高等数学

医学专业

湖南教育出版社

医学专业

高等数学

湖南医学院　中山医学院
四川医学院　武汉医学院　编

湖南教育出版社

高等数学
（医学专业）
湖南医学院　中山医学院
四川医学院　武汉医学院　编
责任编辑：欣　彬

湖南科学技术出版社出版
湖南教育出版社出版（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

1983年8月第1版第1次印刷
字数：385,000　印张：17　印数：1——13,500
统一书号：7284·241　　定价：2.00元

前　言

1981年10月卫生部在武汉召开了教材编审会议，会议决定从83年级起高等数学为高等医学院校的必修课。目前尚无统一的教学大纲和合适的教材。为了解决高等数学的教材问题，在中国医学物理学会的组织和支持下，由湖南医学院、中山医学院、四川医学院和武汉医学院共同编写了这本“医学专业高等数学”。本教材可供高等医学院校医疗、儿科、口腔、卫生等专业学生使用，也可以作为生物科学和医学工作者的参考书。

全书共分一元微积分、多元函数微积分、函数项级数（以富里哀级数为主）、微分方程、概率论初步、矩阵与线性方程组和正交试验设计等七章。

本教材在内容的取舍上以医学基础和医学科学研究中常用的必备知识为前提，并在保证体系的完整性和逻辑的合理性的基础上，适当地与一般医学应用相结合，使其具有医学专业高等数学的特点。

为解决医学院校高等数学教学时数少而知识面要求较宽的矛盾，本教材以阐述基本概念、介绍基本方法为主，理论推导为辅。对于某些直观上或形式上易于接受而理论推导冗长的数学证明予以省略。

为了培养学生分析问题和解决问题的能力，本教材的编写贯彻理论联系实际的原则，力求做到基本概念阐述清楚，文字通俗易懂，同时编有较多的例题和习题，书后附有习题答案，便于

自学。

为了使本教材适应不同教学时数的要求，编写时考虑了在内容的广度和深度上可作一定的删减，各校可根据具体情况选用。书中标有星号的内容是留给学生今后需要时参考的。

参加本书各章编写工作的有：第一章(龙美才、胡纪湘)、第二章（青义学)、第三章（谭万达)、第四章(李中英，其中偏微分方程简介由郭必贵编写)、第五章(罗泮祥)、第六章(赵秀英、张惠安)、第七章(张惠安)。并由湖南医学院胡纪湘、国防科技大学俞戚宜两同志主审。

四川医学院高子、湖南医学院谢加平、黄镇南等同志参加了编写大纲和审稿的讨论，提出了宝贵的意见，湖南医学院物理教研组李戈山、李飞宇两同志为本书绘制插图，还有的同志协助缮写稿件，一并在此表示谢意。

由于水平有限，实践经验不足，加以时间仓促，本书的缺点错误一定很多，恳切希望使用本书的教师、学生和读者惠予批评指正，以便再版时改进。

胡纪湘

1983年4月

目　录

第一章　一元微积分

§1.1　函数的极限与连续

一、函数概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往有几个量同时在变化，而且这几个变量是彼此联系地遵循一定的规律在变化. 在这一章中我们讨论两个变量的情形.

两个变量 x、y，设 x 为自变量，y 是因 x 的变化而变化的量，称为因变量. 对于变量 x 的每一个允许值，总有变量 y 的唯一确定值与之对应，则变量 y 称为变量 x 的单值函数，记为 $y=f(x)$，$x\in M$，M是自变量 x 的允许值集，也叫函数的定义域. 在具体问题中，哪个变量是自变量，哪个变量是因变量，并不是固定不变的，应视具体情况而定.

二、函数的极限

极限概念是高等数学中最基本的概念，取极限的方法是解决高等数学中一系列问题的最基本的方法. 通过对某种无限变化过程的研究来反映与确定客观事物某方面的固有特征，这在方法上，是与初等数学解决实际问题有着本质差别的.

所谓极限，直观上理解就是一种无限过程的"总趋势". 例如，圆所围成的几何图形，它有着客观实在的面积大小，然而推导圆面积的公式就完全不是象处理多边形那样将其分割为有限个三角

形，而是需要作出一个内接正多边形序列．在建立了极限理论之后，可以证明这个序列的“总趋势”（极限）为 πR^2（R为圆的半径），于是，我们定义圆面积为πR^2。

我国魏晋时数学家刘徽曾正确地计算出圆内接正3072边形的面积，从而得出 $\pi\approx3.1416$，成就是非常卓越的．然而他在描述圆面积与正多边形面积序列的关系时说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”．这个结论显然是很不确切了．首先圆应该是永恒地可割，而不是“以至于不可割”；其次无论怎样分割，内接正多边形总是多边形，而不会“与圆合体而无所失矣”．原因是刘徽时代尚没有找到克服无限这个矛盾的工具．

多边形可以完全无失地分割为有限个三角形，由三角形面积通过有限步骤的算术运算而得出的多边形面积当然可以作为运算的逻辑结果；而圆面积却永远不能无失地用多边形代替，人们用“总趋势”来作为圆面积这从逻辑上说只能是一种规定，只是这种规定符合客观实际，能反映出圆形大小的真值．

那么，怎样去鉴别一种过程具有“总趋势”呢？这就需要数学上的严格描述，而描述只能凭借着人们已掌握的初等运算符号以及有限的运算步骤来完成，它就是下面的ε语言．

1.函数的极限　我们知道数列$\{x_n\}$可以看作自变量只取正整数值 n 的函数，即$x_n=f(n)$，$n=1$、2、3、…，n 的变化趋势显然是$n\to+\infty$。

一般地，对于数列$\{x_n\}$来说，有下列定义：

定义 1　若对于每一个预先给定的任意小的正数 ε，总存在着一个正整数 N，对于一切 $n>N$，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立，则 a 就叫做数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的极限。记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或x_n\to a \ (n\to\infty)$$

对于函数$y=f(x)$的极限，它的自变量 x 则是连续变化的。x 的变化趋势可能有两种情形：一是 $x\to+\infty$，这和数列$\{x_n\}$的极限大体相似，只是 n 是循着自然数列变化至$+\infty$，而 x 则是循实数连续变化至$+\infty$；另一种是 $x\to x_0$（x_0是定实数）。

第一种情形函数的极限与定义 1 是相似的：

定义 2 若对于每一个预先给定的任意小的正数 ε，总存在着一个正数 N，使得当一切 x 适合不等式$|x|>N$，不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则 A 就叫做函数 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$时的极限。记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad \underset{x\to\infty}{f(x)\to A} .$$

在上面的定义中若所考虑的 x 值本身都是正的，就可记作$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，若所考虑的 x 值本身都是负的，就可记作$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$。

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

证 设 ε 是预先给定的正数，要证明不等式$\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$成立。但这个不等式相当于$\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$ 或 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$。如果我们取 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$，则对于适合 $|x|>N=\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的一切 x，不等式$\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 即可成立，这就证明了

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

$x \to x_0$时函数的极限　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义(在点 x_0 可以没有定义)，若 x 以任何方式趋近于 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 与数 A 之差的绝对值可以小于预先给定的任意小的正数 ε，则 A 叫做函数当 $x \to x_0$ 时的极限．严格的定义如下：

定义 3　若对于每一个预先给定的任意小的正数 ε，总存在着一个正数 δ，使得当一切 x 适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$，不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则 A 就叫做函数 $y=f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限。记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad \underset{x \to x_0}{f(x)} \to A.$$

数 δ 要依 ε 的选取而定，一般说来，它随 ε 的减小而减小。

例 2　证明 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

证　函数在点 $x=1$ 没有定义，但是它的极限存在或不存在与之并无关系。事实上不等式 $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$ 在约去公因子 $x-1\neq 0$后就化为

$$|x+1-2|=|x-1|<\varepsilon$$

这就证明了点 $x=1$ 的 δ 邻域的存在而且可取 $\delta=\varepsilon$。

在上述 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义中，所讨论的 x 值同时可在 x_0 的右侧或左侧．但有时所讨论的 x 值，只是小于或大于 x_0的值，则可把上面所给函数的极限的定义特殊化，使仅限于$x<x_0$或$x>x_0$的数值。当 x 从左侧趋于x_0时，若函数 $f(x)$ 的极限存在，这极限就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad 或 \quad f(x_0^-)$$

同样，当 x 从右侧趋于 x_0 时，若函数 $f(x)$ 的极限存在，这极限