

萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

平面幾何學
比例及相似形

山地哲太郎 林鶴一著

崔朝慶譯

商務印書館發行

目 次

第一章 關於比及比例之說明及定理 1

倍量, 約量 1

公約量 1

可通約量, 不可通約量 1

求最大公約量 1

定理 1, 量之測度 3

比 5

定理 2, 某比與反比之積等於 1 5

比例, 比例量 5

比例中項 6

定理 3, 量之比與測度 6

定理 4, 數之比例 (重要定理) 7

例題 I 9

第二章 中心角 10

定理 5, 中心角與夾弧 (基本定理) 10

例題 II 13

GW T30/np

第三章 比例線 14

定理 6, 平行線 (基本定理) 14

內分外分 15

定理 7, 內分點, 外分點... .. 15

調和共軛點, 調和列點 17

定理 8, 平行線 17

例題 III... .. 19

定理 9, 內角及外角之二等分線 19

主要問題 I 20

例題 IV... .. 21

主要問題 2 22

例題 V 23

第四章 相似多角形 25

對應角, 對應邊 25

定理 10, 相似三角形 25

定理 11, 相似三角形 (基本定理) 26

主要問題 3 27

例題 VI... .. 28

定理 12, 相似三角形 (基本定理) 30

目	次	3
定理 13, 相似三角形 (基本定理)	31	
主要問題 4	32	
例題 VII	33	
主要問題 5	34	
雜題 I	36	
主要問題 6	37	
直接相似, 反對相似	42	
定理 14, 相似多角形	43	
例題 VIII	44	
主要問題 7	46	
主要問題 8	48	
相似之中心	48	
例題 IX	49	
 第五章 面積	 51	
第一節 面積 等積之矩形 (基本定理)	51	
定理 15, 矩形	51	
例題 X	52	
定理 16, 內項外項所包之矩形	55	
主要問題 9	56	

例題 XI...	57
定理 17, 圓之二弦相交互分二部分所包之矩形	60
定理 18, 切線上之正方形	62
主要問題 10	63
例題 XII	64
定理 19, 三角形之二邊所包之矩形	67
主要問題 11	68
例題 XIII	69
定理 20, 多祿某之定理 (重要定理)	70
例題 XIV	73
中末比	76
例題 XV	76

第二節 關於複比及二乘比之面積..... 78

複比, 二乘比之定義	78
定理 21, 複比	78
定理 22, 矩形之比...	79
例題 XVI	81
定理 23, 兩箇三角形之比 (基本定理)	81
定理 24, 一角相等之兩箇三角形之比 (基本定理)	82
主要問題 12	85

目	次	5
例題 XVII	86	
定理 25, 相似三角形之比	88	
主要問題 13	90	
例題 XVIII	90	
第六章 雜定理	95	
定理 26, 梅乃臘司之定理	95	
例題 XIX	97	
定理 27, 舍佛之定理	100	
例題 XX	103	
定理 28, 巴斯果之定理	105	
例題 XXI	107	
雜題 II	107	
第七章 計算應用問題	111	
定理 29, 弧之測度... ..	111	
例題 XXII	112	
主要問題 14	112	
例題 XXIII	113	
定理 30, 矩形之測度	114	

例題 XXIV	116
主要問題 15	116
例題 XXV	117
主要問題 16	119
例題 XXVI	120
主要問題 17	122
例題 XXVII	122
主要問題 18	124
例題 XXVIII	125
主要問題 19	127
例題 XXIX	127

附錄 問題解法指南及答	130
-------------------	-----

平面幾何學——比例及相似形

第 一 章

關於比及比例之說明及定理

說比，有須豫述之事項，述之於次：

1. 定義. 某量 A 爲同種類之量 B 之若干倍，則 A 爲 B 之倍量， B 爲 A 之約量。

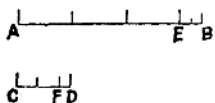
例如一丈爲一尺之倍量，而一尺爲一丈之約量。

2. 定義. 二量 A, B ，同爲量 C 之倍量，則 C 爲 A 及 B 之公約量，或謂之公度量。

例如一升爲一斗及一斛之公約量。

3. 定義. 有公約量之二量，謂之可通約量，無公約量之二量，謂之不可通約量。

4. 求二直線 AB, CD 之最大公約量。



解. $AB > CD$, 以 CD 之長為度, 從 AB 之 A 端起, 依 CD 之長截 AB 為若干段, 生次之二種情形.

(1) AB 等於 CD 之若干倍之情形.

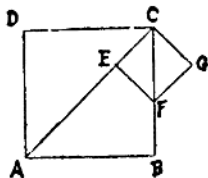
例如 $AB = 4CD$, 則 CD 為所求之最大公約量.

(2) AB 含 CD 之若干倍與殘餘之情形.

例如 $AB = 3CD + EB$. 又以 EB 之長為度, 從 CD 之 C 端起, 截 CD , 得 $CD = 2EB + FD$, 再以 FD 之長為度, 從 EB 之 E 端起, 截 EB , 設 $EB = 2FD$, 則 $CD = 5FD$, $AB = 17FD$, 所求之最大公約量, 即 FD 也.

此方法, 與算術及代數學中之求最大公約數, 其理相同.

設二直線為正方形之一邊 BC 及其對角線 AC , 用前之方法, 求最大公約量.



正方形之對角線, 不能恰等於其一邊之若干倍, 故以 BC 為度, 從 AC 之 A 端起, 截 AC 於 E , 殘餘為 CE , 作垂線至 AC 上之 E 點, 此垂線與 BC 相交於 F , 則 $CE = EF = BF$, 故從 BC 減 CE , 其殘餘為 CF , 由此知 CE , CF 乃第二正方形 $CEFG$ 之一邊及對角線也.

即求第一正方形 $ABCD$ 之一邊及對角線之最大公約量, 變為求第二正方形 $CEFG$ 之一邊及對角線之最大公約量, 如是輾轉相求.

恆爲求正方形之一邊及對角線之最大公約量，而無終局之時，故此情形不能有公約量。

5. 定義. 計算某量，須先定同種類之量爲單位，而後檢定其量含此單位之若干倍，或爲此單位之若干分之一之幾倍。

某量之測度乃以單位計其量所得之數也。整數及分數，通稱爲有理數，或謂之盡數，奇零數謂之無理數，或謂之不盡數。

6. 定理 1. 某量能以單位通約，其測度爲有理數。

證明. 以 A 表某量， U 爲單位， P 爲公約量。

假設 $A = mP$, $U = nP$. (m, n 爲正整數.)

$$\text{因 } P = \frac{1}{n}U. \therefore A = m\left(\frac{1}{n}U\right) = \frac{m}{n}U.$$

即 A 之測度爲有理數 $\frac{m}{n}$.

此定理之對偶亦真，故得次之系 1.

系 1. 量之測度，非有理數，其量與單位不能通約。

系 2. 量之測度爲有理數，其量與單位能通約。

證明. 單位爲 U ，量 A 之測度爲 $\frac{m}{n}$. (m, n 爲正整數.)

$$\text{因 } A = \frac{m}{n}U = m\left(\frac{1}{n}U\right).$$

$$\text{以 } P \text{ 代 } \frac{1}{n}U, \text{ 則 } A = m\left(\frac{1}{n}U\right) = mP, U = nP.$$

∴ P 爲 A 及 U 之公約量。

由此知 A 與 U 爲可通約之量。

即系 2 之對偶亦真，故得次之系 3。

系 3. 某量與其單位不可通約，則其測度非有理數，必爲無理數。

以正方形之一邊爲單位，其對角線與單位不可通約，（見第 4 節）故其測度爲無理數，說明於次。

以 A 代正方形之一邊， P 代其對角線，知 $2A > P > A$ 。

用 A 之十分之一，則 $1.5A > P > 1.4A$ 。

又用 A 之百分之一，則 $1.52A > P > 1.51A$ 。

又用 A 之千分之一，則 $1.515A > P > 1.514A$ 。

觀前之各式， P 之測度，乃介於兩箇小數之間，即更用 A 之萬分之一， A 之十萬分之一，其結果亦同，故可決定 P 之測度，不能爲分數。

換言之，即能決定 P 之測度，不能爲有理數。

非有理數，則不盡數也。此不盡數，乃 2 之平方根也。

如此之不盡數，在實地計算時，無法能求得真正密合之數。

如以 1.415A 代 P ，則失之稍多，而以 1.414A 代 P ，則失之微少，考其誤差之略數爲 0.001A，實不足 A 之千分之一也。

因不盡數無法能求得真正密合之數，故運算時，即用不盡數之近似數，失之稍多者，名曰過剩近似數，失之微少者，名曰不足近似數。
 $1.5, 1.42, 1.415, 1.4143$ ，皆不盡數 $\sqrt{2}$ 之過剩近似數， $1.4, 1.41, 1.414, 1.4142$ ，皆不盡數 $\sqrt{2}$ 之不足近似數也。

7. 定義. 量 A 對於與之同種類之量 B 之比，即乘 B 可得 A 之數也。

換言之，則 A 之對於 B 之比，即用 B 爲單位計 A 時， A 之測度也。

記 A 之對於 B 之比爲 $A : B$ ，或用分數式 $\frac{A}{B}$ 。

A 爲比之前項， B 爲比之後項。

注意。 A 之對於 B 之比，通稱爲 A 與 B 之比。

8. 定義. 某比與交換其前後項而成之比，謂之互爲反比。

如 $A : B$ 與 $B : A$ ，即互爲反比。

9. 定理 2. 某比與其反比之積，等於 1。

設 $\frac{A}{B} = m$ 則 $\frac{B}{A} = \frac{1}{m}$ ， $\therefore \frac{A}{B} \times \frac{B}{A} = m \times \frac{1}{m} = 1$ 。

10. 定義. 量 A 與 B 之比，等於量 C 與 D 之比，則 A, B, C, D 成比例，或謂之比例量。

記比例之法，有次之三式。

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

$$A : B = C : D$$

$$A : B :: C : D$$

A 與 D 爲比例之外項，B 與 C 爲比例之內項，D 爲 A, B, C 之第四比例項。又 A 與 C, B 與 D 爲相對應之項。

注意。A, B, C, D, 皆爲同種類之量，則比例成立。又 A, B 爲同種類之量，而 C, D 爲與 A, B 異種類者，比例亦能成立。

例如 A, B, C, D 皆爲線分，能成比例，A, B 爲線分，C, D 爲面積，亦無妨。

11. 定義。 有同種類之量 A, B, C, 若 A 與 B 之比，等於 B 與 C 之比，則此三量成比例，其 C 爲 A, B 之第三比例項，B 爲 A, C 之比例中項。

注意。第四比例項與第三比例項之意義有區別，不可誤解。

12. 定理 3. 量 A 與 B 之比，A 及 B 能以同一之單位計之，其比等於以 B 之測度除 A 之測度之商。

證明. 假設 $A=aP$, $B=bP$.

$$\text{因 } P=\frac{1}{b}B \therefore A=a\left(\frac{1}{b}B\right)=\frac{a}{b}B.$$

$$\text{故依比之定義 } \frac{A}{B}=\frac{a}{b}.$$

系. 若 A, B, C, D 爲比例量, A, B 以同一之單位計之測度爲 a, b . C, D 以同一之單位計之測度爲 c, d , 必有次之關係.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

證明. 比例式爲 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, 因 $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$, $\frac{C}{D}=\frac{c}{d}$, $\therefore \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

此最後之式, 乃代數學中所常用之比例式也.

故量之比之研究, 得歸於測度之比 (即數之比) 之研究.

即代數學中關於數之比之事項, 亦得視爲關於量之比之事項.

今以代數學中最重要之定理, 述之於次.

13. 定理 4. $a, b, c, d, \dots$ 表任意之數, 有 I 至 IX 之九種變化如次.

I. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 爲 $ad=bc$.

證明. 假設之式之兩邊, 同以 bd 乘之, 即得終結之式.

II. 從 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 知 $a \cong b$ 則 $c \cong d$.

證明. $a > b$, 因 $\frac{a}{b} > 1$, 則 $\frac{c}{d} > 1$. $\therefore c > d$.

餘可依同法證明.

III. 化 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 爲 $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

此名曰反轉之理.

證明. 以假設之式之兩邊各除 1, 即得終結之式.

IV. 化 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

此名曰更迭之理.

證明. 假設之式之兩邊, 同以 $\frac{b}{c}$ 乘之, 即得終結之式.

V. 化 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

此名曰合比之理.

VI. 化 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

此名曰分比之理.

VII. 化 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

上之三定理, 讀者試自證明.

VIII. 設 $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$, 則 $\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''} = \frac{a}{b}$.

此名曰加比之理.

證明. 以 r 代假設之比之值.

$$\text{從 } \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = r.$$

$$\text{得 } a = br, \quad a' = b'r, \quad a'' = b''r.$$

$$\text{三式相加. } a + a' + a'' = br + b'r + b''r = (b + b' + b'')r.$$

$$\therefore \frac{a + a' + a''}{b + b' + b''} = r = \frac{a}{b}.$$

IX. k 爲任意之數, $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$.

此易證明.

注意. I 至 IX 之變化, 乃此後屢應用者, 必須諸記.

例題 I.

1. 設 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 求證 $\frac{a}{b} = \frac{ma - nc}{mb - nd}$, (m, n 爲任意之數.)

*2. 設 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 之 a 爲最大, 求證 $a + d > b + c$.

(初學幾何學之人, 遇有符號 * 之題可省略.)

3. 設 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$, 求證 $\frac{a}{c} = \frac{a^2}{b^2}$ 及 $\frac{a}{d} = \frac{a^3}{b^3}$.

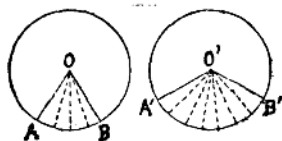
4. 設 $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, 求證 $A \times b = B \times a$. (A, B 爲量而 a, b 爲

數也.)

第二章

中心角

14. 定理 5. 在等圓（或同圓）之兩箇中心角之比，等於其夾弧之比。



題意. $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$
為在等圓 O , O' 之中心角,
 AB , $A'B'$ 為二角所夾之弧

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'} = \frac{\text{弧 } AB}{\text{弧 } A'B'}$$

證明 I. $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ 為可通約之情形。

假定 $\angle AOB$ 等於公約量之四倍, $\angle A'O'B'$ 等於公約量之七倍。

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'} = \frac{4}{7}$$

因 $\angle AOB$ 之四等分之角, 及 $\angle A'O'B'$ 之七等分之角, 等於其公約量, 而等圓（或同圓）之兩中心角相等, 其對中心角之弧必相等, 故弧 AB , $A'B'$ 所分之一部分皆相等。

$$\therefore \frac{\text{弧 } AB}{\text{弧 } A'B'} = \frac{4}{7}$$

從上之二等式, 依普通公理 $\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'} = \frac{\text{弧 } AB}{\text{弧 } A'B'}$