弹性力学

——解析法与数值法

王惠德　主编

（上册）

哈尔滨工业大学出版社

弹 性 力 学

——解析法与数值法

（上 册）

王惠德　冯家聪　范家齐　编

王 惠 德 主 编

哈 尔 滨 工 业 大 学 出 版 社

内容提要

本书分上、下两册。上册第一章至第十一章叙述弹性力学的基本理论、基本方法以及解决弹性力学问题的解析法。下册第十二章至第十八章为弹性力学问题的近似法与数值法，其中包括有限差分法、变分法及有限单元法。对于基本理论的论述，力求简明扼要。在基本公式的推导中，部分地使用了指标符号表示法和应用了张量代数。第二至第十三章后附有习题和答案。

本书可作为高等院校工科类专业研究生用教学参考书，也可供有关专业本科生以及教师和科技人员参考。

弹 性 力 学
——解析法与数值法
（上 册）
王忠德 主编

哈尔滨工业大学出版社出版
新华书店首都发行所发行
黑龙江省绥棱印刷厂印刷

开本850×1168 1/32 印张13.125 字数352,000
1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷
印数 1—2000
书号13341·24 定价2.75元
ISBN 7-5603-0010-3/O·3

前　　言

本书是为高等院校工科专业研究生编写的教学参考书，也可供工科有关专业本科生以及教师和科技人员参考。全书分上、下两册。上册第一章至第十一章为基本部分，讲述弹性力学的基本概念、基本理论和解决各种问题的基本方法（解析法）。对于基本理论的阐述，力求简明扼要，条理清晰，物理概念明确。为了简化冗长的公式推导和表达方式，本书部分地使用了指标符号表示法和应用了张量代数。考虑到便于读者阅读和学习，在附录中介绍了笛卡儿张量的基本运算。第八章对用复变函数法解平面问题，特别是孔口问题，作了较为详细的叙述。在第十一章空间轴对称问题中，较系统地叙述了弹性接触问题，并摘录了工程中适用的各种接触问题的计算公式。

下册第十二章至第十八章系统地介绍了工程中行之有效的近似法和数值法——有限差分法、变分法和有限单元法。鉴于有限单元法在解决工程实际问题中的重要作用，本书以较大篇幅系统地阐述了有限单元法的基本概念和基本方法，其中包括弹性力学平面问题、空间问题、温度场问题、热应力问题等等。

为了便于学习，较好地掌握基本理论并获得良好的解题方法的训练，在第二章至第十三章每章后面都有一定数量的习题，并附有答案，供读者参考。

鉴于在研究生培养计划中，板壳理论往往单独做为一门课程开设，同时考虑到篇幅所限，故未将板壳理论编入本书。

本书第一章、第十二章由王惠德编写，第二章至第十一章及第十三章由冯家骢编写，第十四章至第十八章由范家齐编写。全书由王惠德修改定稿。

本书由王光远教授和干光瑜教授审稿，并提出了不少宝贵意

见，编者表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中一定会有不少缺点和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

1986

目　　录

（上　　册）

第一章 绪 论

§ 1-1 弹性力学的任务

弹性力学是固体力学的一个分支，其任务是研究弹性体由于受外力作用或温度改变等原因而发生的应力、应变和位移的计算理论和计算方法。

弹性力学与材料力学总的任务是相同的。但材料力学基本上只研究杆状构件在拉压、剪切、弯曲、扭转作用下所产生的应力、应变和位移。而弹性力学所研究问题的范围要比材料力学广泛得多。工程中常见的许多问题，如截面高度与跨度相近的所谓“深梁”的弯曲问题，非圆截面柱体的扭转问题，有孔构件的孔边应力集中问题，弹性接触问题，非杆状构件或结构的计算问题等等，都必须用弹性力学的理论和方法来解决。对于上述许多问题，可以用弹性力学经典方法得到解析解(精确解)。对于大量复杂的工程实际问题，则可用弹性力学的数值解法获得工程上满意的近似解。

弹性力学既研究初等理论所不能解决的问题，同时也研究材料力学中基本构件的拉压、弯曲、扭转等问题。但是它的研究方法有所不同。材料力学在研究杆状构件时，除了从静力平衡条件、变形协调条件及物理条件（即应力应变关系）三方面进行分析以外，大都引用一些有关构件变形状态或应力分布的假定，从而大大简化数学推演，因此所得到的解答往往是近似的。弹性力学在研究问题时，尽管也需要把实际受力物体抽象成为计算简图，同时也引用某些基本假设（见§1-2)，但对受力物体内部的应力分布和变形状态，通常都不做假设，因此得到的结果就比较精确，并且可以用来校核材料力学里所得出的近似解答。例如，材料力学在研究梁的弯曲时，引用了梁截面变形后仍保持为平面

的假设。根据这一假设，得到横截面上的正应力按直线规律变化。弹性力学研究这一问题时，就无须引用平截面假设。其计算结果表明，只有当梁截面高度远小于跨度时，材料力学的结果才是可用的。如果梁截面高度与跨度是同阶的量（例如 $h>l/4$），则平截面的假设已不再适用。在这种情况下，横截面上的正应力并不按直线规律变化，而是按曲线规律变化，如图 1-1 所示。

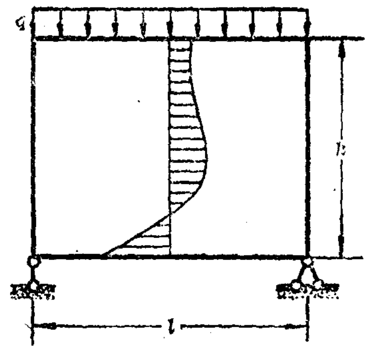

图 1-1

应力集中问题在工程实际中是很重要的。在计算具有小圆孔

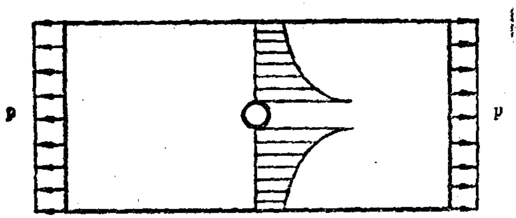

图 1-2

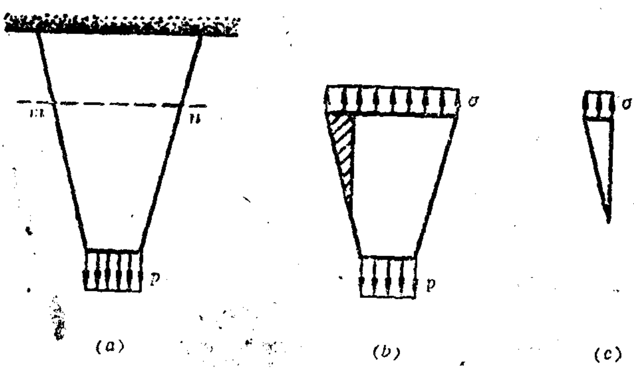

图 1-3

的受拉平板时，用材料力学的方法是不能计算出孔边应力集中的程度的。弹性力学的计算表明，小孔边缘处的最大拉应力会比平均拉应力高出几倍（图1-2）。又如变截面杆的拉伸问题（图1-3, a），若用材料力学方法计算，则得出横截面上的正应力是均匀分布的。这个结果只能满足整段的平衡条件（图1-3, b），而不能满足由边界附近切下的微元体平衡的条件（图1-3, c）。所以由材料力学所得的结果是不对的。正确地解决这个问题，必须用弹性力学的方法求解。

尽管目前弹性力学已建立了一套严密的完整理论，并可应用它们解决很多工程问题，但是，在许多实际工程问题中，由于结构外形、边界条件等情况比较复杂，能够用弹性力学经典方法求得解析解的问题是有限的。近二、三十年来，由于电子计算机的广泛应用，使得弹性力学的数值解法取得了很大进展，并且已经成为解决复杂的力学问题的强有力的工具。弹性力学的数值解法越来越占据着重要地位。

§ 1-2 弹性力学的基本假设

实际物体的性质及其在外界因素作用下所表现出来的力学性能，一般是很复杂的。在做理论分析时，如果企图完全如实地描述客观现象，有时是不可能的，同时也是不必要的。为了把客观上千变万化的现象上升为理论，就必须对客观事物加以抽象，忽略非本质的次要的影响因素，保留反映事物本质的主要影响因素。这就需要在满足实用所需精度的前提下作出一些必要的假设。下面介绍弹性力学所采用的基本假设。

一、均匀性假设　即认为物体内各点处材料的物理力学性质不随位置、坐标而变化。因此对从物体内任何一点处取出的微小单元体所作的分析，可应用于整个物体之中。

二、连续性假设　即认为物体所占据的空间内不存在任何空隙，均被构成该物体的介质所填满。这样，物体的任何物理量，如应力、应变、位移等才可能是连续变化的，因而可以用点的坐

标的连续函数加以表达，并可用微积分的数学手段来分析物体受力后各物理量的变化规律。实际上，一切物体都是由微粒组成的，严格说来，都不符合上述假设。然而，实践证明，一般工程材料的微粒的尺寸以及它们之间的距离都比物体的尺寸小得多。因此，基于连续性假设所得到的解答，就能反映问题的主要方面，而不会产生显著的误差。

三、完全弹性假设　所谓完全弹性是指物体在引起变形的外力被除去以后，能够恢复其原来的形状和尺寸，而不留有任何残余变形，也就不存在残余应力。即物体在不受外力时处于无初应力的自然状态。这样的物体在任一瞬时的应变，完全决定于这一瞬时所受的外力，与它过去的受力情况无关，一定的应变状态必对应着一定的应力状态。韧性材料在应力未达到屈服极限以前是近似的完全弹性体。脆性材料在应力未达到比例极限以前也是近似的完全弹性体。完全弹性体的应力与应变之间呈线性关系，即服从虎克定律。

四、各向同性假设　即假设物体在所有各个方向上具有相同的弹性性质，弹性常数不随方向而变化。虽然组成一般金属材料的晶体，就单个晶体来说是有方向性的，亦即是各向异性的，但晶体本身极其微小，而且数量极大，且呈随机排列，因而它们构成的整体却具有统观的各向同性性质。经过碾压或拉拔的钢材，其晶粒呈有方向的排列，因而具有各向异性性质。木材和竹材显然也是各向异性的。各向异性材料的弹性力学问题属于专门问题，不在本书研究范围之内。

以上几个假设统称为理想弹性体假设。

五、微小变形或微小位移假设　弹性体在受力后必然发生变形和位移，其初始的几何形状和尺寸也随之改变。因此，严格说来，在研究弹性体的平衡问题时，应以变形后的情况为准。但在一般情况下，弹性体的变形和位移远小于弹性体原来的尺寸，在建立平衡条件时是否考虑变形和位移，其结果差别不大。因此，为了简化数学分析，在列出平衡方程时通常略去变形和位移

的影响，而按未变形前的状态考虑。同样，在分析变形和位移时，在微小变形和位移的条件下，应变分量和转角都远小于1，故可略去应变和位移的二次幂或二次乘积以上的项。这样才可能使弹性力学的基本方程都简化为线性的代数方程和线性的微分方程，从而极大地减少了求解中的困难。

本书所讨论的问题，都是理想弹性体的线性问题。

第二章 应力分析

§ 2-1 面力和体力

作用在弹性体上的外力分为面力与体力两大类。作用在弹性体表面的外力称为表面力，简称面力。如液体压力、风力、两物体之间的接触力等。处在弹性体表面 S（图2-1）上的各点所受的面力一般是不相同的。表达作用在弹性体表面上某一点处的面力

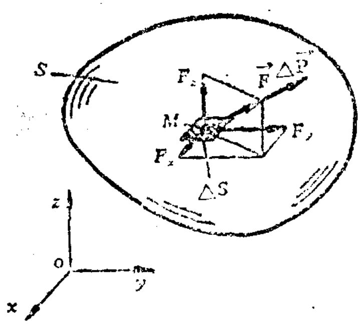

图 2-1

要用到极限的概念。在 M 点附近取微表面积 ΔS，若作用在 ΔS 上面力的合力为 $\Delta\vec{P}$，则在 ΔS 上面力的平均集度为 $\Delta\vec{P}/\Delta S$，令 ΔS 无限缩小而趋于 M 点，$\Delta\vec{P}/\Delta S$ 将不断改变其大小和方向；若面力的分布是连续的，则 $\Delta\vec{P}/\Delta S$ 的极限就是 M 点处面力的集度，我们用 $\vec{F}$ 来表示，即

$$\vec{F}=\lim_{\Delta S\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta S}\right) \tag{2-1}$$

面力是矢量，常用它在坐标轴 x，y，z 上的投影 F_x，F_y，F_z 或

F_i ($i=x, y, z$) 来表示，并称为面力分量。规定与坐标轴指向相同的面力分量为正，反之为负。面力的量纲为[力][长度]$^{-2}$，单位为牛顿/平方米 (N/m^2)，称为帕斯卡 (Pascal)，简称帕 (Pa)。

当面力集中作用在很小的表面上时，常将此微小表面上的面力合成而作用在一点上，称之为集中力，其单位为牛顿 (N)。

作用在弹性体内部各点上的外力，称为体积力，简称体力，常见的如重力和惯性力。体力的定义为

$$\vec{f}=\lim_{\Delta V\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta V}\right) \tag{2-2}$$

其中，ΔV 为弹性体内某点 C 附近的微小体积，$\Delta\vec{Q}$ 为作用在这微小体积上体力的合力，则 $\Delta\vec{Q}/\Delta V$ 为 C 点所受体力的平均集度。如令 ΔV 不断缩小而趋于 C 点则 $\Delta\vec{Q}/\Delta V$ 的极限即为该点所受体力的集度。$\Delta\vec{Q}$的极限方向也就是 $\vec{f}$ 的方向。体力的量纲为 [力] [长度]$^{-3}$，单位为牛顿/立方米(N/m^3)。体力矢量 $\vec{f}$ 也常用它在坐标轴上的投影 f_x, f_y, f_z 或f_i ($i=x, y, z$) 来表示，并称之为体力分量。

§ 2-2　应力和应力张量

弹性体在面力和体力作用下处于平衡状态。由于外力的作用，弹性体内将产生附加的分布内力（在未受外力作用时，弹性体内部即已存在着质点间的引力，在外力作用下，质点间的引力改变，亦即产生附加的内力，材料力学和弹性力学正是研究这种附加的内力）。所谓在一点处某一截面上的应力是指该截面上的附加分布内力在该点处的集度。

为了表达弹性体内某一点 M 处在 ab 截面上的应力，我们假想弹性体被 ab 截面切开，去掉任一部分（如图 2-2 所示，去掉

右边虚线部分），研究留下部分的平衡，即可求得舍去部分对留下部分所作用的分布力（即前述的附加内力）。

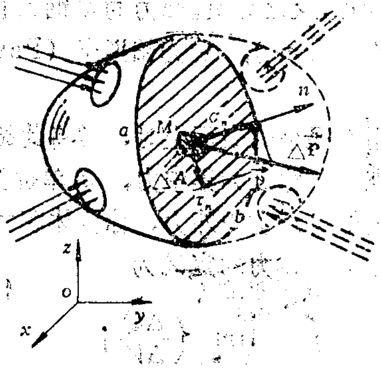

图 2-2

设作用在 M 点附近该截面上一小块截面积 ΔA 上的分布力的合力为 $\Delta\vec{P}$，则在 ΔA 上的平均应力为 $\Delta\vec{P}/\Delta A$，当 ΔA 逐渐向 M 点收缩时，该平均应力不断改变其大小和方向，其极限

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta A}\right) \qquad (2\text{-}3)$$

即为M点在 ab 截面上的应力矢量。应力的量纲为[力] [长度]$^{-2}$，单位为牛顿/平方米(N/m²，即帕)。在研究问题时，我们总是把 $\vec{p}$ 沿该截面的外法线方向和切线方向分解为法向分量——正应力 σ_n 和切向分量——剪应力 τ_n（σ_n 和 τ_n 的下标 n 均表示作用面的外法线为 n），因此 $\vec{p}$ 常称为总应力。显然应力不但与点的位置有关，而且还与截面的方位有关。

通过一点的截面的方位是可以任意连续变化的，与之相联系的该点不同方位截面上的应力也是连续变化的。通过弹性体内任一点的各个截面上的应力情况，称为该点的应力状态。

为了研究任一点 M 处的应力状态，我们在M点沿坐标轴方向截取一微小的平行六面体(微单元体)，把每个微面上的总应力按坐标轴方向分解，这样，在每一个面上就有一个正应力分量和两个