爲可通約之情形.

假定 $\angle AOB$ 等於公約量之四倍，$\angle A'O'B'$ 等於公約量之七倍.

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{4}{7}$$

因 $\angle AOB$ 之四等分之角，及 $\angle A'O'B'$ 之七等分之角，等於其公約量，而等圓（或同圓）之兩中心角相等，其對中心角之弧必相等，故弧 AB, A′B′ 所分之一部分皆相等.

$$\therefore\ \frac{\text{弧 } AB}{\text{弧 } A'B'}=\frac{4}{7}$$

從上之二等式，依普通公理 $\dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\dfrac{\text{弧 } AB}{\text{弧 } A'B'}$