高等财经院校试用教材

数理统计方法
在经济管理中的应用

刘序球 主编

中国财政经济出版社

（京）新登字038号

高等财经院校试用教材
数理统计方法在经济管理中的应用
刘序球　主编
*
中国财政经济出版社　出版
（北京东城大佛寺东街8号）
新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售
北京市通县永乐印刷厂印刷
*
850×1168毫米　32开　12.875印张　305 000字
1991年9月第1版　　1991年9月北京第1次印刷
印数：1—2 100　　定价：3.55元
ISBN 7-5005-1422-5/F　1340（课）

目　录

第一章　概率统计基础

§1·1　随机事件与概率

一、随机事件和样本空间

在社会经济现象或自然现象中，有一类现象，是在一组确定的条件下，有时出现，有时不出现的。如一商店在同样的条件下经营，日销售额并不一定相同；一个家庭生活收入水平不变，商品价格和外界条件也不变，但每天的生活费用并不完全相同。这一类不确定现象，通称随机现象。另一类是在一定条件下，必然发生（或必然不发生）的现象，如在纯粹自由竞争的市场上的某种商品，若该商品的供应量增多，必然引起该商品价格下降，这类现象称确定性现象。

对随机现象进行的观察或实验，称随机试验（简称试验），如考察一银行储蓄所内某一天的储户数，试验结果有 N+1 种可能，（N 表示某个正整数），是一随机试验。它具有的特性是：每次试验的可能结果不止一个，且事先能明确所有的结果；进行一次试验前，不知哪个可能结果会出现，但每一结果发生的可能性大小是确定的。

每次试验，由于一定的目的，观察到各种不同的可能结果，称试验的每一个可能的结果为一随机事件（简称事件），用大写英文字母A　B、C、……等表示，并把不可能再分的事件，称

为基本事件。例如掷一颗骰子，出现1点，是一基本事件，出现2点（或3、……6点），也是一基本事件。由基本事件复合而成的事件，称复合事件。如掷一颗骰子的试验中，出现“奇数点”这一事件，就是一复合事件。

在一定条件下，肯定会发生的事件，称必然事件。

在一定条件下，肯定不会发生的事件，称不可能事件。

必然事件和不可能事件，从以上定义看，都是描述确定性现象的，为讨论问题方便，也把它当作特殊的随机事件处理。

由随机试验所有基本事件构成的集合，称随机试验的样本空间，记为Ω，其中每一个基本事件（元素）称为样本点。

因为样本空间Ω，是一个集合，故可用集合表示事件，无论是基本事件，复合事件，还是必然事件和不可能事件，它们均为样本空间的子集，其具体对应关系为：

基本事件$\longleftrightarrow\Omega$的某个元素

复合事件$\longleftrightarrow\Omega$的某个子集

必然事件$\longleftrightarrow\Omega$

不可能事件$\longleftrightarrow\phi$

二、事件的关系与运算

1．事件的包含与相等。设有事件A和B，若事件A发生，必然导致事件B发生，则称事件B包含事件A，记作$B\supset A$，或$A\subset B$。

若事件B包含事件A，同时事件A也包含事件B，则称事件A与事件B相等（等价），记作$A=B$。

2．事件的互斥。若事件A与事件B不能同时发生，则称事件A与事件B是互斥的（或称互不相容）。显然，基本事件是互斥的。

以上是几种事件的关系，下面介绍事件的运算。

3．事件的和（并）。由事件A所包含的所有基本事件与事件B所包含的所有基本事件共同组成的随机事件，称事件A与事件B的和，记作$A\cup B$（可推广到多于两个事件的情况）。

显然，当且仅当事件A与事件B至少有一个发生时，和事件$A\cup B$才发生。

4．事件的积（交）。事件A与事件B的全部公共基本事件所组成的随机事件，称为事件A与事件B的积，记作$A\cap B$，或AB（可推广到多于两个事件的情况）。

显然，当且仅当事件A与事件B都发生时，积事件AB才发生。

5．事件的差。由包含在事件A中，但不包含在事件B中的所有基本事件所组成的随机事件，称为事件A与事件B的差，记为$A-B$。

显然，当且仅当事件A发生而事件B不发生时，差事件$A-B$发生。

6．逆事件（或称对立事件）。由样本空间中除去A包含的基本事件后，剩余的全部基本事件所组成的随机事件称为事件A的逆事件。记作$\overline{A}$。

显然，当且仅当事件A不发生，逆事件$\overline{A}$发生。两事件A与B互逆的充分必要条件是：$A\cup B=\Omega$，$AB=\phi$。

而A与B互斥，仅仅是指：$AB=\phi$，因此，若两个事件A与B互逆，则它们必互斥，但若事件A与B互斥，则它们不一定互逆。

三、古典概型

（一）古典概型与古典概率的定义

考察一个随机试验中的随机事件，它们有的出现的可能性大些，有的出现的可能性小些，需要有一个数字给予描述，这是概率的粗略含义。

古典概型。具有以下两个特点的随机试验，称古典概型：

1．样本空间是有限的，即试验所有可能结果，只有有限个（即基本事件的个数是有限的）。

2．每个样本点，发生的可能性都相等，即每个基本事件的出现，都是等可能的。

古典概率。在古典概型中，设共有n个样本点，则对任意一个包含有m个样本点的随机事件A，其概率为：

$$P(A)=\frac{m\ (\text{有利于A的基本事件数})}{n\ (\text{基本事件总数})} \qquad (1\cdot1)$$

〔例1.1〕掷一颗质体均匀的骰子，观察其出现的点数，试求下列事件的概率：

（1）"出现1点"；（2）"出现奇数点"；

（3）"点数不超过4"；（4）"出现偶数点"；

（5）"点数不小于7"。

解：随机试验的样本空间为：

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots\cdots\omega_n\}$$

其中ω_i表示"出现i点"（$i=1, 2\cdots\cdots, 6$），用A、B、C、D、E分别表示以上所求（1）、（2）、（3）、（4）、（5）中各个事件。显然，样本空间所含基本事件总数是有限的，且由于骰子的均匀对称性，可知每个ω_i出现的等可能性相等，因此，这个试验属于古典概型。由于

$A=\{\omega_1\}$，$B=\{\omega_1,\ \omega_3,\ \omega_5\}$，

$C=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4\}$，$D=\{\omega_2,\ \omega_4,\ \omega_6\}$，

$E=\phi$，

则数$P(A)=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，

$P(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，$P(D)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，

$P(E)=0$

（二）概率与频率

为了观察随机事件发生可能性的大小，常在同一条件下，把一个试验重复n次，记之为E，设随机事件A在这n次试验中出现了m次，则比值$\frac{m}{n}$，称为事件A出现的频率，记为：

$$f_E(A)=\frac{m}{n}$$

频率也可反映事件发生的可能性大小，但与概率却不是一回事，概率是从随机事件本身的结构得出来的，它反映了随机事件所固有的客观属性，它在试验之前就已存在，它的大小与是否试验及试验次数无关。例如，抛一硬币试验，出现正面的概率永远是1／2，而频率是从多次试验的结果来考察随机事件发生的可能性大小，因而有随机性。它的数值依赖于试验，对同一事件，不仅试验次数不同，可以得出不同的频率，就是试验的次数相同，也不一定得到相同的频率。

一般来说，在对随机试验进行大量重复的过程中，随件事件A出现的频率$f_E(A)$，将会随n的不断增大而渐趋于稳定，这个稳定值就是A的概率$P(A)$。即：

$P(A)\approx f_E(A)$　　（n充分大）

（三）概率的性质

1．非负性：对任一随机事件A，都有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

2．正则性：$P(\Omega)=1$；$P(\phi)=0$。

3．可加性：设A_1、A_2……，为有限个或可列个两两互斥的事件，即：$A_iA_j=\phi(i\neq j)$，则有

$$P(U_iA_i)=\sum_i P(A_i)$$

4．减法性质：设$A\subset B$，则

$P(B-A)=P(B)-P(A)$

5．单调性：设$A\subset B$，则$P(A)<P(B)$。

四、概率的加法定理

（一）加法定理

设A、B为任意两个随机事件，则有：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (1\cdot2)$$

证：将$A\cup B$表示为两个互斥事件之和。

$A\cup B=A\cup(B-AB)$。

因为A与$B-AB$互斥，则根据性质3有：

$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$

又由于$AB\subset B$，则根据性质4得：

$P(B-AB)=P(B)-P(AB)$

于是

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

利用数学归纳法，本定理可推广到任意有限个事件上去。

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}(A_iA_j)$$

$$+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i) \qquad (1\cdot3)$$

〔例1.2〕某设备由甲、乙两部件组成，当超载负荷时，A＝“甲部件出故障”，其概率为0.82，B＝“乙部件出故障”，其概率为0.74，而甲、乙两部件同时出故障的概率为0.63，求超载负荷时，至少有一部件出故障的概率。

解：由于A、B两事件不是互斥的，故

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=0.82+0.74-0.63=0.93$$

即在超载负荷的情况下，至少有一部件出故障的概率为0.93。

（二）互补定理

对立事件概率之和等于1，即：

$$P(\bar{A})+P(A)=1 \qquad (1\cdot4)$$

这是加法定理推论。

有时求一个事件的概率比求它的对立事件的概率要困难，则可通过它的对立事件的概率来求所需事件的概率。

〔例1·3〕一批产品共50件，其中有45件合格品，现从这批产品中任取3件，求其中有不合格产品的概率。

解法1：设A＝“取出的产品中有不合格品”，A_i＝“取出的3件产品中有i件不合格品”（$i=1, 2, 3$），则

$A=A_1+A_2+A_3$，且A_1，A_2，A_3是两两互斥的。故有

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

$$=\frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}+\frac{C_5^2C_{45}^1}{C_{50}^3}+\frac{C_5^3}{C_{50}^3}$$

$$=0.2760$$

解法2：依上所述，有

$\bar{A}$＝“取出的3件产品都是合格的”，则有

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}\approx0.2760$$

五、条件概率与乘法公式

（一）条件概率

在实际问题中，有时除要知道随机事件发生的概率外，还需知道"事件A已经发生"的条件下，事件B发生的概率是多少？这时B的概率，是在A已经发生的前提下的概率，所以称在A发生的条件下B的条件概率，记为P（B/A），读作B对A的条件概率。

〔例1·4〕一批零件共100个，其中次品10个，正品90个，从中连续抽取两次，每次抽一个，做非回置式抽样，

求：（1）第一次抽到正品的概率；（2）第一次取到正品后，第二次抽到正品的概率。

解：设A＝"第一次取到正品"，B＝"第二次取到正品"，则有

$$（1）P(A)=\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$$

$$（2）P(B/A)=\frac{89}{99}$$

在非古典概型的一般情形中，这里不讨论条件概率的严格定义，在实际工作中，不难根据问题的直观意义理解条件概率这一概念。从上例也可看出：

$$P(B/A)=\frac{\text{在缩减的样本空间中有利于B的基本事件数}}{\text{缩减的样本空间基本事件数}} \qquad (1\cdot5)$$

在古典概型中，条件概率的计算，除了可按（1·5）式直接进行外，还可用以下公式

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (1\cdot6)$$

进行计算。事实上，设样本空间中有n个基本事件，其中有利于A的有m_1个，在这m_1个中有利于B的基本事件有m_2个，这时，在Ω中有利于AB的基本事件共有m_2个，于是

$$P(B/A)=\frac{m_2}{m_1}=\frac{m_{2/n}}{m_{1/n}}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

公式（1·6）虽是仅就古典概型推导出来的，但在一般情形中也是成立的，对此不予讨论。

通过条件概率的计算，会改变我们对某事件发生可能性大小的认识。例如，用B表示"某公司准备生产某产品"，原认为缺少某种原料，准备生产该产品的可能性不大，设P(B)=0.1，以后能进口这种原料（用A表示这一事件），就必须以P（B/A）来代替P（B）。

（二）乘法公式

由条件概率公式而推出乘法公式：

对任意两个事件A、B，只要P（A）>0，就有：

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A) \qquad (1\cdot7)$$

可推广到：

$$P(A_1A_2\cdots\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1}) \qquad (1\cdot8)$$

〔例1·5〕一盒中装有a个红球，b个白球，每次摸出一个球，看过它的颜色后，仍放回盒中，并加进与这个球颜色相同的球c个，求接连三次都摸到红球的概率。

解：设A＝"第i次摸到红球"（i=1，2，3）。根据古典概率的定义和条件概率的意义，有

$$P(A_1)=\frac{a}{a+b},\quad P(A_2/A_1)=\frac{a+c}{a+b+c}$$

$$P(A_3/A_1A_2)=\frac{a+2c}{a+b+2c}$$

由乘法公式，得所求的概率为：

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)$$

$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+c}{a+b+c}\cdot\frac{a+2c}{a+b+2c}$$

一般地，在实际问题中，$P(B/A)$与$P(AB)$这两概率，应根据问题的实际意义，先求出其中的一个，然后，再利用条件概率公式或乘法公式求出另一个。

六、事件的独立性

设有甲、乙两个工厂，它们的工作互不影响。已知甲厂出现次品（记为A）的概率为0.05，乙厂出现次品（记为B）的概率为0.04，由于乙厂是否出现次品或出现次品的多少与甲厂是否出现次品无关，所以在甲厂出现次品的条件下，乙厂出现次品的概率仍为0.04，即

$$P(B/A)=P(B)$$

在这种情况下，称随机事件B独立于随机事件A。

若事件B独立于事件A，则乘法公式有

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P(B) \tag{1·9}$$

如果$P(B)>0$，则有

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A) \tag{1·10}$$

于是事件A独立于事件B，称这两个事件互相独立。

一般把满足$P(AB)=P(A)P(B)$的两个事件A、B称为相互独立的两个事件。

事件的独立性与互斥性是两回事，互斥性表明两个事件不能同时发生，而独立性，则表明它们彼此不影响。对于互斥事件，加法定理有简化公式；对于独立事件，乘法定理有简化公式。

七、全概率公式与贝叶斯公式

（一）互斥完备事件组

设随机试验E的样本空间为Ω，B_1、B_2，……B_n为一组事件，若这组事件满足以下两条件：

（1）$B_iB_j=\phi$　（$i\neq j$）

（2）$B_1\cup B_2\cup\cdots\cdots\cup B_n=\Omega$

则称事件组B_1，B_2，……B_n为一互斥完备事件组。如掷一颗骰子，观察其点数，为一随机试验E，它的样本空间为$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，则事件组：$B_1=\{5\}$，$B_2=\{1, 2, 6\}$，$B_3=\{3, 4\}$，为一互斥完备事件组，而事件组$B_1=\{2, 3, 4, 6\}$，$B_2=\{1, 5, 6\}$，不是一个互斥完备事件组，因它不满足条件(i)，事件组$B_1=\{2, 3, 4\}$，$B_2=\{1\}$，也不是一个互斥完备事件组，因为不满足条件（ii）。

（二）全概率公式

设随机试验E的样本空间为Ω，B_1、B_2……B_n为一互斥完备组，$P(B_i)>0$（$i=1, 2, \cdots\cdots n$），A为任一事件，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i) \qquad (1\cdot 11)$$

证：根据事件组B_1、B_2，……B_n的完备性，有：

$A=A\Omega=A(B_1\cup B_2\cup\cdots\cdots\cup B_n)=AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cdots AB_n$