

# 高等数学

医学专业



湖南教育出版社

07150

医学专业

# 高等数学

---

湖南医学院 中山医学院 编  
四川医学院 武汉医学院

【8 + 6 + 8】

湖南教育出版社

# 高等数学

(医学专业)

湖南医学院 中山医学院 编  
四川医学院 武汉医学院  
责任编辑：欣 彬

\*

湖南科学技术出版社出版

湖南教育出版社出版 (长沙市展览馆路14号)

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

\*

1983年8月第1版第1次印刷

字数：385,000 印张：17 印数：1—13,500

统一书号：7284·241 定价：2.00元

# 前 言

1981年10月卫生部在武汉召开了教材编审会议，会议决定从83年级起高等数学为高等医学院校的必修课。目前尚无统一的教学大纲和合适的教材。为了解决高等数学的教材问题，在中国医学物理学会的组织和支持下，由湖南医学院、中山医学院、四川医学院和武汉医学院共同编写了这本“医学专业高等数学”。本教材可供高等医学院校医疗、儿科、口腔、卫生等专业学生使用，也可以作为生物科学和医学工作者的参考书。

全书共分一元微积分、多元函数微积分、函数项级数（以富里哀级数为主）、微分方程、概率论初步、矩阵与线性方程组和正交试验设计等七章。

本教材在内容的取舍上以医学基础和医学科学研究中常用的必备知识为前提，并在保证体系的完整性和逻辑的合理性的基础上，适当地与一般医学应用相结合，使其具有医学专业高等数学的特点。

为解决医学院校高等数学教学时数少而知识面要求较宽的矛盾，本教材以阐述基本概念、介绍基本方法为主，理论推导为辅。对于某些直观上或形式上易于接受而理论推导冗长的数学证明予以省略。

为了培养学生分析问题和解决问题的能力，本教材的编写贯彻理论联系实际的原则，力求做到基本概念阐述清楚，文字通俗易懂，同时编有较多的例题和习题，书后附有习题答案，便于

自学。

为了使本教材适应不同教学时数的要求，编写时考虑了在内容的广度和深度上可作一定的删减，各校可根据具体情况选用。书中标有星号的内容是留给学生今后需要时参考的。

参加本书各章编写工作的有：第一章(龙美才、胡纪湘)、第二章(青义学)、第三章(谭万达)、第四章(李中英,其中偏微分方程简介由郭必贵编写)、第五章(罗泮祥)、第六章(赵秀英、张惠安)、第七章(张惠安)。并由湖南医学院胡纪湘、国防科技大学俞威宜两同志主审。

四川医学院高子、湖南医学院谢加平、黄镇南等同志参加了编写大纲和审稿的讨论，提出了宝贵的意见，湖南医学院物理教研组李戈山、李飞宇两同志为本书绘制插图，还有的同志协助缮写稿件，一并在此表示谢意。

由于水平有限，实践经验不足，加以时间仓促，本书的缺点错误一定很多，恳切希望使用本书的教师、学生和读者惠予批评指正，以便再版时改进。

胡纪湘

1983年4月

# 目 录

|                          |           |
|--------------------------|-----------|
| <b>第一章 一元微积分</b> .....   | <b>1</b>  |
| § 1.1 函数的极限与连续 .....     | 1         |
| 一 函数概念 .....             | 1         |
| 二 函数的极限 .....            | 1         |
| 三 函数连续的概念 .....          | 13        |
| § 1.2 导数及微分 .....        | 16        |
| 一 导数的概念 .....            | 16        |
| 二 函数的微分 .....            | 25        |
| 三 中值定理和函数的图形 .....       | 29        |
| § 1.3 不定积分 .....         | 46        |
| 一 原函数 .....              | 46        |
| 二 不定积分 .....             | 47        |
| 三 积分法 .....              | 50        |
| § 1.4 定积分 .....          | 54        |
| 一 定积分的概念及性质 .....        | 54        |
| 二 牛顿—莱布尼兹公式 .....        | 61        |
| 三 定积分的计算 .....           | 64        |
| 四 定积分的应用 .....           | 68        |
| *五 广义积分 .....            | 76        |
| 习题一 .....                | 83        |
| <b>第二章 多元函数微积分</b> ..... | <b>87</b> |
| § 2.1 多元函数 .....         | 87        |
| 一 空间点的直角坐标系 .....        | 87        |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 二 多元函数的概念 .....          | 89  |
| 三 二元函数的几何意义 .....        | 91  |
| 四 二元函数的极限 .....          | 91  |
| 五 二元函数的连续性 .....         | 93  |
| § 2.2 偏导数 .....          | 94  |
| 一 偏导数的概念 .....           | 94  |
| 二 高阶偏导数 .....            | 96  |
| § 2.3 全微分 .....          | 98  |
| 一 全微分与偏微分 .....          | 98  |
| 二 全微分在近似计算中的应用 .....     | 100 |
| § 2.4 复合函数与隐函数的微分法 ..... | 102 |
| 一 复合函数求导法则 .....         | 102 |
| 二 全微分形式不变性 .....         | 105 |
| 三 隐函数微分法 .....           | 107 |
| § 2.5 二元函数的极值 .....      | 109 |
| 一 一般极值问题 .....           | 109 |
| 二 条件极值 .....             | 112 |
| § 2.6 最小二乘法与经验公式 .....   | 116 |
| 一 一次函数型 .....            | 116 |
| 二 指数函数型 .....            | 121 |
| 三 二次函数型 .....            | 123 |
| § 2.7 二重积分的概念与性质 .....   | 126 |
| 一 二重积分的概念 .....          | 126 |
| 二 二重积分的基本性质 .....        | 128 |
| § 2.8 二重积分的计算与应用 .....   | 130 |
| 一 化二重积分为两次单积分 .....      | 130 |
| 二 用极坐标计算二重积分 .....       | 135 |
| 三 二重积分的应用 .....          | 138 |
| 四 二重广义积分 .....           | 139 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 习题二 .....                  | 142 |
| <b>第三章 函数项级数</b> .....     | 147 |
| § 3.1 函数项级数及其收敛性 .....     | 147 |
| 一 数项级数和函数项级数 .....         | 147 |
| 二 级数的收敛性 .....             | 148 |
| 三 级数的基本性质和收敛性的判定 .....     | 150 |
| § 3.2 泰勒级数 .....           | 155 |
| 一 幂级数的收敛域 .....            | 155 |
| 二 幂级数的基本性质 .....           | 157 |
| 三 泰勒级数 .....               | 158 |
| 四 几个初等函数的幂级数展开式 .....      | 162 |
| 五 尤拉公式 .....               | 167 |
| 六 幂级数的应用 .....             | 168 |
| § 3.3 富里哀级数 .....          | 170 |
| 一 三角函数系的正交性 .....          | 170 |
| 二 尤拉—富里哀公式 .....           | 171 |
| 三 富里哀级数 .....              | 172 |
| 四 偶函数与奇函数的富里哀级数 .....      | 177 |
| 五 在任意区间上的富里哀级数 .....       | 180 |
| 六 将函数展开为正弦级数或余弦级数 .....    | 183 |
| 习题三 .....                  | 180 |
| <b>第四章 微分方程</b> .....      | 193 |
| § 4.1 微分方程的一般概念 .....      | 193 |
| § 4.2 可分离变量的微分方程 .....     | 197 |
| § 4.3 齐次微分方程 .....         | 203 |
| § 4.4 一阶线性微分方程 .....       | 206 |
| § 4.5 二阶微分方程的几个特殊类型 .....  | 213 |
| 一 $y'' = f(x)$ 型微分方程 ..... | 213 |
| 二 $y'' = f(y)$ 型微分方程 ..... | 214 |

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 三 $y'' = f(x, y')$ 型微分方程 ..... | 215 |
| 四 $y'' = f(y, y')$ 型微分方程 ..... | 218 |
| § 4.6 二阶常系数线性齐次微分方程 .....      | 220 |
| § 4.7 拉普拉斯变换 .....             | 227 |
| 一 拉普拉斯变换的定义 .....              | 227 |
| 二 拉普拉斯变换的性质 .....              | 231 |
| 三 拉氏变换应用举例 .....               | 235 |
| § 4.8 二阶常系数线性非齐次方程的解法 .....    | 238 |
| § 4.9 微分方程在医学上的应用 .....        | 241 |
| 一 扩散问题 .....                   | 241 |
| 二 神经兴奋 .....                   | 243 |
| 三 阻滞的人口增长 .....                | 244 |
| 四 一房室模型 .....                  | 246 |
| 五 房室模型在针刺研究中的应用 .....          | 249 |
| 六 传染病的传播 .....                 | 250 |
| ° § 4.10 偏微分方程简介 .....         | 252 |
| 一 一般概念 .....                   | 252 |
| 二 偏微分方程的推导 .....               | 254 |
| 三 二阶常系数线性偏微分方程的解法 .....        | 259 |
| 习题四 .....                      | 270 |
| <b>第五章 概率论初步</b> .....         | 275 |
| § 5.1 概率论的研究对象 .....           | 275 |
| § 5.2 随机事件及其运算 .....           | 278 |
| 一 随机事件 .....                   | 278 |
| 二 随机事件之间的关系 .....              | 276 |
| 三 随机事件之间的运算 .....              | 277 |
| 四 事件的运算律 .....                 | 279 |
| § 5.3 概率的定义 .....              | 282 |
| 一 概率的统计定义 .....                | 282 |

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 二 概率的古典定义 .....                | 285 |
| § 5.4 概率的加法公式 .....            | 287 |
| 一 互不相容事件的概率加法公式 .....          | 287 |
| 二 广义概率加法公式 .....               | 292 |
| § 5.5 条件概率和概率乘法公式 .....        | 294 |
| 一 条件概率 .....                   | 294 |
| 二 事件的独立性 .....                 | 296 |
| § 5.6 全概率公式和逆概率公式 .....        | 299 |
| 一 全概率公式 .....                  | 299 |
| 二 逆概率公式 .....                  | 301 |
| 三 计量诊断 .....                   | 303 |
| ° § 5.7 熵和信息量 .....            | 306 |
| 一 熵 .....                      | 306 |
| 二 联合熵 .....                    | 309 |
| 三 条件熵与信息量 .....                | 310 |
| § 5.8 随机变量及其分布 .....           | 313 |
| 一 两类常见的随机变量 .....              | 313 |
| 二 离散型随机变量及其概率函数和累积概率分布函数 ..... | 314 |
| 三 连续型随机变量的概率密度函数和分布函数 .....    | 317 |
| § 5.9 随机变量的数字特征 .....          | 319 |
| 一 离散型随机变量的数学期望 .....           | 320 |
| 二 连续型随机变量的数学期望 .....           | 322 |
| 三 随机变量的方差和标准差 .....            | 324 |
| § 5.10 二项分布 .....              | 330 |
| 一 独立试验序列 .....                 | 330 |
| 二 二项分布的数字特征 .....              | 335 |
| § 5.11 泊松分布 .....              | 337 |
| 一 背景和定义 .....                  | 337 |
| 二 泊松分布的数字特征 .....              | 342 |

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 5.12 正态分布 .....                                                                | 345 |
| 一 背景和定义 .....                                                                    | 345 |
| 二 正态分布的密度函数 $\varphi_{\mu, \sigma}(x)$ 和分布函数 $\Phi_{\mu, \sigma}(x)$ 的基本性质 ..... | 347 |
| § 5.13 大数定理和中心极限定理 .....                                                         | 354 |
| 一 切贝舍夫不等式 .....                                                                  | 355 |
| 二 大数定理 .....                                                                     | 357 |
| 三 中心极限定理 .....                                                                   | 359 |
| 习题五 .....                                                                        | 366 |
| <b>第六章 矩阵和线性方程组</b> .....                                                        | 377 |
| § 6.1 行列式及其性质 .....                                                              | 377 |
| 一 行列式 .....                                                                      | 377 |
| 二 行列式的子式及代数余子式 .....                                                             | 386 |
| 三 行列式的性质 .....                                                                   | 389 |
| 四 克莱姆法则 .....                                                                    | 391 |
| § 6.2 $n$ 维向量的基本概念 .....                                                         | 395 |
| 一 平面或空间的向量 .....                                                                 | 395 |
| 二 向量的运算 .....                                                                    | 396 |
| 三 $n$ 维向量及 $n$ 维向量空间 .....                                                       | 399 |
| 四 $n$ 维向量的线性关系 .....                                                             | 401 |
| 五 向量空间的基底和维数 .....                                                               | 404 |
| § 6.3 矩阵 .....                                                                   | 405 |
| 一 矩阵的概念 .....                                                                    | 405 |
| 二 矩阵的初等变换 .....                                                                  | 408 |
| 三 矩阵代数 .....                                                                     | 410 |
| 四 方阵的乘法和逆方阵 .....                                                                | 411 |
| § 6.4 线性方程组 .....                                                                | 418 |
| 一 非齐次方程组 .....                                                                   | 418 |
| 二 齐次方程组 .....                                                                    | 421 |
| 三 消去法 .....                                                                      | 422 |

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 习题六 .....                                                                             | 425 |
| <b>第七章 正交试验设计</b> .....                                                               | 429 |
| § 7.1 基本概念 .....                                                                      | 429 |
| § 7.2 利用正交表安排试验 .....                                                                 | 430 |
| 一 正交表 .....                                                                           | 430 |
| 二 利用正交表安排试验 .....                                                                     | 431 |
| 三 试验结果的分析 .....                                                                       | 432 |
| § 7.3 如何安排水平数不同的试验 .....                                                              | 436 |
| 一 利用混合型正交表 .....                                                                      | 436 |
| 二 拟水平法 .....                                                                          | 437 |
| § 7.4 如何安排有交互作用的试验 .....                                                              | 440 |
| 一 交互作用的概念 .....                                                                       | 440 |
| 二 两列间的交互作用表 .....                                                                     | 441 |
| 三 如何安排有交互作用的试验 .....                                                                  | 443 |
| 四 试验结果的分析 .....                                                                       | 444 |
| § 7.5 正交试验的方差分析 .....                                                                 | 447 |
| 一 概念 .....                                                                            | 447 |
| 二 具体方法 .....                                                                          | 449 |
| 三 例题 .....                                                                            | 451 |
| § 7.6 正交试验的几何解释 .....                                                                 | 455 |
| 习题七 .....                                                                             | 456 |
| <b>习题答案</b> .....                                                                     | 460 |
| 附录1 二项分布表 .....                                                                       | 471 |
| 附录2 泊松分布 $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 数值表 .....                                | 476 |
| 附录3 泊松分布 $\sum_{k \leq c} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 数值表 .....                | 477 |
| 附录4 泊松分布 $1 - F(c-1) = \sum_{k=c}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 表 ..... | 478 |

|      |                    |     |
|------|--------------------|-----|
| 附录5  | 标准正态分布的密度函数表 ..... | 490 |
| 附录6  | 标准正态分布表 .....      | 493 |
| 附录7  | $F$ 分布表 .....      | 499 |
| 附录8  | 部分常用正交表 .....      | 503 |
| 附录9  | 简单积分表 .....        | 512 |
| 附录10 | 拉氏变换简表 .....       | 526 |

# 第一章 一元微积分

## § 1.1 函数的极限与连续

### 一、函数概念

在同一个自然现象或技术过程中,往往有几个量同时在变化,而且这几个变量是彼此联系地遵循一定的规律在变化。在这一章中我们讨论两个变量的情形。

两个变量  $x$ 、 $y$ , 设  $x$  为自变量,  $y$  是因  $x$  的变化而变化的量, 称为因变量。对于变量  $x$  的每一个允许值, 总有变量  $y$  的唯一确定值与之对应, 则变量  $y$  称为变量  $x$  的单值函数, 记为  $y = f(x)$ ,  $x \in M$ ,  $M$  是自变量  $x$  的允许值集, 也叫函数的定义域。在具体问题中, 哪个变量是自变量, 哪个变量是因变量, 并不是固定不变的, 应视具体情况而定。

### 二、函数的极限

极限概念是高等数学中最基本的概念, 取极限的方法是解决高等数学中一系列问题的最基本的方法。通过对某种无限变化过程的研究来反映与确定客观事物某方面的固有特征, 这在方法上, 是与初等数学解决实际问题有着本质差别的。

所谓极限, 直观上理解就是一种无限过程的“总趋势”。例如, 圆所围成的几何图形, 它有着客观实在的面积大小, 然而推导圆面积的公式就完全不是象处理多边形那样将其分割为有限个三角

形，而是需要作出一个内接正多边形序列。在建立了极限理论之后，可以证明这个序列的“总趋势”（极限）为  $\pi R^2$ （ $R$  为圆的半径），于是，我们定义圆面积为  $\pi R^2$ 。

我国魏晋时数学家刘徽曾正确地计算出圆内接正3072边形的面积，从而得出  $\pi \approx 3.1416$ ，成就是非常卓越的。然而他在描述圆面积与正多边形面积序列的关系时说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”。这个结论显然是很不确切了。首先圆应该是永恒地可割，而不是“以至于不可割”；其次无论怎样分割，内接正多边形总是多边形，而不会“与圆合体而无所失矣”。原因是刘徽时代尚没有找到克服无限这个矛盾的工具。

多边形可以完全无失地分割为有限个三角形，由三角形面积通过有限步骤的算术运算而得出的多边形面积当然可以作为运算的逻辑结果；而圆面积却永远不能无失地用多边形代替，人们用“总趋势”来作为圆面积这从逻辑上说只能是一种规定，只是这种规定符合客观实际，能反映出圆形大小的真值。

那么，怎样去鉴别一种过程具有“总趋势”呢？这就需要数学上的严格描述，而描述只能凭借着人们已掌握的初等运算符号以及有限的运算步骤来完成，它就是下面的 $\varepsilon$ 语言。

**1. 函数的极限** 我们知道数列  $\{x_n\}$  可以看作自变量只取正整数  $n$  的函数，即  $x_n = f(n)$ ， $n=1, 2, 3, \dots$ ， $n$  的变化趋势显然是  $n \rightarrow +\infty$ 。

一般地，对于数列  $\{x_n\}$  来说，有下列定义：

**定义 1** 若对于每一个预先给定的任意小的正数  $\varepsilon$ ，总存在着一个正整数  $N$ ，对于一切  $n > N$ ，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

成立, 则  $a$  就叫做数列  $\{x_n\}$  当  $n \rightarrow \infty$  时的极限. 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

对于函数  $y = f(x)$  的极限, 它的自变量  $x$  则是连续变化的.  $x$  的变化趋势可能有两种情形: 一是  $x \rightarrow +\infty$ , 这和数列  $\{x_n\}$  的极限大体相似, 只是  $n$  是循着自然数列变化至  $+\infty$ , 而  $x$  则是循实数连续变化至  $+\infty$ ; 另一种是  $x \rightarrow x_0$  ( $x_0$  是定实数).

第一种情形函数的极限与定义 1 是相似的:

**定义 2** 若对于每一个预先给定的任意小的正数  $\varepsilon$ , 总存在着一个正数  $N$ , 使得当一切  $x$  适合不等式  $|x| > N$ , 不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则  $A$  就叫做函数  $y = f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  时的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

在上面的定义中若所考虑的  $x$  值本身都是正的, 就可记作  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 若所考虑的  $x$  值本身都是负的, 就可记作  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ .

**例 1** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

**证** 设  $\varepsilon$  是预先给定的正数, 要证明不等式  $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$  成立.

但这个不等式相当于  $\frac{1}{|x|} < \varepsilon$  或  $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ . 如果我们取  $N = \frac{1}{\varepsilon}$ , 则

对于适合  $|x| > N = \frac{1}{\varepsilon}$  的一切  $x$ , 不等式  $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$  即可成立,

这就证明了

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

**$x \rightarrow x_0$  时函数的极限** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一个邻域内有定义(在点  $x_0$  可以没有定义), 若  $x$  以任何方式趋近于  $x_0$  时, 对应的函数值  $f(x)$  与数  $A$  之差的绝对值可以小于预先给定的任意小的正数  $\varepsilon$ , 则  $A$  叫做函数当  $x \rightarrow x_0$  时的极限. 严格的定义如下:

**定义 3** 若对于每一个预先给定的任意小的正数  $\varepsilon$ , 总存在着一个正数  $\delta$ , 使得当一切  $x$  适合不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$ , 不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则  $A$  就叫做函数  $y = f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A.$$

数  $\delta$  要依  $\varepsilon$  的选取而定, 一般说来, 它随  $\varepsilon$  的减小而减小.

**例 2** 证明  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

**证** 函数在点  $x = 1$  没有定义, 但是它的极限存在或不存在与之并无关系. 事实上不等式  $\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$  在约去公因子  $x - 1 \neq 0$  后就化为

$$|x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon$$

这就证明了点  $x = 1$  的  $\delta$  邻域的存在而且可取  $\delta = \varepsilon$ .

在上述  $x \rightarrow x_0$  时函数  $f(x)$  的极限定义中, 所讨论的  $x$  值同时可在  $x_0$  的右侧或左侧. 但有时所讨论的  $x$  值, 只是小于或大于  $x_0$  的值, 则可把上面所给函数的极限的定义特殊化, 使仅限于  $x < x_0$  或  $x > x_0$  的数值. 当  $x$  从左侧趋于  $x_0$  时, 若函数  $f(x)$  的极限存在, 这极限就叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的左极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{或} \quad f(x_0^-)$$

同样, 当  $x$  从右侧趋于  $x_0$  时, 若函数  $f(x)$  的极限存在, 这极限