

COLLEGE ALGEBRA

B_v

H. B. Fine

$$X + Y = 0$$

范氏大代数

骆师会 吴维一译
庄礼深校订



香港中流出版社

51.22
790

范氏大代數

駱師會 吳維一 譯
莊禮深 校訂



3/10526/12

香港中流出版社印行



譯者例言

(一)譯書當以信達流暢爲主。譯者筆拙，雖未能流暢，但於信達一點，則力求與原書意義並無參差或遺漏之處。

(二)本書術語，多採吾國最通行者。如一名已有數譯，則始終採用一名，以表一致。其尙無適當譯名者，則由譯者意譯。且於每一術語之初譯處附以原文，以免讀者混淆而生隔駭之弊。

(三)本書頁碼悉依原著。卽每頁內容均與原書相同。以便讀者對照。

(四)原文有英文索引一項，本書亦附以中文譯名，以便查閱。

代 數 學

代數並不是一門艱難的學科，牠所涉及的大都是呆板的法則。所以祇要懂得了這些呆板的法則，明白了一定不易的原理，然後依着一定的法則和原理去練習，去演算，是不會沒有成功的。唯一的祕訣便是繼續不斷的演習。祇要有恆心，能忍耐，那麼克服代數這門學科的困難是易如反掌的。

常常聽得學生們說代數難，怕代數的難比任何學科都怕。他們大都把這種事實的原因委之於性情。往往說：「我的性情不近於代數，所以代數對我無緣。」或者說：「我沒有代數的天才。」其實這是一個很大的錯誤。用着患難的心理去看任何學科都是難的。反過來說，如果能用克制困難的精神與毅力去學習，那麼代數決不是一門艱難的學科。

其次要說到學習代數時應該注意的幾點：

(一)多做算草多看例題 代數的習題，全賴多練習，多演算。單靠方法的了解是不夠的。因為解答代數的習題大都要靠經驗，必須親自去體驗，以獲得這種解答的經驗。許多習題的解答，都須親自去思致過，演習過，才能了解其中的訣巧。各題有各題的解法，各題有各題的奧祕，非親自去演習過，是很難獲有心得的。尤其是多看例題。

學習要點

因爲例題就是已經說出了解答的奧秘的一種演算，可以幫助讀者啓發解答的思路，促成其他各題的解答。讀者不可忽略視之。

(二)熟記公式熟練方法 有許多代數習題，解答時可依一定的公式或方法。學者如果能熟讀記憶這些公式，熟練這種方法，那麼逐步求解循序前進，必可減少許多困難。更可節省許多時間與腦力。

(三)運用圖解法以求解答 圖解法不特可使無法解答之方程式求得一近似之答數；且可幫助學者明瞭求解之原理。更可進一步而爲研究解析幾何之幫助。故圖解在代數學中雖僅佔有一小部份，但其性質與關係亦頗重大。

(四)克服心理上之困難 前面所說一般學者對於代數患難的心理，必須設法去克服牠。代數原是一門涉及數字的科學，所以大部份的演算也須以數字作爲根據。繁複的地方固然比較多，但其方法還是比較呆板的。習題的性質還是比較機械的。讀者如果能耐心忍性不患艱難，依着一定的方法去做，那麼一定會克服這種困難的。

上述諸端，僅就譯者管見所及，略貢陋見。乖誤之處，尚希 讀者更正。

目 錄

第一編 數

	頁
I. 自然數, 一數法, 加法與乘法	1
II. 減法與負數	16
III. 除法與分數	27
IV. 無理數	39
V. 虛數與複素數	70

第二編 代數

I. 緒論	79
II. 基本演算	93
III. 一元一次方程	110
IV. 聯立一次方程系	127
V. 除法變形	155
VI. 有理整式之因式	176
VII. 最高公因式及最低公倍式	196
VIII. 有理分式	213
IX. 對稱函數	245
X. 二項式定理	252
XI. 開方	260
XII. 無理函數, 根式與分指數	271
XIII. 二次方程	298
XIV. 二次方程之討論, 極大與極小	304
XV. 用二次方程式可解之方程式	309

XVI.	聯立方程之能以二次方程解之者	317
XVII.	不等式	340
XVIII.	不定一次方程	342
XIX.	比及比例,變數法	347
XX.	等差級數	354
XXI.	等比級數	357
XXII.	調和級數	362
XXIII.	遞差法,高階等差級數,插入法	364
XXIV.	對數	374
XXV.	排列及組合	393
XXVI.	多項式定理	408
XXVII.	可能率	409
XXVIII.	算學歸納法	424
XXIX.	方程論	425
XXX.	普通三次及四次方程	483
XXXI.	行列式及消去法	492
XXXII.	無窮級數之收斂	520
XXXIII.	無窮級數之演算	539
XXXIV.	二項級數,指數級數及對數級數	553
XXXV.	循環級數	560
XXXVI.	無窮連乘積	564
XXXVII.	連分式	566
XXXVIII.	連續函數之性質	577
	索引	591
	答案	1—36

第一編 數

I. 自然數—數法, 加法與乘法

事物之羣及其基數

事物之羣。 依吾人日常之經驗, 事物之呈現於當前而引起吾人之注意者, 不僅單獨的, 但亦有集合而成羣或團者。 1

如手之指, 家畜之羣, 多角形之頂皆為事物羣之例。

當某事物與其他事物非個別的而從其全體區別, 且使成為吾人注意之單獨目的物時, 則某事物可視作構造一羣。

為便利計, 構成一羣之事物, 名為此羣之元素。

等羣。 逐一對應。 文字 ABC 及 DEF 之二羣有關係, 2
即可由一羣各元素與他羣各元素, 依一元素與一元素相匹配而將其所有元素組合成對。例如 A 與 D , B 與 E , 及 C 與 F 可匹配。

無論何時, 如二群之一切元素, 皆能如此匹配者, 則稱此二群相等; 而諸元素之匹配方法稱為使二羣成一對一關係, 或逐一对應之關係。

3 定理. 設二羣皆等於同一第三羣, 則互相等.

因依假設, 可使其二羣中每一羣與第三羣逐一對應, 但設其中二元素與第三羣相同元素視為成偶, 則此二羣當互相逐一對應。

4 基數. 吾人可設想所有可能的事物之羣, 係分配於等羣之類, 而任何二已知羣之屬於同類或異類, 依是否可能使其逐一對應而定之。

例如, 文字 $ABCD$ 與 $EFGH$ 之二羣屬於同類, 而二羣 $ABCD$ 及 EFG 則為異類。

一類諸羣公有之性質, 而從他類諸羣分別者, 為一羣事物之數或其基數. 換言之,

一羣中事物之數或其基數, 為其本羣及可與其逐一對應之各羣公有之性質.

或可說: “事物羣之基數, 為此羣之性質, 其中事物, 設重行排列, 或以他事物逐一代換而仍不變者”; 又可說“此為羣之性質, 而此羣不關係於事物本身之特性及其羣中之排列”。

因排列事物或以他事物逐一代換, 則僅能變為一等羣 (§ 2). 且當其羣中一切如此變化而性質不變, 是必無關於事物之特性及其排列。

部分。第一羣之元素有若干而非全體，爲第二羣之元素
時，則稱第一羣爲第二羣之一部分。 6

例如，羣 ABC 爲羣 $ABCD$ 之一部分。

由此定義逕得：

設第一羣爲第二羣之一部分，而第二羣又爲第三羣之一
部分，則第一羣亦爲第三羣之一部分。 6

有限羣及無限羣。 當一羣或團不等於其本身諸部分之
一時，則稱爲有限；當等於其本身之某一部分時，則稱爲無限。* 7

例如，羣 ABC 爲有限，因不能使其與 BC 或其任何部分逐一對應。

但記號或符號之任何不盡連續，例如不盡數串 $1, 2, 3, 4, \dots$ ，爲一無限團。

例如，可於全團 $1, 2, 3, 4, \dots$ 及自 2 起之部分間成立一對應關係。

即於 $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ (a)

及 $2, 3, 4, 5, 6, \dots$ (b)

之間，(a) 中之 1 與 (b) 中之 2 匹配，(a) 中之 2 與 (b) 中之 3 匹配，餘類推，

——對於 (a) 中所可任擇之數，在 (b) 中有其對應數。

故團 (a) 等於其部分 (b)。因此 (a) 爲無限。

小基數及大基數。 令 M 及 N 表任何二有限羣，則必爲
下列情形之一。 8

1. M 及 N 相等，

或 2. M 等於 N 之一部，

或 3. N 等於 M 之一部。

*當然不能將一無限羣。——多稱爲團之一切元素——計及。當已有定則而
能由此新言已知事物是否屬於此團時，則吾人視如此之團，其意義已定。

於第一情形，稱 M 及 N 有同基數 (§ 4)，或等基數；於第二情形，稱 M 之基數小於 N 之基數；於第三情形，稱 M 之基數大於 N 之基數。

例如，設 M 為文字 abc 之羣，及 N 為羣 $defg$ ，則 M 等於 N 之一部分。例如等於部分 def 。

故 M 之基數小於 N 之基數，而 N 之基數大於 M 之基數。

9 註 由 § 7 有限羣之定義，此處所定“等”，“大”及“小”之關係，不可含混。

例如，此定義不能使 M 之基數同時等於及小於 N 之基數，因如此則 M 等於 N 亦等於 N 之一部分，故 N 等於其本身之一部分 (§ 3)，而其終， N 為無限 (§ 7)。

10 系。設三基數之第一數小於第二數，而第二數小於第三數，則第一數亦小於第三數。

設 M, N, P 表任何事物羣之基數， M 等於 N 之一部分，而 N 等於 P 之一部分；則 M 等於 P 之一部分 (§ § 3, 6)。

11 基數系。由含一元素之一羣開始，而屢次“加”一新事物，導得基數表如下：

1. 一“羣”之基數，如 $|$ ，即含一元素。
2. 一羣之基數如 $||$ ，即加一元素於第一種之羣而得者。
3. 一羣之基數如 $|||$ ，即加一元素於第二種之羣而得者。
4. 如此類推，不止。

吾人名此種連續基數為“一”，“二”，“三”，……，而以記號 1, 2, 3, ……表之。

就此系觀察。任何有限羣之基數，名為有限基數，下列 12
觀察，視為由上述基數表而得者：

第一。此表中之各基數，皆為有限。

如羣 $|$ 有限，因其不能等於其一部分 (§7) 故也；而其後各羣為有限，因加一新事物於有限羣仍為有限故也。*例如 $|$ 為有限羣，故 $||$ 為有限羣；因 $||$ 為有限羣，故 $|||$ 為有限羣，餘依此類推。

第二。各有限基數皆含於此表內。

蓋依定義，各有限基數為若干有限羣之基數，如 M 。但可於 M 中每一物作一標記，作成一標記羣 $|| \dots |$ 等於任何已知有限羣 M ，此標記羣必有一最後標記，故必含於 §11 之表內，蓋若標記無盡，則其本羣為無限，而 M 亦為無限故也 (§7)。

第三。諸基數中無二個相等。

此可由 §8 定義而知之。蓋因已證明一切羣 $|, ||, |||, \dots$ 皆為有限，而其中每二羣之一等於他羣之一部分為真確故也。

*可證明如下 (G. Cantor, Math. Ann; 46 卷, 490 頁):

設 M 表一有限羣，而 e 為單一事物，則羣 Me 為加 e 於 M 而得，亦為有限。
令 $G=H$ 表羣 G 及 H 相等。

設 Me 為無限，則必等於其一部分 (§7)。

令 P 表此部分，則 $Me=P$ 。

(1) 假定 P 不含 e 。

令 f 表 P 內與 Me 中之 e 匹配之元素，而以 P_1 表 P 之餘部。

則因 $Me=P_1f$ 而 $e=f$ ，得 $M=P_1$ 。

但此為不可能，因 M 為有限羣而 P_1 為 M 之一部分 (§7) 故也。

(2) 假定 P 含 e 。

則 P 中之 e 不能與 Me 中之 e 匹配，因若能配合，則 P 之餘部亦為 M 之一部，而等於 M 矣。但可假定 P 中之 e 與他元素如 Me 中之 g 匹配及 Me 中之 e 與 P 中之 f 匹配。

設 $Me=P$ 在此假設為真，則設再組合諸元素 e, f, g 使 P 中之 e 與 Me 中之 e 匹配及 P 中之 f 與 Me 中之 g 匹配亦真。但適如前證， P 之一部分將等於 M 矣，故此假設亦不可能。

自然記法. 方程及不等式

- 13 自然數. 符號 $1, 2, 3, \dots$ 或其名“一”, “二”, “三”, \dots , 謂之正整數或自然數. 故

一自然數爲一基數之記號或符號.

- 14 自然記法. 排列此諸數使其次序對應於 § 11 所代表之已知基數, 則得不盡之連續記號

$1, 2, 3, 4, 5, \dots$,

或“一”, “二”, “三”, “四”, “五”, \dots , 此名自然記法, 或自然數之記法.

- 15 記法內各記號表其中已定部分之記號數.

例如, 4 表記號 $1, 2, 3, 4$ 之數, 因此記號 $1, 2, 3, 4$ 之數, 與羣 $I, II, III, IIII$ 之數相同, 易言之, 即與最後羣之標記數 $IIII$ 相同 (§ 8), 普通皆如是.

- 16 記法之次序性質. 自然記法, 就其本身而言, 僅爲不同記號之團, 其第一記號爲 1; 繼其後之一定記號即 2; 再繼其後之一定記號即 3; 如此無止境.

易言之, 自然記法僅爲不同記號之團, 依一定且已知次序一個隨一個而來, 且有第一記號而無最後記號.

自其觀察點而論, 自然數本身, 僅爲有次序之標記, 即當默誦此記法時——關於時間——其次序自能呈現.

- 17 顯然可見, 此記法與普通一切之團, 其元素依一定且已知次序而排列者, 皆有下列性質:

1. 任何二元素可稱爲其一在“前”而他一在“後”，此“前”“後”之語，應用於任一對元素與應用於任何其他一對，有同一意義。

2. 設任何二元素爲已知，則常可定其孰前孰後。

3. 設 a, b , 及 c 表任何三元素而 a 在 b 前，及 b 在 c 前，則 a 在 c 前。

一團有已知其具上述性質者，或可由選擇排列方法而置之如是者。此種情形，皆稱此團爲次序系。

第一類之例，如 (1) 自然記法本身；(2) 時間內之連續事件；(3) 沿水平線由左至右排成之點列。第二類之例，爲按諸人之姓名字母依次排列者之一羣。

一團亦可有“一致”之元素，如在事物之羣，有二事或諸事 18
可同時發生。

當上述關係 1, 2, 3, 保持於不一致元素中——即不一致元素之真確如下者，則稱此團爲依次序。

4. 設 a 與 b 一致，及 b 與 c 一致，則 a 與 c 一致。

5. 設 a 與 b 一致，而 b 在 c 前，則 a 在 c 前。

基數中之大小關係，用自然數依記法中次序關係表示之。 19

因任何二已知基數之一，其在自然數記法中較後者必較大。

且“設三基數之第一個小於第二個，而第二個小於第三個，則第一個小於第三個”之關係，可以記法中“設 a 在 b 前，而 b 在 c 前，則 a 在 c 前”之關係代表之。

實則罕用任何別法以比較基數，吾人不用 §8 之方法，直接比較物羣之基數。反言之，即以合宜之自然數代表，而由其自然數在記法中之關係次序，推知孰大孰小。此事不必思索，因記法深印腦中，故當述及任何二自然數時，即可認識其孰前孰後。例如設述及 A, B 二城， A 之人口為 120000，而 B 為 125000，則可立即斷定 B 城居民較多，因知 125000 於記法中在 120000 之後故也。

20 數之方程及不等式。以後凡言“數”者，皆指自然數 (§13)；而文字 a, b, c ，表此任何數。

21 當欲使 a 及 b 表同數或自然記法中之“一致之數”，應用方程。

$$a = b, \text{ 讀作“} a \text{ 等於 } b \text{”}.$$

22 但當使自然記法中表 a 在前而 b 在後時，應用不等式

$$a < b, \text{ 讀作“} a \text{ 小於 } b \text{”};$$

$$b > a, \text{ 讀作“} b \text{ 大於 } a \text{”}.$$

23 依嚴格而論，此“等於”“小於”及“大於”諸語，自不涉於記號 a 及 b 之本身，但指其所代表之基數；例如“ a 小於 b ”一語，僅為“ a 所表之基數小於 b 所表之基數”之略語而已。

但一切不等式 $a < b$ 於記號 a 及 b 本身之意義，為於記法中 a 在 b 前。

24 方程及不等式之規則。由 §§17, 18 及 §§21, 22 之定義，即得

1. 設 $a = b$ 及 $b = c$ ，則 $a = c$ 。
2. 設 $a < b$ 及 $b < c$ ，則 $a < c$ 。
3. 設 $a = b$ 及 $b < c$ ，則 $a < c$ 。

數法

算術之主旨，在論自然數中存在之次序關係，及諸數可組合者之若干演算法。 25

算術之演算，以數法為起原。

數法。 欲發覺已知物羣之基數為何，則數此羣。 26

此運算為人所熟知。先取諸物之一標“一”，次取另一物標“二”，如此至諸物無遺而止。——如用口述記號「一」「二」……則須依記法中次序，慎勿遺漏；但選擇諸物，則依任何次序，或從其便，如此則最後所得之記號，即所求者——此羣中基數之名。蓋由於記法之基數次序，此最後記號表已數過若干記號 (§ 15)，從而此羣內有若干物 (§ 8)。

此數法之運算，可認為引導所計算之羣與自然數法之一部分——對應 (§ 2)——此部分自“一”起而以計算時所用最後數為止。

觀察自然數用於數法，有二重目的：(1) 僅用其某一羣為運算時之數碼，及 (2) 應用最後一字以記錄此記法之結果。

前已熟知諸物之選擇，與其次序無關。此可證明如下：

定理。 有限物羣無論依如何次序選擇諸物，其數法之結果皆同。 27

例如，假定依次序 P 選擇諸物時，一定羣數法之結果為 99，但依他次序 Q ，則為 97。

則在次序 P 中前 97 物所成之羣，將與次序 Q 中之全羣相等，蓋依假設，二者皆有與自然記法之前 97 數相匹配者 (§ 3)。

但此為不可能，因如此則將使此羣之一部分等於其全體；實則由假設，此羣為有限羣 (§ 7) 故也。

28 **基數之另一定義。** 適所證明之定理，可作為一有限羣基數定義之基礎，即：

有限物羣之基數為此羣之性質，不論以任何次序數此羣，均可由此性質達到同一自然數。

設以如 §.16 所定之自然記法，為論數之起點，則此為自然所趨之基數定義。

加 法

29 **加法定義。** 加 3 於 5，意即求自然記法中，5 以後何數佔第三位置。

在記法中，自 6 起，向前數三數，如：6, 7, 8，可求得此數 8。

表此演算用符號 +，讀作“加”，書作 $5+3=8$ 。

就一般而言，加 b 於 a 意即求自然記法中， a 以後何數佔第 b 位置。

因此記法中無最後之符號，故此數常可求得。稱之為 a 及 b 之和，而於其 a 與 b 之關係，以式 $a+b$ 表之。

30 **註** 求 $a+b$ 之方法，即於自然記法中，以 b 物一羣之元素逐步對應而加於 a 物之一羣。故 (1) 此方法最後之結果，為 $a+b$ 物之一羣 (§ 8)，及 (2) 設 a 及 b 表有限基數，則 $a+b$ 亦然，參看 5 頁腳註。