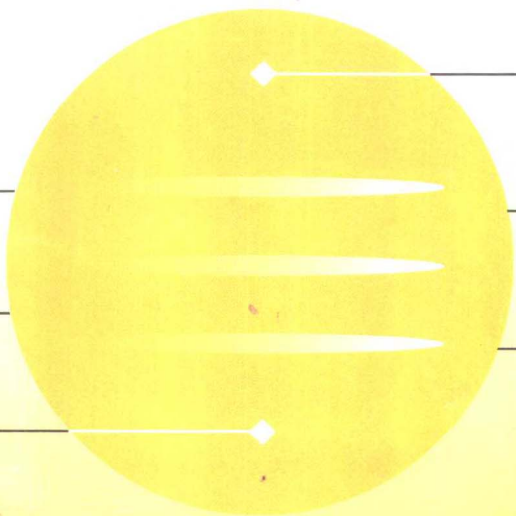




高等学校数学系列辅导教材

线性代数题解精选

● 赵德修 孙清华



- ◆ 赵德修《线性代数教程》习题解析
- ◆ 同济大学《线性代数》习题解析

华中科技大学出版社

高等学校数学系列辅导教材

线性代数题解精选

赵德修《线性代数教程》习题解析
同济大学《线性代数》习题解析

赵德修 孙清华

华中科技大学出版社出版

图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题精选/赵德修 孙清华
武汉:华中科技大学出版社, 2001年5月
ISBN 7-5609-2415-8

- I. 线…
II. ①赵… ②孙…
III. 线性代数-题解
IV. O151.2

线性代数题解精选

赵德修 孙清华

责任编辑:李立鹏

封面设计:刘 卉
责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

录 排:武汉皇荣文化发展有限责任公司照排室

印 刷:孝感日报印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:14.125

字数:354 000

版次:2001年5月第1版 印次:2001年5月第1次印刷

印数:1—4 000

ISBN 7-5609-2415-8/O·225

定价:16.00元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是“高等学校数学系列辅助教材”之一,是按照教育部《关于线性代数课程的基本要求》,并参照现行通用教材编写的.

本书由本课程解析;各章由知识提要,疑难解析、例题解析、习题解析所构成.对于读者全面地、系统地掌握线性代数课程的方法与内容是有帮助的.它是高等学校学生学习线性代数课程的重要参考书.也是优秀学生备考硕士研究生时的复习指导书.

本书可与高等教育出版社出版的,同济大学编的线性代数和赵德编的线性代数教程配套使用.

前 言

为适应新世纪的需要,我们编写了一套“高等学校数学系列辅助教材”。本丛书共分三册,即“线性代数题解精选”;“新编概率论与数理统计题解”;“新编复变函数题解”。这三门课程均是工科院校主课,是工程技术的重要基础,也是全国硕士研究生入学考试全国统考内容。高等学校本科(或专科)学生学习工程数学时,渴望有一套紧密配合教材的辅助参考书;部分优秀学生在备考硕士研究生时,渴望有一套系统的,有针对性的复习指导书。编者在多年教学实践的基础上,为帮助同学们掌握这些课程的方法与内容编写了本丛书。

线性代数是讨论代数学中线性关系经典理论的课程。它具有较强的抽象性、逻辑性与广泛的应用性。线性代数是高等学校工科本科各专业的一门重要的基础理论课,尤其在计算机广泛应用的今天,该课程的地位与作用更显得重要。

“线性代数题解精选”由本课程解析;各章由知识提要、疑难解析、例题解析、习题解析组成。本课程解析:将全面介绍该课程全貌,包括该课程的重要性;基本内容与要求;重点与难点;重要提示;综合测试等内容。对于初学者(可以先看,也可最后看此部分)可以对课程有个大概了解,以增强学习目的性。对复习者将是一个全面提高和深化的过程,从整体上、联系上、应用上掌握整个课程的方法与内容的过程。各章四部分为知识提要:提纲挈领,掌握精髓;疑难解析:有针对性地破解学生在学习过程中的各种疑难问题;例题解析:通过具有典型的例题思路分析,使学生理解原理,明确步骤,掌握方法,举一反三;习题解析:将给出现行通用教材中习题的答案与提示,使学生做后有个参考,评判对错,研究方法。

在编写过程中得到了空军雷达学院院长、政委郭锡林少将及

其他领导；武汉科技学院（原武汉纺织工学院）领导；华中科技大学出版社领导及编辑的热心支持与帮助，在此一并向他们表示衷心的感谢！

由于水平有限，错误与不当之处在所难免，欢迎读者批评、指正。

赵德修 孙清华

2001年3月 于武汉

目 录

课程解析	(1)
一 课程的重要性	(1)
二 课程的基本内容与要求	(1)
三 课程的重点与难点	(2)
附 1 线性代数课程教学基本要求	(2)
附 2 2000 年参加硕士研究生入学“数学一”的线性代数考试内 容和要求	(5)
重要提示	(8)
自测试卷与答案	(10)
总复习参考题的提示与答案	(27)
1995 年以来全国硕士研究生入学考试中线性代数试题及参考答案	(34)
第一章 行列式	(86)
知识提要	(86)
一 内容提要	(86)
二 基本要求、重点与难点	(89)
疑难解析	(89)
例题解析	(95)
一 计算排列的逆序数	(95)
二 计算(证明)行列式	(96)
三 克莱姆(Cramer)法则	(109)
习题解析	(114)
一 赵德修主编“线性代数教程”第一章行列式的习题提示与 答案	(114)
二 同济大学编“线性代数”习题一的提示与答案	(139)

第二章 矩阵	(145)
知识提要	(145)
一 内容提要	(145)
二 基本要求、重点与难点.....	(150)
疑难解析	(150)
例题解析	(155)
一 矩阵的运算	(160)
二 逆矩阵	(160)
三 分块矩阵	(166)
四 综合题	(171)
习题解析	(175)
一 赵德修主编“线性代数教程”第二章矩阵的习题提示与答案	(175)
二 同济大学编“线性代数”习题二的提示与答案	(221)
 第三章 线性方程组	 (224)
知识提要	(224)
一 内容提要	(224)
二 基本要求、重点与难点.....	(229)
疑难解析	(230)
例题解析	(238)
一 向量的相关性、极大无关组.....	(238)
二 关于秩	(242)
三 求解线性方程组	(246)
四 线性方程组的有关证明题	(253)
习题解析	(257)
一 赵德修主编“线性代数教程”第三章线性方程的习题提示 与答案	(257)
二 同济大学编“线性代数”习题三、四的提示与答案.....	(307)
 第四章 二次型	 (313)

知识提要	(313)
一 内容提要	(313)
二 基本要求、重点与难点	(315)
疑难解析	(315)
例题解析	(319)
习题解析	(327)
一 赵德修主编“线性代数教程”第四章二次型的习题提示与答案	(327)
二 同济大学编“线性代数”习题五的提示与答案见本书第五章后面	(359)
第五章 特征值与特征向量	(360)
知识提要	(360)
一 内容提要	(360)
二 基本要求、重点与难点	(363)
疑难解析	(364)
例题解析	(370)
一 矩阵的特征值与特征向量	(370)
二 施密特(Schmidt)正交化法、正交矩阵	(378)
三 矩阵的对角化	(383)
四 用正交变换法化二次型为标准形	(387)
五 关于实对称矩阵的其他问题	(391)
习题解析	(397)
一 赵德修主编“线性代数教程”第五章特征值与特征向量的习题提示与答案	(397)
二 同济大学编“线性代数”习题五的提示与答案	(439)

课程解析

一 课程的重要性

线性代数是一门重要的基础数学课程,它具有较强的抽象性、逻辑性和广泛的应用性.线性问题广泛地存在于科学技术的各个领域.某些非线性问题在一定条件下,可以转化为线性问题,尤其是在计算机日益普及和广泛应用的今天,该课程的地位与作用更显得重要.

掌握线性代数的基本概念、基本理论与基本方法,为解决工科各专业的实际问题,为进一步学习相关课程及扩大数学知识都将奠定必要的数学基础.

二 课程的基本内容与要求

线性代数的中心内容是研究有限维线性空间的结构和线性空间的线性变换.由于 n 维线性空间与 n 维向量空间是同构的;在 n 维向量空间的一组基下,线性变换与其矩阵是一一对应的.因此矩阵的运算和理论显得非常重要.

线性代数课程的基本内容和要求是:了解行列式的定义和性质,掌握简单的行列式的计算法;理解矩阵、矩阵的秩、逆矩阵的概念,掌握矩阵的运算(线性运算;乘法;转置;求逆),掌握矩阵秩的求法,矩阵的初等变换法,会利用初等变换法求矩阵的秩,求向量组的极大无关组和秩,求解线性方程组(行的初等变换),化矩阵为标准形(等价矩阵),化二次型为标准形…等;理解 n 维向量、向量组的相关性、向量组的最大无关组及其秩、 n 维向量空间、子空间、维数、基底、坐标等概念;了解向量组线性相关,线性无关的重要结论;掌握克莱姆定理,齐次线性方程组有非零解的充要条件、非齐

次线性方程组有解的充要条件及它们解的结构、性质与求法;掌握二次型及其矩阵表示,会用正交变换法化二次型为标准形,二次型的正定性及其判定法;理解矩阵的特征值与特征向量的概念,会求矩阵的特征值与特征向量,了解把线性无关的向量组化为正交规范化的施密特方法…等等.

三 课程的重点与难点

线性代数课程的重点是:理解线性相关性的概念和理论,掌握 n 维向量的线性运算;熟练掌握矩阵的基本运算方法及线性方程组解的理论与求解方法;掌握矩阵的特征值与特征向量、矩阵化为最简形(等价关系、合同关系、相似关系)、二次型正交变换法化为标准形及正定二次型的基本概念与理论; \mathbb{R}^n 的维数、基底、坐标,子空间及向量的夹角与长度等概念.在上述内容的学习中,要注重基本概念和理论、熟练的运算能力和一定的逻辑思维与推理能力的培养.其中的难点是向量的相关性与特征值、特征向量的概念和理论,它们是最重要的、是影响全局的、也是全课程的难点.再有就是线性空间、子空间及线性变换的概念与理论.

请参见高等学校工科数学课程教学指导委员会公布的《线性代数课程教学的基本要求》(见附)及中华人民共和国教育部1999年5月制订的《2000年参加全国硕士研究生入学“数学一”的对线性代数考试内容和要求》(见附2)(参加数学二;数学三;数学四考试的学生可找相应的内容参考,与数学一仅略有差别,此处不一一列出.)

附1 线性代数课程教学基本要求

线性代数是讨论代数学中线性关系经典理论的课程,它具有较强的抽象性与逻辑性,是高等学校工科本科各专业的一门重要的基础理论课.由于线性问题广泛存在于科学技术的各个领域,而某些非线性问题在一定条件下,可以转化为线性问题,因此本课程

所介绍的方法广泛地应用于各个学科.尤其在计算机日益普及的今天,该课程的地位与作用更显得重要.通过教学,使学生掌握该课程的基本理论与方法.培养解决实际问题的能力,并为学习相关课程及进一步扩大数学知识而奠定必要的数学基础.

本课程的内容按教学要求的不同,分两个层次.文中用黑体字排印的属较高要求,必须使学生深入理解,牢固掌握,熟练应用.其中,概念理论用“理解”一词表述,方法、运算用“掌握”一词表述.非黑体字排印的,也是教学中必不可少的,只是在要求上低于前者.其中,概念、理论用“理解”一词表述,方法、运算用“掌握”一词表述.非黑体字排印的,也是教学中必不可少的,只是在要求上低于前者.其中概念、理论用“了解”一词表述,方法运算用“会”或“了解”表达.

一 行列式

1. 了解行列式的定义和性质.
2. 掌握二三阶行列式的计算方法.
3. 会计算简单的 n 阶行列式.

二 矩阵

1. 理解矩阵概念.
2. 了解单位矩阵,对角矩阵,对称矩阵及其性质.
3. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置及其运算规律.
4. 理解逆矩阵的概念.
5. 掌握逆矩阵存在的条件与矩阵求逆的方法.
6. 掌握矩阵的初等变换.
7. 理解矩阵秩的概念并掌握其求法.
8. 了解满秩矩阵定义及其性质.
9. 了解分块矩阵及其运算.

三 向量

1. 理解 n 维向量的概念.
2. 理解向量组线性相关, 线性无关的定义.
3. 了解有关向量组线性相关、线性无关的重要结论.
4. 了解向量组的最大无关组与向量组的秩的概念.
5. 了解 n 维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念.

四 线性方程组

1. 掌握克莱姆(Cramer)法则.
2. 理解齐次线性方程组有非零解的充要条件及非齐次线性方程组有解的充要条件.
3. 理解齐次线性方程组的基础解系及通解等概念.
4. 理解非齐次线性方程组的解的结构及通解等概念.
5. 掌握用行初等变换求线性方程组通解的方法.

五 矩阵的特征值与特征向量

1. 理解矩阵的特征值与特征向量的概念, 会求矩阵的特征值与特征向量.
2. 了解相似矩阵的概念、性质及矩阵对角化的充要条件, 会求实对称矩阵的相似对角形矩阵.
3. 了解把线性无关的向量组正交规范化的施密特(Smidt)方法.
4. 了解正交矩阵概念及性质.

六 二次型

1. 掌握二次型及其矩阵表示, 了解二次型的秩的概念.
2. 会用正交变换法化二次型为标准形.
3. 了解二次型的正定性及其判别法.

附 2 2000 年参加硕士研究生入学“数学一”的线性代数考试内容和要求

一 行列式

考试内容

行列式的概念和基本性质 行列式按行(列)展开定理

考试要求

1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

二 矩阵

考试内容

矩阵的概念、单位矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质,矩阵的线性运算,矩阵的乘法,方阵的幂,方阵乘积的行列式,矩阵的转置,逆矩阵的概念和性质,矩阵可逆的充分必要条件,矩阵的伴随矩阵,矩阵的初等变换,初等矩阵,矩阵等价,矩阵的秩,初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法,分块矩阵及其运算.

考试要求

1. 理解矩阵的概念.
2. 了解单位矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵,以及它们的性质.
3. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置,以及它们的运算规律,了解方阵的幂、方阵乘积的行列式.
4. 理解逆矩阵的概念,掌握逆矩阵的性质,以及矩阵可逆的充分必要条件,理解伴随矩阵的概念,会用伴随矩阵求矩阵的逆.
5. 掌握矩阵的初等变换,了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念,理解矩阵的秩的概念,掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵

的方法.

6. 了解分块矩阵及其运算.

三 向量

考试内容

向量的概念 向量的线性组合和线性表示 向量组的线性相关与线性无关 向量组的极大线性无关组 等价向量组 向量组的秩 向量组的秩与矩阵的秩之间的关系 向量空间、子空间、基底、维数及坐标等概念 n 维向量空间的基变换和坐标变换 过渡矩阵 向量的内积 线性无关向量组的正交规范化方法 标准正交基 正交矩阵及其性质

考试要求

1. 理解 n 维向量的概念、向量的线性组合和线性表示.
2. 理解向量组线性相关、线性无关的定义,了解并会用有关向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.
3. 了解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念,会求向量组的极大线性无关组及秩.
4. 了解向量组等价的概念,了解向量组的秩与矩阵秩的关系.
5. 了解 n 维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念.
6. 掌握基变换和坐标变换公式,会求过渡矩阵.
7. 了解内积的概念,掌握线性无关向量组标准规范化的施密特(Schmidt)方法.
8. 了解标准正交基、正交矩阵的概念,以及它们的性质.

四 线性方程组

考试内容

线性方程组的克莱姆(Cramer)法则 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件 非齐次线性方程组有解的充分必要条件

线性方程组解的性质和解的结构 齐次线性方程组的基础解系和通解 解空间 非齐次线性方程组的通解 行初等变换求解线性方程组的方法

考试要求

1. 掌握克莱姆法则.
2. 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件.
3. 理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念.
4. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.
5. 掌握用行初等变换求线性方程组通解的方法.

五 矩阵的特征值和特征向量

考试内容

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质及求法 相似变换、相似矩阵的概念及性质 矩阵可对角化的充分必要条件及相似对角矩阵 实对称矩阵的特征值和特征向量及相似对角矩阵.

考试要求

1. 理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质,会求矩阵的特征值和特征向量.
2. 了解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件.
3. 了解实对称矩阵的特征值和特征向量的性质,掌握用相似变换化矩阵为对角矩阵的方法.

六 二次型

考试内容

二次型及其矩阵表示 合同变换与合同矩阵 二次型的秩 惯性定理 二次型的标准形和规范形 用正交变换和配方法化二次为标准形 二次型和对应矩阵的正定性及其判别法

考试要求

1. 掌握二次型及其矩阵表示, 了解二次型秩的概念, 了解二次型标准形、规范形的概念, 了解惯性定理.
2. 掌握用正交变换化二次型为标准形的方法, 了解用配方法化二次型为标准形的方法.
3. 了解二次型对应矩阵的正定性及其判别法.

重要提示

1. 学习“线性代数”与学习“高等数学”有什么区别?

答 “线性代数”在内容上、思想方法上及论证方法上都与“高等数学”有所区别。它具有较强的逻辑性和抽象性, 一开始就要高度重视。它又与中学所学的代数有一定的联系, 所以有些内容并不是完全陌生的。

线性代数的概念多, 推理论证多, 基本理论与结论多。只要每节、每章地, 一步一个脚印地弄懂、弄通, 记住有关的概念与结论, 并通过反复地应用(练习)来掌握它, 循序渐进掌握全课程是容易的。

2. 线性代数的概念多, 哪些概念最重要?

答 在众多的概念中, 向量的线性相关与线性无关; 矩阵的特征值与特征向量的概念最重要。许多概念与理论都与它们有关。例如向量组的秩、极大无关组、矩阵的秩、线性方程组的解的理论、线性空间的基底, 维数……等都与向量的相关性有关。掌握这两个概念和相关的理论对整个线性代数课程的学习是非常关键的。

3. 线性代数的推理论证多, 有哪些常用的论证方法呢?

答 在线性代数课程中, 主要的推理论证方法有: 数学归纳法, 反证法(又曰: 归谬法)。还有构造性的证明方法等。请参考赵德修主编的《线性代数教程》的思考题 1-1, 思考题 3-2, 思考题 2-4, …等。