高等教育自学考试配套练习丛书

高等数学（一）

杨爱珍　卢慧芳　主编

GAODENG SHUXUE (I)

上海财经大学出版社

全国高等教育自学考试配套练习丛书

高等数学(一)

杨爱珍
卢慧芳 主编

上海财经大学出版社

前　言

随着社会主义市场经济的迅猛发展与改革开放的不断深入,每个人在面临更多机遇的同时也经受着新的挑战,提高学历层次以适应当前形势的需要已成为共识,参加自学考试无疑是一条宽广的途径。对自学考试考生来讲,最关心的问题是如何按照考试大纲的要求,学习并有效地掌握大纲所规定的内容,了解这些内容在深度和广度上的具体要求,同时,要熟悉自学考试试卷中经常出现的题型及解法,以提高学习效率,最终取得理想的考试成绩。

本书根据国家教委“高等数学(一)自学考试大纲”及“高等数学考核目标”,认真分析了历年的试卷,并结合我们多年从事自学考试辅导的经验和体会,针对自学考试考生的特点编写而成。

本书具有如下特点:(1)吸收了历届试题中经常出现的典型考题并进行分析解答;(2)许多章节对基本题型和解题方法作了总结归纳,便于学生总结提高;(3)指出解题中容易出错的地方,在解答前都作了解题方法分析,有的在题后还对关键处作了注解;(4)各章均含有一定数量的练习题,书末附有答案或提示,做好这些习题,有利于提高考生解题的基本功;(5)历年自学考试试题是按章或按内容筛选,以便考生熟悉、掌握考试的形式、重点内容及常考题型;(6)附录中三套阶段自测题,有助于考生在自学过程中检查自己的学习成果。

本书按大纲分为八章,每章由以下四部分组成:

一、主要内容;

二、典型例题分析；

三、练习题；

四、历年自学考试试题。

本书由上海财经大学数学教研室教师编写。参加编写的成员有：杨爱珍（第一、二、六章）；卢慧芳（第三、四章）；凌明娟（第五章）；魏枫（第七章）；王雅芬（第八章及阶段自测试题）。最后由杨爱珍、卢慧芳总纂定稿。

在本书的编写过程中，我们得到了上海财经大学出版社及上海财经大学自学考试办公室的大力支持和帮助，并得到了富有教学经验的陈慧玉教授的精心指导，在此表示衷心感谢。

限于作者的水平，本书的不妥之处，恳请读者批评指正。

作者

1999 年 10 月

第一章　函　数

函数是高等数学的主要研究对象，历年考试有关函数的内容虽然只占5%左右，但在以后各章的内容中都要涉及到，因此这一章的内容是相当重要的。

一、主要内容

(一)预备知识

1. 集合的概念和运算

(1)基本概念

集合　具有某个共同属性的一些对象的全体称为集合。用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 等表示集合。

元素　构成集合的每一个对象称为元素。用小写字母 $a,b,c\cdots$ 等表示元素。

属于　a 是集合 A 中的元素，记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 中的元素，记作 $a\overline{\in}A$，读作 a 不属于 A.

空集　不含任何元素的集合称为空集。记作 $\varnothing$.

注意　$\{0\}\neq\varnothing$，$\{0\}$ 含有一个元素"0".

子集　如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做 B 的子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 任何一个集合都是它自身的子集，即 $A\subset A$. 空集是任何一个集合的子集，即 $\varnothing\subset A$.

全集　被研究的所有对象构成的集合称为全集，记作 Ω. 全

集是相对的。一个集合在一定的研究范围内是全集，在另一研究范围内就可能不是全集。例如，讨论的问题仅限于整数，则整数集为全集。如果讨论的问题为全体实数，则整数集就不是全集而是一个子集。

例1 若 $N=\{$全体自然数$\}$；

$R=\{$全体实数$\}$；

则 $2\in N, 2\in R, \frac{1}{2}\overline{\in}N, \frac{1}{2}\in R, N\subset R$，$N$ 是 R 的一个子集。

(2)集合的表示法

①列举法：指将集合中的元素不重复、不遗漏、不计次序地列在花括号$\{\ \}$内。

例2 由 2,4,6,8 组成的集合，可表示为$\{2,4,6,8\}$或$\{4,2,6,8\}$等。

注意 $\{a\}$与 a 不同，a 是元素，$\{a\}$是集合；两者关系是 $a\in\{a\}$。

②描述法：指把集合中元素所具有的某个共同属性描述在花括号$\{\ \}$内，用 $A=\{x\mid x$ 具有的共同属性$\}$表示。

例3 由$(2,5)$内的一切实数构成的集合 $A=\{x\mid 2<x<5\}$；方程 $x^2-4x+3=0$ 的根所组成的集合为 $A=\{x\mid x^2-4x+3=0\}$.

(3)集合间的关系

①包含关系：$A\subset B$ 或 $B\supset A$，称 A 包含于 B 或 B 包含 A；

②相等关系：$A\subset B$ 且 $B\subset A$，称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

(4)集合的运算

并集 由 A 或 B 中所有元素组成的集合称为集合 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$.

即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$，

则　$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$.

交集　由既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$，

即　$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$，

则　$A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$.

例 4　设 $A = \{x \mid 0 < x < 3\}, B = \{x \mid 1 \leqslant x < 4\}$. 求 $A \cup B, A \cap B$.

解：$A \cup B = \{x \mid 0 < x < 4\}$，

$A \cap B = \{x \mid 1 \leqslant x < 3\}$.

例 5　设 $A = \{1,2,3\}, B = \{4,5,6,7\}$. 求 $A \cup B, A \cap B$.

解：$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$，

$A \cap B = \varnothing$.

差集　由属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 与 B 的差集，记作 $A - B$，

即　$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \overline{\in} B\}$，

则　$A - B \subset A, (A - B) \cap B = \varnothing$.

补集　若集合 A 是 Ω 的一个子集，则由 Ω 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫作 A 的补集，记作 $\bar{A}$，

即　$\bar{A} = \{x \mid x \in \Omega \text{ 且 } x \overline{\in} A\}$，

则　$A \cap \bar{A} = \varnothing, A \cup \bar{A} = \Omega$.

例 6　设 $A = \{x \mid -1 < x < 2\}, B = \{x \mid x \geqslant 0\}$.
求 $A - B, B - A$，及 $\bar{A}, \bar{B}$.

解：$A - B = \{x \mid -1 < x < 0\}$，

$B - A = \{x \mid x \geqslant 2\}$，

$\bar{A} = \{x \mid x \leqslant -1, x \geqslant 2\}$，

$\bar{B} = \{x \mid x < 0\}$.

集合的关系及运算如图 1.1 所示。

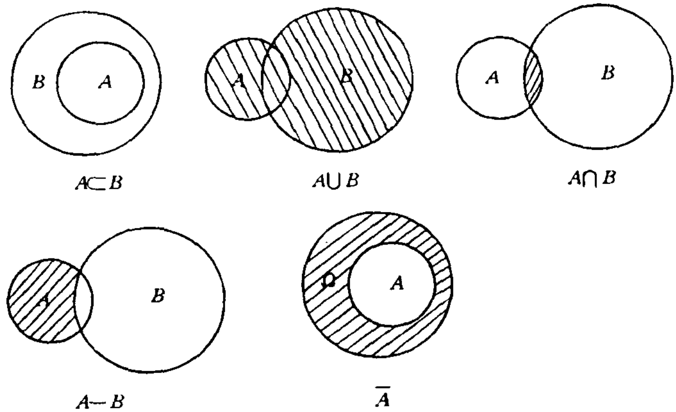

图 1.1

2．区间与邻域

(1)区间

若变量是连续变化的，则变量变化的范围称区间。

开区间：$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$表示满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 x 的集合，如图 1.2 所示。

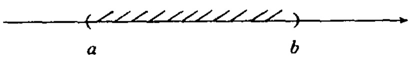

图 1.2

闭区间：$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$表示满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数 x 的集合，如图 1.3 所示。

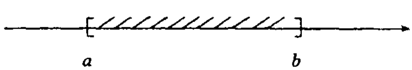

图 1.3

半开半闭区间：$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$表示满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的全体实数 x 的集合，如图 1.4 所示。

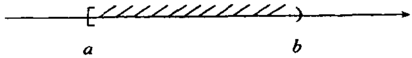

图 1.4

$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$表示满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的全体实数 x 的集合，如图 1.5 所示。

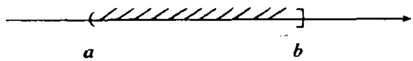

图 1.5

无穷区间：$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$表示大于 a 的全体实数的集合，如图 1.6 所示。

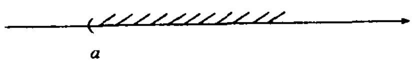

图 1.6

$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}$表示大于等于 a 的全体实数的集合，如图 1.7 所示。

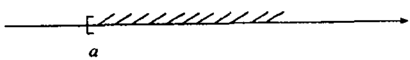

图 1.7

$(-\infty,b]=\{x \mid x<b\}$表示小于 b 的全体实数的集合，如图 1.8 所示。

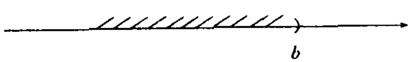

图 1.8

$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$表示大于等于 b 的全体实数的集合，如图 1.9 所示。

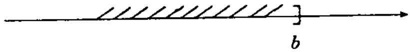

图 1.9

$(-\infty, +\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$表示全体实数.

(2)绝对值

一切实数与数轴上的点一一对应,一个数 x 的绝对值是它所对应数轴上的点与原点的距离,记作$|x|$,则:

$$|x|=\begin{cases}x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0.\end{cases}$$

它有如下性质:

①勾股性:$|x|=\sqrt{x^2}$;

②非负性:$|x| \geqslant 0$;

③对称性:$|x|=|-x|$;

④自比性:$-|x| \leqslant |x| \leqslant |x|$;

⑤三角不等式:$|x|-|y| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x|+|y|$;

⑥基本不等式:

若 $k>0$, $|x| \leqslant k \Leftrightarrow -k \leqslant x \leqslant k$,

$|x|<k \Leftrightarrow -k<x<k$,

$|x| \geqslant k \Leftrightarrow x \geqslant k$ 或 $x \leqslant -k$,

$|x|>k \Leftrightarrow x>k$ 或 $x<k$.

注意　充分条件,必要条件,充要条件与无关条件。

若由 A 能推出 B(用 $A \Rightarrow B$ 表示),则 A 是 B 的充分条件;B 是 A 的必要条件。

若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$,即 $A \Leftrightarrow B$,则 A 与 B 互为充要条件。

若 $A \nRightarrow B$ 且 $B \nRightarrow A$,则 A 与 B 为无关条件。

例 7　已知$|x-3|+(2-y)^2=0$,那么 x^y 等于(　　).

(A)3;　　(B)2;　　(C)8;

(D)9;　　(E)16

解:由于$|x-3|\geqslant 0$,且$(2-y)^2\geqslant 0$,故由已知得 $x-3=0$ 且 $2-y=0$,即 $x=3$, $y=2$,所以 $x^y=3^2=9$,选(D).

(3)邻域

x_0 的 δ 邻域:指以 x_0 为中心的开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)\Leftrightarrow \{x \mid |x-x_0|<\delta, \delta>0\}$.其中 x_0 为该邻域的中心,δ 为该邻域的半径,如图 1.10 所示。

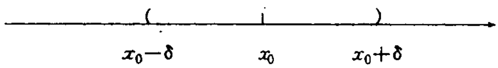

图 1.10

例 8　$|x-2|<3$,即表示以点 $x_0=2$ 为中心,3 为半径的邻域,也就是开区间$(-1,5)$.

(二)函数

1. 函数的概念

(1)函数的定义

两个变量 x、y,如果变量 x 在某个变化范围D 内任取一个数值时,变量 y 按照一定的规律有唯一确定的值与之对应,则称 y 是x 的函数,记作 $y=f(x)$.其中 x 称为**自变量**,自变量的取值范围 D 称为函数的**定义域**;y 称为**因变量**,它所取值的集合 $R=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$称为**函数的值域**。

定义域 D 与对应关系 f 是确定函数的两个基本要素,若两个函数的定义域和对应关系都相同,则表示它们为同一函数,函数与自变量记号无关。

例 9　若两个函数的定义域相同,则 $f(x)=f(t)$,即表示 $f(x)$与 $f(t)$为同一函数。

(2)函数的定义域及其求法

函数的定义域:使函数关系式在实数范围内有意义的自变量

x 的取值范围。

注意 在实际问题(应用题)中，函数的定义域需根据问题的实际意义来确定。

定义域的求法一般有：

①分式函数$\left(y=\dfrac{g(x)}{\varphi(x)}\right)$，则分母不等于零，即 $\varphi(x)\neq 0$.

②偶次根式函数$\left(y=\sqrt{\varphi(x)}\right)$，则被开方非负，即 $\varphi(x)\geqslant 0$.

③对数函数$(y=\log_a\varphi(x))$，则真数大于零，即 $\varphi(x)>0$.

④反三角函数$(y=\arcsin\varphi(x),\ y=\arccos\varphi(x))$，则$|\varphi(x)|\leqslant 1$.

⑤三角函数 $y=\tan\varphi(x)$，则 $\varphi(x)\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k=0,\ \pm 1,\ \cdots\cdots$；$y=\cot\varphi(x)$，则 $\varphi(x)\neq k\pi+\pi,\ k=0,\ \pm 1,\ \cdots\cdots$.

⑥分段函数的定义域为各定义区间的并集。

⑦多个函数的定义域为各函数定义域的交集。

⑧反函数的定义域为直接函数的值域。

⑨复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的定义域为 $u=\varphi(x)$的值域包含于 $y=f(u)$的定义域。

定义域一般用区间来表示。

例 10 ①$y=\ln(3x-2)$的定义域应满足 $3x-2>0$，故 $D=(\dfrac{2}{3},+\infty)$；

②$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$的定义域应满足 $x^2-x-2>0$，即$(x-2)(x+1)>0$，故 $D=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$；

③已知 $f(x)$的定义域为$[0,9)$，则 $f(x+1)$的定义域应满足 $0\leqslant x+1<9$，即 $-1\leqslant x<8$，故 $D=[-1,8)$；

④$y=\begin{cases}\sqrt{9-x^2}, & |x|\leqslant 3,\\ x^2-9, & 3<|x|<4\end{cases}$的定义域应是$\{x\mid |x|\leqslant 3\}\cup\{x\mid 3<|x|<4\}$，即$\{x\mid |x|<4\}$，故 $D=(-4,4)$.

(3)对应规律——函数值

当自变量 x 取某一定值x_0 时,函数所对应的取值 $f(x_0)$称为函数在 $x=x_0$ 的函数值,记作 $y_0=f(x_0)=f(x)|_{x=x}$.

例 11　设 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$. 求 $f(0)$, $f(1)$, $f(x-1)$, $f(\frac{1}{x})$, $f[f(x)]$.

解:$f(0)=\left.\frac{x-1}{x+1}\right|_{x=0}=\frac{0-1}{0+1}=-1$,

$$f(1)=\left.\frac{x-1}{x+1}\right|_{x=1}=\frac{1-1}{1+1}=0,$$

$$f(x-1)=\frac{(x-1)-1}{(x-1)+1}=\frac{x-2}{x},$$

$$f(\frac{1}{x})=\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{1-x}{1+x},$$

$$f[f(x)]=f(\frac{x-1}{x+1})=\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=-\frac{1}{x}.$$

综上所述,只有当两个函数的定义域 D 和对应关系 f 都相同时,称这两个**函数相同**或**相等**,与自变量和因变量用什么记号表示无关,即 $y=f(x)$与 $u=f(t)$为同一个函数。

例 12　下列各对函数相同否? 为什么?

①$f(x)=\frac{x^2}{x}$, $g(x)=x$;

②$f(x)=x$, $g(x)=|x|$;

③$f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=|x|$.

解:①不相同。因为定义域不同,$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$即一切实数。

②不相同。虽然定义域相同均为$(-\infty,+\infty)$,但对应关系不

同；$x<0$ 时，$f(x)=x<0, g(x)=-x>0$.

③相同。因为 $f(x), g(x)$ 的定义域相同均为 $(-\infty,+\infty)$，对应关系也相同，$f(x)=\sqrt{x^2}=|x|=g(x)$.

(4)函数的表示法

函数的表示法通常有三种形式：解析法、表格法和图示法。其中以解析法表示函数最为简捷、常见。

解析法表示函数的特例——分段函数，即对于定义域内自变量 x 的不同取值范围，有不同的解析表达式的函数称为分段函数。

例 13 $$y=f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\leqslant x<0, \\ 1, & 0<x<1, \\ 2x-1, & 1\leqslant x<2. \end{cases}$$
它是一个分段函数，它的图形如图 1.11 所示。

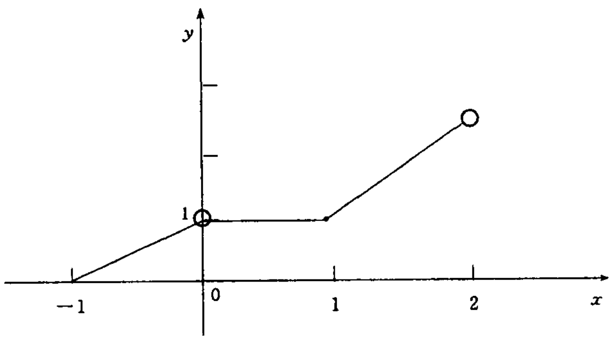

图 1.11

其定义域为 $[-1,0)\cup(0\quad 2)$.

$f(-\frac{1}{2})=(x+1)|_{x=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$； $f(\frac{3}{2})=(2x-1)|_{x=\frac{3}{2}}=2$.

注意 分段函数的定义域是各个定义区间的并集。

分段函数的函数值可以按照不同区间的对应关系求得。

2. 函数的主要性质

(1)有界性

若存在一个正数 M,对一切 $x\in(a,b)$ 均有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界;否则,就称 $f(x)$ 在该区间内无界。

从几何角度上看,以 M 为界的函数 $y=f(x)$,其图形完全落在 $y=M$ 与 $y=-M$ 这两条直线之间。

例 14 ① $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$,在 $(-\infty,+\infty)$ 内均为有界,这是因为 $|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$;

② $y=\ln(x-2)$ 在区间 $(3,4)$ 内有界,但在 $(2,+\infty)$,$(2,3)$,$(4,+\infty)$ 内无界。

注意 函数是否有界与区间有关。

(2)单调性

若对任何 $x_1,x_2\in(a,b)$. 当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加;当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少。(a,b) 称为单调增(减)区间。

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数。它们的图形分别如图 1.12(a)和(b)所示。

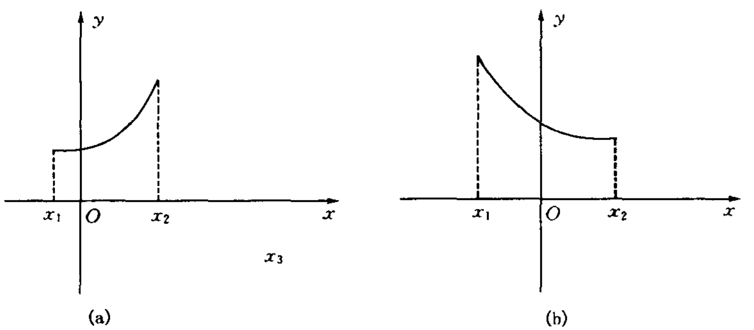

图 1.12

例 15 ① $y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加,$y=\ln x$ 在

$(0,+\infty)$内单调增加;

②$y=e^{-x}$在$(-\infty,+\infty)$内单调减少;

③$y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内为非单调函数;但在$(-\infty,0)$内单调减少,在$(0,+\infty)$内单调增加。

注意 函数的单调性与区间有关。学了第四章后可用导数来讨论。

(3)奇偶性

设 $f(x)$定义在对称区间$(-l,l)$,若对任何 x, $-x\in(-l,l)$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数;若都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数。

从几何的角度来看,偶函数图形关于 y 轴对称;奇函数图形关于原点对称。如图 1.13(a)和(b)所示。

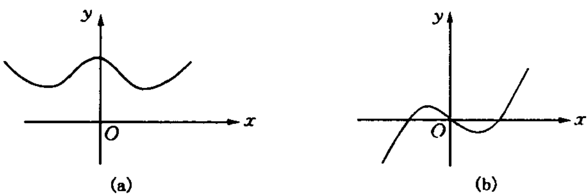

图 1.13

例 16 ①$y=x^2$, $y=\cos x$ 都是偶函数。因为$(-x)^2=x^2$, $\cos(-x)=\cos x$.

② $y=x^3$, $y=\sin x$ 都是奇函数。因为$(-x)^3=-x^3$, $\sin(-x)=-\sin x$.

③ $y=\sin x+\cos x$, $y=x+x^2$ 均为非奇非偶函数。因为 $f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$,它既不等于$f(x)=\sin x+\cos x$,也不等于$-f(x)=-(\sin x+\cos x)$;同理,$(-x)+(-x)^2=-x+x^2$,既不等于 $x+x^2$,也不等于$-(x+x^2)$.

注意 函数的奇偶性在对称区间$(-l,l)$上讨论。

(4)周期性

对于函数 $f(x)$,如果存在一个正数 T,使得对于定义域内的任意 x,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为**周期函数**,而使上式成立的最小正数 T 为该周期函数的**周期**。

注意 函数的周期性在定义域内讨论。

例 17 ①$y=A\sin(\omega x+\theta)$, $y=A\cos(\omega x+\theta)$是周期函数,周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$;

②$y=A\tan(\omega x+\theta)$, $y=A\cot(\omega x+\theta)$,是周期函数,周期 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$.

3. 初等函数

(1)基本初等函数

幂函数 $y=x^u$(u 为任何实数);

指数函数 $y=a^x(a>0, a\neq1)$;

对数函数 $y=\log_a^x(a>0, a\neq1)$;

三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$;

反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$.

为便于学习,我们将五类基本初等函数的定义、图形及运算公式归纳如下:

a)幂函数 $y=x^u$(u 为任何实数),如图 1.14 所示。

b)指数函数 $y=a^x(a>0, a\neq1)$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$,图形恒经过$(0,1)$,当 $a>1$ 时,函数单调增加;当 $0<a<1$ 时,函数单调减少。如图 1.15 所示。