目　录

第1篇　线性代数

第2篇　概率论

第3篇 数理统计

第 1 章　行列式与矩阵

行列式与矩阵都是数学中非常有用的工具，它们不仅在研究线性方程组的求解理论中扮演着极其重要的和不可缺少的角色，而且在工程技术各领域中有着极其广泛的应用。正确理解行列式与矩阵的基本概念，熟练掌握计算 n 阶行列式的基本方法和矩阵中常用的基本的运算法则，将对今后的学习带来不少方便。

本章将根据三阶行列式的展开式的规律，通过 n 级排列的奇偶性来定义 n 阶行列式的展开式，并介绍 n 阶行列式的一些基本性质和 n 阶行列式的按行(列)展开定理，从而使我们能把一个高阶行列式转化为低阶行列式来求值。本章还将介绍矩阵中最基本的概念和一些常用的基本的运算法则。这些基本的概念和基本的运算法则都是极其有用的。

§1.1　n 阶行列式及其基本性质

1.11　n 级排列及其奇偶性

定义 1　由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列。

例 1　2 3 1 是一个 3 级排列，3 4 1 2 是一个 4 级排列，2 5 3 1 4 是一个 5 级排列。

我们知道，由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有不同的 n 级排列共有 $n!$ 个，而在这 $n!$ 个不同的 n 级排列中，$12\cdots n$ 是唯一的一个按从小到大次序组成的 n 级排列，称它为 n 级标准排列。

例 2　由三个数 1,2,3 组成的所有不同的 3 级排列共有 6 个。即

1 2 3	2 3 1	3 1 2
1 3 2	2 1 3	3 2 1

其中 1 2 3 是一个 3 级标准排列。

定义 2　在一个排列中的两个数，如果排在前面的数大于排在它后面的数，则称这两个数构成一个逆序。一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数。逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列。

例 3　在 3 级排列 2 3 1 中，2 与 3 不构成逆序，但 2 与 1 构成一个逆序，这是因为此时 $2>1$，且 2 在 1 的前面。同理，3 与 1 也构成一个逆序，因此 3 级排列 2 3 1 的逆序数为 2 是一个偶排列。

一般地，设 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 所组成的一个 n 级排列，若将 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$，则按定义 2 知

$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)=$($j_1$ 后面比 j_1 小的数的个数)+(j_2 后面比 j_2 小的数的个数)$+\cdots+$(j_{n-1}后面比 j_{n-1}小的数的个数)

例 4　(1)因 $\tau(3\ 4\ 1\ 2)=2+2+0=4$，故 4 级排列 3 4 1 2 是偶排列。

(2)因 $\tau(2\ 5\ 3\ 1\ 4)=1+3+1+0=5$，故 5 级排列 2 5 3 1 4 是奇排列。

(3)因 $\tau(1\ 2\ \cdots\ n)=0$，故 n 级标准排列 $1\ 2\cdots n$ 是偶排列。

1.12 n 阶行列式的展开式

考查以下等式(1.1)：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.1}$$

(1)等式的左边表示一个三阶行列式，横的称为行(row)，纵的称为列(column)。其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 是数，称它为此行列式的第 i 行第 j 列的元素。

(2)等式的右边表示此三阶行列式的展开式，亦表示此行列式的值。它是 $3!$ 项的代数和，其中每一项都是取自三阶行列式中属于不同的行与不同的列的三个元素的乘积，可写成如下形式

$$a_{1j_1}\,a_{2j_2}\,a_{3j_3} \tag{1.2}$$

这里 $j_1\ j_2\ j_3$ 是 1,2,3 的一个排列。

(3)容易验证，每个乘积项(1.2)前面所取的正负号与 $\tau(j_1\ j_2\ j_3)$ 有关，当 $\tau(j_1\ j_2\ j_3)$ 是偶数时，乘积项(1.2)的前面取“+”号，当 $\tau(j_1\ j_2\ j_3)$ 是奇数时，乘积项(1.2)的前面取“−”号。例如，式(1.1)中有乘积项 $a_{12}a_{21}a_{33}$，因 $\tau(213)=1$ 是奇数，故此乘积项的前面取“−”号。

若采用 $\sum$ 的记号，则可将(1.1)式写成如下形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

这里 $j_1\ j_2\ j_3$ 是 1,2,3 的一个排列，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有的 3 级排列求和。

定义 3 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

等于所有取自(1.3)中属于不同的行与不同的列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}\,a_{2j_2}\cdots\,a_{nj_n} \tag{1.4}$$

的代数和。这里 $j_1\ j_2\cdots\ j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，当 $\tau(j_1\ j_2\cdots\ j_n)$ 是偶数时，乘积项(1.4)的前面取“+”号；当 $\tau(j_1\ j_2\cdots\ j_n)$ 是奇数时，乘积项(1.4)的前面取“−”号。

若采用 $\sum$ 的记号，则可将这一定义写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.5}$$

这里 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和。等式(1.5)的右边表示此 n 阶行列式的展开式，亦表示此 n 阶行列式的值。

规定一阶行列式 $|a|$ 的值等于 a。

为了叙述方便，今采用记号 $|A|,|B|,\cdots$ 等来表示某一个 n 阶行列式。

1.13　n 阶行列式的基本性质

计算 n 阶行列式的值是一个重要的问题，由定义 3 知，n 阶行列式的值是 $n!$ 个乘积项的代数和，计算它需要做 $n!\times(n-1)$ 次乘法运算。当 n 较大时，$n!$ 是一个相当大的数，因此，直接按定义来计算高阶行列式的值是很困难的。在这里我们要介绍 n 阶行列式的基本性质，只要能灵活地应用这些性质，就可以大大地简化 n 阶行列式的计算。事实上这些基本性质都是三阶行列式的基本性质的推广，只是它们的证明方法与过去的证法不同而已。

性质 1　行列式经转置后其值不变。

若设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad |A|^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $|A|=|A|^T$。

我们称 $|A|^T$ 为 $|A|$ 的转置行列式，按此规定可知 $|A|$ 也是 $|A|^T$ 的转置行列式，即有 $(|A|^T)^T=|A|$。

性质 2　行列式中任意两行(列)互换后，行列式的值仅改变符号。

若设

$$|A| = \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}, \qquad |A_1| = \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

则 $|A_1|=-|A|$。

性质 3　若行列式中有两行(列)元素完全相同，则行列式的值等于零。

性质 4　以数 k 乘行列式的某一行(列)中所有元素，就等于用 k 去乘此行列式。或者说，如果

行列式的某一行(列)中所有元素有公因子 k,则可将此公因子 k 提到行列式记号的外面。

若设

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad |A_1|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $|A_1|=k|A|$。

性质 5 若行列式中有一行(列)的元素全为零,则行列式的值等于零。

性质 6 若行列式中有两行(列)元素成比例,则行列式的值等于零。

性质 7 行列式具有分行(列)相加性。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 8 若在行列式的某一行(列)元素上加上另一行(列)对应元素的 k 倍,则行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在计算行列式时,为了便于检查运算的正确性,最好能对每一步运算注明计算的依据。为此我们约定采用如下的记号:

用 $R_i \pm kR_j$ 表示在行列式的第 i 行元素上加上(减去)第 j 行对应元素的 k 倍。

用 $C_i \pm kC_j$ 表示在行列式的第 i 列元素上加上(减去)第 j 列对应元素的 k 倍。

例 5 计算行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \\ b & a & c & d \\ b & a & d & c \end{vmatrix}$$

解 由观察可知

$$|A|\xrightarrow[R_4-R_2]{R_1-R_3}\begin{vmatrix}0&0&c-d&d-c\\a&b&d&c\\0&0&c-d&d-c\\b&a&d&c\end{vmatrix}\xlongequal{性质3}0$$

例 6　试证

$$\begin{vmatrix}au+cv&as+ct\\bu+dv&bs+dt\end{vmatrix}=(ad-bc)(ut-vs)$$

证明

$$\begin{vmatrix}au+cv&as+ct\\bu+dv&bs+dt\end{vmatrix}\xlongequal{性质7}\begin{vmatrix}au&as+ct\\bu&bs+dt\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}cv&as+ct\\dv&bs+dt\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{性质7}\begin{vmatrix}au&as\\bu&bs\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}au&ct\\bu&dt\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}cv&as\\dv&bs\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}cv&ct\\dv&dt\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[性质6]{性质4}ut\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}+vs\begin{vmatrix}c&a\\d&b\end{vmatrix}$$

$$=ut(ad-bc)+vs(bc-ad)=(ad-bc)(ut-vs)$$

例 7　设 n 阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\-a_{12}&0&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\-a_{13}&-a_{23}&0&\cdots&a_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&-a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}$$

它们的元素之间满足条件

$$a_{ji}=-a_{ij}\qquad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

称它为反对称行列式。今证明当 n 为奇数时，它的值等于零。

证明

$$|A|=\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\-a_{12}&0&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\-a_{13}&-a_{23}&0&\cdots&a_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&-a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}\xlongequal{转置}\begin{vmatrix}0&-a_{12}&-a_{13}&\cdots&-a_{1n}\\a_{12}&0&-a_{23}&\cdots&-a_{2n}\\a_{13}&a_{23}&0&\cdots&-a_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[公因子(-1)]{对每一行提取}(-1)^n\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\-a_{12}&0&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\-a_{13}&-a_{23}&0&\cdots&a_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&-a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}=(-1)^n|A|$$

所以，当 n 为奇数时得 $|A|=-|A|$，移项后得 $|A|=0$。

例如，五阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & 7 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

是一个奇数阶的反对称行列式，由上述证明可立即知道它的值等于零。

§1.2 n阶行列式的按行(列)展开定理

我们知道，在计算n阶行列式的值时，阶数愈低，计算它的值愈容易。然而在应用行列式的基本性质后，我们还不能把高阶行列式转化为低阶行列式来处理。在这一节里，我们将介绍n阶行列式的按行(列)展开定理，从而可把高阶行列式转化为低阶行列式来求值。

1.21 遇零降阶法

定义 4 在n阶行列式$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

中，任意一个元素$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$都称为$|A|$的一阶子式，把元素a_{ij}所在的第i行第j列的元素划去后所得的$n-1$阶行列式称为元素a_{ij}的余子式，记为M_{ij}。我们把$(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的代数余子式，记为A_{ij}。

由定义4知，元素a_{ij}的余子式M_{ij}与它的代数余子式A_{ij}或者相等，或者相差一个符号。

例8 设

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

(1) 若取$|A|$的一阶子式为a_{23}，则它的余子式为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

而a_{23}的代数余子式为

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

(2) 若取$|A|$的一阶子式为a_{42}，则它的余子式为

$$M_{42}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

而 a_{42} 的代数余子式为

$$A_{42}=(-1)^{4+2}M_{42}=M_{42}$$

定理1 如果在 n 阶行列式 $|A|$ 的第 i 行中，除元素 a_{ij} 外，其余元素都等于零，则 $|A|$ 等于 a_{ij} 与它的代数余子式 A_{ij} 的乘积。即 $|A|=a_{ij}A_{ij}$。

* **证明** 证明分两步

(1) 首先证明当 $|A|$ 的第一行元素除 a_{11} 外，其余元素都等于零时，有 $|A|=a_{11}A_{11}$。

已知

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由定义 4 知，a_{11} 的余子式为

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a_{11} 的代数余子式为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11} \tag{1.6}$$

所以，只要能证明 $|A|=a_{11}M_{11}$，即有 $|A|=a_{11}A_{11}$。

因行列式 $|A|$ 的展开式中的每一项都包含有第一行上的元素，现知第一行上的元素除 a_{11} 外其余元素都等于零，故有

$$|A|\xlongequal{(1.5)}\sum_{1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2j_3\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.7}$$

这里 $j_2\,j_3\cdots\,j_n$ 是 $2,3,\cdots,n$ 的一个排列。

另一方面，由展开式(1.5)知

$$M_{11}=\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2j_3\cdots j_n)}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

这里 $j_2\,j_3\cdots\,j_n$ 是 $2,3,\cdots,n$ 的一个排列，于是

$$a_{11}M_{11}=a_{11}\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2j_3\cdots j_n)}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}=\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2j_3\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n} \tag{1.8}$$

由(1.6)，(1.7)，(1.8)知

$$|A|=a_{11}M_{11}=a_{11}A_{11}$$

(2)其次，设

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

要证 $|A|=a_{ij}A_{ij}$。

将第 i 行顺次与第 $(i-1),(i-2),\cdots,2,1$ 行对调，然后再将第 j 列顺次与第 $(j-1)$，$(j-2),\cdots,2,1$ 列对调，这样就将 a_{ij} 调到第一行第一列的位置，记所得的新行列式为 $|A_1|$，则

$$|A_1|=\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由(1)的证明可知 $|A_1|=a_{ij}M_{ij}$，这里 M_{ij} 就是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的余子式，因 $|A_1|$ 是由 $|A|$ 经过 $(i-1)+(j-1)=i+j-2$ 次关于行，列的对调而得，所以

$$|A|=(-1)^{i+j-2}|A_1|=(-1)^{i+j}|A_1|=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$

定理 1 表明，如果在 n 阶行列式的某一行中，除一个元素外其余元素都等于零，则此行列式的值就等于该元素与它的代数余子式的乘积，意即此时一个 n 阶行列式的值，可以通过计算一个 $n-1$ 阶行列式的值来得到，这就是降阶。因此，在计算高阶行列式时，往往先利用行列式的性质，使行列式的某一行(列)中除一个元素外，其余元素都变为零，这叫做造零，然后再降阶计算。这种造零降阶法是求行列式的值的最基本的方法。

例 9 试证下三角形行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

解 对第一行应用定理 1 降阶，可得

$$|A|=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

继续应用定理 1 使行列式多次降阶，可得

$$|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可知，上三角形行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{转置}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

此例说明:凡是上(下)三角形行列式的值都等于该行列式主对角线上元素的乘积。

例 10 若将 n 阶行列式 $|A|$ 按反对针方向或顺时针方向旋转 90°后所得之行列式记为 $|B|$,试证

$$|B|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|A|$$

证 由题意知,若

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

应有

$$|B| \xlongequal[\text{旋转 }90^\circ]{|A|\text{按反时针方向}} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{n,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{旋转 }90^\circ]{|A|\text{按顺时针方向}} \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{21} & a_{11} \\ a_{n2} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{22} & a_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn} & a_{n-1,n} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|A|$$

下面将对按反时针方向旋转 90°的结论加以证明,对于按顺时针方向旋转 90°的结论,读者可类似自行证明。

$$|B|=\begin{vmatrix} a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{n,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{转置}} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{12} & a_{11} \\ a_{2n} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n2} & a_{n1} \end{vmatrix} = |B|^T$$

现将行列式 $|B|^T$ 中第 n 列元素顺次与第 $(n-1),(n-2),\cdots,1$ 列元素对调,然后再将新得的行列式中第 n 列元素顺次与第 $(n-1),(n-2),\cdots,2$ 列元素对调,这样继续做下去,最后将新得的行列式中第 n 列元素与第 $(n-1)$ 列元素对调,这样最终所得的新行列式恰好是 $|A|$。因 $|A|$ 可由 $|B|^T$ 经过 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$ 次关于列的对调而得,故有

$$|B|^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|A|$$

由于 $|B|=|B|^T$，于是证得

$$|B| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|A|$$

例如：n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{旋转 }90^\circ]{\text{按反时针方向}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{1n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n-1,2} & 0 \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n-1,1} & a_{n1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

本例的解题方法很有用。

例 11 计算 n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 这个行列式的特点是每一行(列)元素的和都相同，因此可应用性质 8，在第一列元素上加上其余各列相应的元素，于是得

$$|A| \xlongequal{C_1+(C_2+C_3+\cdots+C_n)} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{提公因子}} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_n-R_1]{\substack{R_2-R_1\\R_3-R_1\\ \vdots}}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\0 & a-b & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & a-b & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

本题的解法是利用基本性质，把原行列式转化为一个与它等值的上三角形行列式来求出它的值。

例 12 计算行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\-4 & 1 & 3 & -4\\2 & 0 & 1 & -1\\1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}$$

解 采用造零降阶法求值。先对第三行造零，则有

$$|A|\xlongequal[C_4+C_3]{C_1-2C_3}\begin{vmatrix}5 & 1 & -1 & 1\\-10 & 1 & 3 & -1\\0 & 0 & 1 & 0\\-5 & -5 & 3 & 0\end{vmatrix}\xlongequal[\text{用定理 1}]{\text{对第三行}}\begin{vmatrix}5 & 1 & 1\\-10 & 1 & -1\\-5 & -5 & 0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{R_2+R_1}\begin{vmatrix}5 & 1 & 1\\-5 & 2 & 0\\-5 & -5 & 0\end{vmatrix}\xlongequal[\text{用定理 1}]{\text{对第三列}}\begin{vmatrix}-5 & 2\\-5 & -5\end{vmatrix}=25-(-10)=35$$

说明：造零降阶法是计算数字行列式的有效的典型方法。

例 13 计算行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\1 & -1 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & -2 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & -3 & 0\\0 & 0 & 0 & 4 & -4\end{vmatrix}$$

解 这个行列式的特点是从第 2 行起到末行止，每一行元素的和都等于零，故可应用性质 8，在第一列元素上加上其余各列相应的元素，于是可得

$$|A|\xlongequal{C_1+(C_2+\cdots+C_5)}\begin{vmatrix}1+2+\cdots+5 & 2 & 3 & 4 & 5\\0 & -1 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & -2 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & -3 & 0\\0 & 0 & 0 & 4 & -4\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{用定理1}]{\text{对第一列}} 15\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 15\times(4!) = 360$$

本题解法仍是造零降阶法，但针对本题的特点，造零方法更巧妙。

例14 设

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

称此 $|A_n|$ 为 n 阶范德蒙(vandermonde)行列式。求证

$$|A_n| = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\times(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)\times\cdots\times(x_n-x_{n-1})$$
$$= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

这里 $\prod$ 为连乘号。

*证明　应用数学归纳法来证明。

当 $n=2$ 时，知

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

故命题正确。

今设命题对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式来说是正确的。现在证明命题对于 n 阶范德蒙行列式来说也是正确的。

这里根据此行列式的特点，先由第 n 行减去第 $n-1$ 行的 x_1 倍，再由第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行的 x_1 倍，这样继续做下去，最后由第2行减去第1行的 x_1 倍，于是可得

$$|A_n| \xrightarrow[\substack{\vdots \\ R_2 - x_1R_1}]{\substack{R_n - x_1R_{n-1} \\ R_{n-1} - x_1R_{n-2}}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

根据定理1降阶，再用性质4把每一列的公因子提出来，就可得

$$|A_n| = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

等式右边有一个 $n-1$ 阶范德蒙行列式，根据归纳法的假设，有