166

自然科学基础系列教材

工科大学数学教程

# 工科数学分析

偏理·上册

主　编　包革军
副主编　张传义　张　彪
主　审　杨克劲

哈尔滨工业大学出版社
哈尔滨

**内　容　简　介**


本书是以前国家教委1995年颁布的高等工业学校本科高等数学课程教学基本要求为纲，针对本、硕连读生和对数学有较高要求的非数学专业本科生，吸取了我校多年来教材建设的特色及教学经验而编写的工科数学分析课程教材。

工科数学分析(上册)共六章，主要内容有：极限与函数、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分和微分方程。本教材在课程结构上，加强了那些有较深远影响的基本概念、理论和方法，如极限概念、中值定理、泰勒公式、函数可积性准则等等。书中每节后都附有适量的习题，其中有些习题综合性较强，有一定难度。

本书可作为理工科院校非数学专业工科数学分析课程教材，也可作为准备考研人员和工程技术人员的参考书。



**工科数学分析**

Gongke Shuxue Fenxi

偏理·上册

主　编　包革军

副主编　张传义　张彪

主　审　杨克劭

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

哈尔滨市工大节能印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/16　印张 16.5　字数 421 千字

2000 年 5 月第 1 版　2001 年 5 月第 2 次印刷

印数 2 001～6 000

ISBN 7-5603-1542-9/O·112　定价(上下册) 48.00 元

(本册 22.50 元)

# 前　言

培养基础扎实、勇于创新型人才，历来是大学教育的一个重要目标，随着知识经济时代的到来，这一目标显得更加突出，在工科大学教育中，数学课既是基础理论课程，又在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用。为适应培养21世纪工程技术人才对数学的要求，我们按照原国家教委关于系列课程改革的精神，多年来在数学教学改革方面进行了探索，取得一定的成效，在此基础上，编写了这套教材，其中包括《工科数学分析（上下册）》、《线性代数与空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《计算方法》、《数学实验》及针对本、硕连读生和对数学有较高要求的非数学专业本科生的《工科数学分析（上下册）》、《线性代数与空间解析几何》。这套教材是参照原国家教委1995年颁布的高等工业学校本科各门数学课程教学基本要求和1997年研究生入学考试大纲编写的。为满足不同专业、不同层次学生的需要，这套教材适当增加了部分内容，对学生能力的要求也有所提高。

本教材的编写力求具有以下特色：

1. 将各门课程的内容有机结合、融会贯通，既保证了教学质量的提高，又压缩了教学时数。

2. 重视对学生能力的培养，注意提高学生基本素质。对基本概念、理论、思想方法的阐述准确、简洁、透彻、深入。取材上，精选内容，突出重点，强调应用，注意奠定学生创新能力的基础。

3. 例题和习题丰富，特别是综合性和实际应用性的题较多，有利于学生掌握所学内容，提高分析问题和解决问题的能力。

4. 以简介和附录的形式为学生展望新知识留下窗口，以开阔学生的视野，为进一步拓宽数学知识指出方向。

本教材主要由哈尔滨工业大学数学系各教研室教师编写，东北电力学院、黑龙江科技学院、鞍山师范学院、大庆石油学院等学校的教师参加了部分章节的编写工作，哈尔滨工业大学数学系富景隆、杨克劭、曹彬、戚振开、薛小平五位教授分别审阅了教材的各部分内容，提出了许多宝贵意见。

由于编者水平有限，教材中缺点和疏漏在所难免，恳请读者批评指正。

**哈尔滨工业大学工科数学教材编写委员会**

2000年5月

# 第一章　极限与函数

数学分析研究的对象是函数，而极限是研究函数的主要工具。本章要建立极限理论，研究函数的连续性及闭区间上连续函数的性质，所有这些，都是在实数范围内进行的，都是以实数理论作为基础。因此，首先介绍实数系。

## 1.1　集合与实数系

### 1.1.1　集合和映射

为了今后学习方便，首先，简要地介绍一般集合论的基本知识。

把具有某种性质的对象的全体，称为集合，简称集。称组成集合的每个对象为集合的元素。习惯上，用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 等表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 等表示元素。若元素 $a$ 属于集合 $A$，则记为 $a\in A$；否则，记为 $a\notin A$，称 $a$ 不属于 $A$。不含任何元素的集合，称为空集，记为 $\Phi$。若 $A$ 仅含有限个元素，则称 $A$ 为有限集，或 $A$ 是有限的；否则，称 $A$ 是无限集，或 $A$ 是无限的。

若 $A$ 的元素都是 $B$ 的元素，则称 $A$ 是 $B$ 的子集，或 $B$ 包含 $A$，记为 $A\subset B$，或 $B\supset A$。若 $A\subset B$ 且 $A\supset B$，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记为 $A=B$。若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，$A\neq\Phi$，则称 $A$ 是 $B$ 的真子集。

若集合 $A$ 是具有某性质 $P$ 的元素所组成，一般地，用

$$A=\{a:a\ \text{具有性质}\ P\}$$

表示。

设 $A$ 与 $B$ 是两集合，可以通过下述四种方式，得出四个新的集合：

(1) 并：$A\cup B=\{a:a\in A,\text{或}\ a\in B\}$；

(2) 交：$A\cap B=\{a:a\in A\ \text{且}\ a\in B\}$；

(3) $A$ 与 $B$ 的差：$A\backslash B=\{a:a\in A\ \text{且}\ a\notin B\}$；

(4) 在某些理论和应用中，往往仅考虑某一确定集合 $X$ 的元素及其子集 $A,B,C,\cdots$ 等，此时，$X\backslash A$ 称为 $A$ 的补集，或余集，记为 $A^C$，即

$$A^C=\{a:a\in X\ \text{且}\ a\notin A\}$$

若 $A\cap B\neq\Phi$，则称 $A$ 与 $B$ 有非空交。若 $A\neq\Phi$，则称 $A$ 为非空集。

**【定义 1.1】** 设 $X$ 和 $Y$ 是两个非空集。如果有一个对应关系（或法则）存在，对于 $X$ 中的每一元素 $x$，有 $Y$ 中惟一的一个元素 $y$ 与之对应，则称给出了一个从 $X$ 到 $Y$ 的映射 $f$，记作 $f:X\to Y$，并写成 $y=f(x)$，或 $f:x\mapsto y$，表示 $f$ 把 $x$ 映成 $y$；称 $y$ 是 $x$ 在映射 $f$ 下的像；称 $X$ 是 $f$ 的定义域；称集合 $f(X)=\{f(x):x\in X\}$ 为 $f$ 的值域。

若 $f:X\to Y$ 及 $g:Y\to Z$，则由 $h(x)=g(f(x))$ 所确定的映射 $h:X\to Z$ 称为 $f$ 和 $g$ 的复合映射，以 $h=g\circ f$ 表示之（图 1.1）。

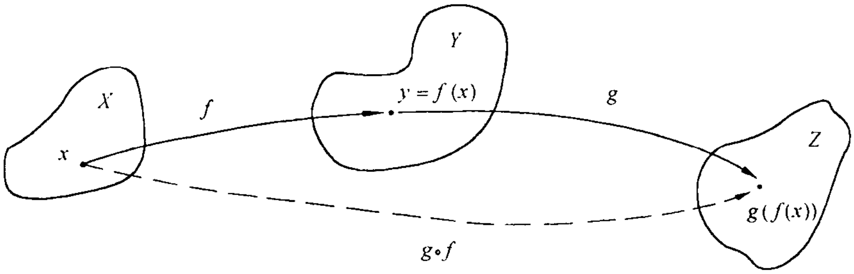
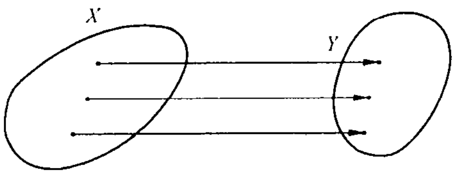


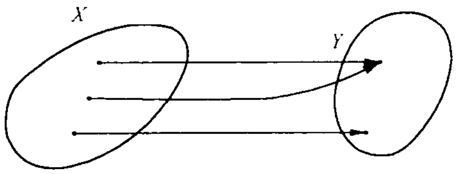

图 1.1

若在上述定义中，$X$ 与 $Y$ 都是数的集合，则称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的函数，这便是我们在中学所熟悉的函数的定义；在复合的情况下，便是复合函数的定义。

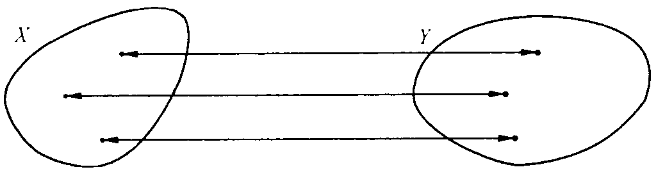
对映射 $f:X\to Y$，当 $f(X)=Y$ 时，称 $f$ 是由 $X$ 到 $Y$ 上的映射或满射；如果对 $X$ 中所有不同的两元素 $x_1$、$x_2$，均有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 $f$ 为单射；如果 $f$ 是满射又是单射，则称 $f$ 为 $X$ 到 $Y$ 上的一一对应(图 1.2)，也称 $X$ 与 $Y$ 一一对应。




(a) 单射




(b) 满射




(c) $X$ 到 $Y$ 上的一一对应

图 1.2

在单射的情况下，由 $f$ 可导出一个从 $f(X)$ 到 $X$ 的映射，称为 $f$ 的逆映射，记为 $f^{-1}$，即若 $y=f(x)$，则 $x=f^{-1}(y)$。若 $f$ 是一函数，则 $f^{-1}$ 便是其反函数。

### 1.1.2 实数系

以数为元素的集合称为数集。

我们约定：自然数是指正整数。自然数的集合记为 $\mathbf{N}$。整数是指正整数、负整数和零、整数的集合记为 $\mathbf{Z}$。有理数是一切形如 $\dfrac{P}{q}$ 的数，其中 $P\in\mathbf{Z}$，$q\in\mathbf{N}$，$P$ 与 $q$ 互素。有理数集记为 $\mathbf{Q}$。实数是有理数和无理数(无限不循环小数)的统称。实数集又称为实数系，记为 $\mathbf{R}$。

如无特殊指明，本书所有的数都是实数。

取定了原点、长度单位和方向的直线称为数直线或数轴。每一个实数，在数轴上有惟一的

点与之对应。反过来，每个数轴上的点，代表了惟一的一个实数。这种对应关系，就有理数来讲，在数轴上很容易建立相应的对应点(有理点)；随着对实数理论的逐步阐述，读者会对无理数的对应含义有深入的理解。

今后，我们对实数和数轴上的点不加区别。

实数集区别于许多其它集合的一个显著特点是有序性：任意两个相异的实数 $a,b$ 都可以比较大小，$a<b$ 或 $a>b$；在数轴上，$a$ 位于 $b$ 的左侧或右侧。

设 $a,b\in\mathbf{R}$，$a<b$。下述集合是今后经常用到的。

开区间：$(a,b)=\{x:a<x<b\}$

闭区间：$[a,b]=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$

半无穷区间：$(a,\infty)=\{x:x>a\}$

$[a,+\infty)=\{x:x\geqslant a\}$

$(-\infty,b)=\{x:x<b\}$

$(-\infty,b]=\{x:x\leqslant b\}$

类似地，还有 $[a,b)$，$(a,b]$ 及 $(-\infty,+\infty)$。

设 $\delta>0$，称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x:|x-x_0|<\delta\}$ 为点 $x_0$ 的 $\delta$-邻域，记为 $U(x_0,\delta)$，它是以 $x_0$ 为中心、长为 $2\delta$ 的开区间(图 1.3)。有时，我们不关心 $\delta$ 的大小，常用“邻域”或“$x_0$ 附近”代替 $x_0$ 的 $\delta$-邻域，记为 $U(x_0)$。

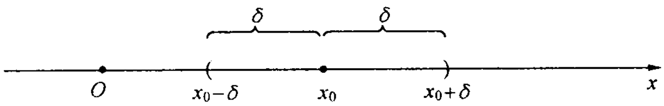



图 1.3

称集合 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x:0<|x-x_0|<\delta\}$ 为 $x_0$ 的去心 $\delta$-邻域，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$。

我们知道，有理数的和、差、积、商仍为有理数(当然 0 不准用作除数)，从而使 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 中稠密：任意的 $x_0\in\mathbf{R}$ 及任意的 $\delta>0$，邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 必含一个(因而无数多个)有理数。事实上，取 $p,q\in\mathbf{Q}$，使 $p\leqslant x_0-\delta$，$x_0\leqslant q$，则 $p$ 与 $q$ 的算术平均 $(p+q)/2$ 是严格介于 $p$ 与 $q$ 的有理数，另言之，$p$ 与 $q$ 的二等分点是有理点。若将闭区间 $[p,q]$ 三等分，则每一等分点都是有理数。如此等分下去，则总有一个(因而无数多个)等分点落在开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 中。

同理，无理数也在 $\mathbf{R}$ 中稠密。

**【定义 1.2】** 对数集 $A$，若有常数 $M(m)$，使得对任意的 $x\in A$，有

$$x\leqslant M \quad (x\geqslant m)$$

则称 $A$ 为有上(下)界，并称 $M(m)$ 是 $A$ 的一个上(下)界。

既有上界又有下界的数集称为有界数集，否则称为无界数集。

显然，若一数集有上(下)界，则必有无数多个上(下)界。事实上，凡是大于(小于)上(下)界 $M(m)$ 的数，都是上(下)界。在数轴上看，凡是位于 $M(m)$ 右(左)侧的点都是上(下)界。但是，最小(大)的上(下)界却只能有一个。我们把实数系的这一重要事实表述成一条公理。

**【公理】** 任何非空的有上界的实数集 $A$，必存在最小上界；称此最小上界为 $A$ 的上确界，记为 $\sup A$。

注意，公理所说的上确界未必属于 $A$。例如，$A=\{x:x\in\mathbf{Q},x^2<2\}$是有上界的，上确界显然是 $\sqrt{2}$，但 $\sqrt{2}\notin A$。

若 $A$ 的上确界属于 $A$，则称 $A$ 为上确界可达。此时，上确界显然便是 $A$ 中最大的数。

显然，$\mu=\sup A$ 等价于：

(1)对 $A$ 中的每一个 $x$，有 $x\leqslant\mu$；

(2)对于任意小的正数 $\varepsilon$，都存在属于 $A$ 的 $x_0$，使 $x_0>\mu-\varepsilon$。

(1)是说 $\mu$ 是 $A$ 的一个上界，(2)则说 $\mu$ 是 $A$ 的最小上界。

关于有下界的数集，由公理很容易得出下面的结果。

**【定理 1.1】** 任何有下界的非空实数集 $A$，必存在最大下界，称为 $A$ 的下确界，记为 $\inf A$。

实数 $a$ 的绝对值 $|a|$，在数轴是点 $a$ 与 0 的距离

$$|a|=\begin{cases} a & a>0 \\ 0 & a=0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

从绝对值的定义可以直接证明，对任何 $a,b\in\mathbf{R}$，有下述三角不等式成立

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,\ \big||a|-|b|\big|\leqslant|a-b|$$

从而也就有

$$|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$$

其中 $c$ 是任意的实数。

## 习 题 1.1

1. 证明下列集合等式

(1) $A\cup B=B\cup A$

(2) $A\cap B=B\cap A$

(3) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

(4) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

2. 设 $X=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,4\}$，$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$。确定下面的集合

(1) $A\cup B$　　(2) $A\cap B$　　(3) $C\backslash A$　　(4) $A^C$

3. 设 $f:x\mapsto x^2+1,x\in\mathbf{R}$，$g:y\mapsto\sqrt{y}$，$y\in(0,+\infty)$。试求 $g\circ f$ 与 $f\circ g$ 的定义域，并求$g\circ f$ 与 $f\circ g$。

4. 用 $\mathbf{R}^2$ 表示 $xy$ - 平面。称映射 $p:(x,y)\to x$ 为 $\mathbf{R}^2$ 到 $x$ 轴的投影，问 $p$ 是否为单射或满射。

5. 凡与 $\mathbf{N}$ 一一对应的集合称为可数无限集，简称可数集。证明：

(1) 正偶数集与正奇数集都是可数集；

(2) 整数集 $\mathbf{Z}$ 是可数集。

6. 设 $f:A\to B$ 与 $g:B\to C$ 都是到上的一一对应，证明：

(1) $g\circ f$ 也是到上的一一对应；(2) $(g\circ f)^{-1}=(f^{-1})\circ(g^{-1})$。

7. 设 $A=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$，求 $\sup A$，$\inf A$，问上、下确界是否可达？

8. 证明：$A$ 为有界数集等价于：存在 $M>0$，使任意 $x\in A$，有 $|x|\leqslant M$。

9. 设 $A,B\subset\mathbf{R}$ 是非空有界集，证明：

若 $A\subset B$，则 $\inf B\leqslant\inf A\leqslant\sup A\leqslant\sup B$。

10. 设 $A\subset\mathbf{R}$ 是非空有界集，令 $-A=\{x:-x\in A\}$，则 $\inf A=-\sup(-A)$ 和 $\sup A=-\inf(-A)$。

11. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，证明三角不等式成立：

(1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$；(2) $|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$。

## 1.2 数列与极限

所谓数列是指按先后顺序列出的一数串

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

简记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\{a_n\}$。数列中的每个数称为数列的项，具有代表性的第 $n$ 项 $a_n$ 称为数列的通项。

数列 $\{a_n\}$ 也可看成映射 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$，其中 $a_n=f(n)$。

我们研究数列，主要是研究数列的项，即随着 $n$ 的增大，看其变化趋势。例如，考查下列数列

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots \tag{2.1}$$

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\cdots \tag{2.2}$$

$$1,0,1,0,\cdots,\frac{1-(-1)^n}{2},\cdots \tag{2.3}$$

$$1,\sqrt{2},\cdots,\sqrt{n},\cdots \tag{2.4}$$

数列(2.1)和(2.2)虽然变化的方式很不相同，随着 $n$ 的增大，前者从正的方向逐渐变小，而后者是正负相间地跳动，但两数列随着 $n$ 的无限增加，都与常数 0 无限接近。数列(2.3)是 1 与 0 的简单重复，不会无限接近于任何常数。数列(2.4)随着 $n$ 的增大而越来越大，因而不会趋近于任何常数。在上述四个数列的分析中，我们使用了“$n$ 无限增加”及“与常数无限接近”这些描述性语言，这只是可以理解却含糊不清的语言。为了在数学上精确刻画，给出下面的定义。

**【定义 2.1】** 设 $\{a_n\}$ 为一数列。$a$ 为一个常数，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon \tag{2.5}$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛或收敛于 $a$，并称 $a$ 为 $\{a_n\}$ 的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \qquad 或 \qquad a_n\to a\quad(n\to\infty)$$

不收敛的数列称为发散数列。

数列(2.1)和(2.2)都是收敛数列，其极限都是 0；数列(2.3)和(2.4)都是发散数列。

式(2.5)等价于

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon \tag{2.6}$$

在数轴上，这意味着，对于任意的邻域 $\mathring{U}(a,\varepsilon)$，只可能有有限项(在前 $N$ 项之中)在此邻域之外(图 2.1)。

定义 2.1 用 $\varepsilon$ 和 $N$ 分别对"无限接近"和"无限增大"的含义给予精确地刻画。习惯上，我们称"$\varepsilon-N$"语言。

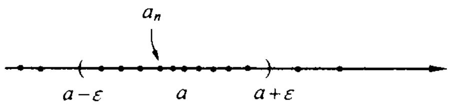



图 2.1

在应用中，还常常遇到证明数列 $\{a_n\}$ 不收敛于 $a$ 的问题。用"$\varepsilon-N$"语言，便应该是：

存在 $\varepsilon_0>0$，对于任意大的 $N\in\mathbf{N}$，总有 $n_N\in\mathbf{N}$，$n_N>\mathbf{N}$，且

$$|a_{n_N}-a|\geqslant\varepsilon_0 \tag{2.7}$$

通过 1.4 节子数列概念的学习，读者会对上述"$\varepsilon-N$"语言描述不收敛于 $a$ 有进一步的理解。

为了书写简便，引进两个符号。$\forall$ 表示"任意"、"全体"或"每一个"；$\exists$ 表示"存在"、"有"。

**【例 2.1】** 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$。

**【证】** 对于 $\forall\ \varepsilon>0$，欲使

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

成立，只须 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$。取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$，这里 $[x]$ 表示小于或等于 $x$ 的最大整数。当 $n>N$ 时，便有

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

由定义 2.1，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$。

**【例 2.2】** 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^a}=0\ (a>0)$。

**【证】** 对于 $\forall\ \varepsilon>0$，欲使

$$\left|\frac{1}{n^a}-0\right|=\frac{1}{n^a}<\varepsilon \quad 或 \quad n^a>\frac{1}{\varepsilon}$$

成立，只须 $n>(\dfrac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{a}}$。取 $N=\left[(\dfrac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{a}}\right]$。当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{1}{n^a}-0\right|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0 \qquad (a>0)$$

**【例 2.3】** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$。

**【证】** 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，对于 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_1$，当 $n>N_1$ 时，有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

而

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|\leqslant$$

$$\left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}\right|+\left|\frac{(a_{N_1+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|<$$

$$\left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}\right|+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\leqslant I+\frac{\varepsilon}{2}$$

其中
$$I=\left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}\right|$$

欲使 $I<\frac{\varepsilon}{2}$，只需 $n>\left|\frac{2\{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\}}{\varepsilon}\right|$。令
$$N_2=\left[\left|\frac{2\{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\}}{\varepsilon}\right|\right]$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，这里 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示括号里 $n$ 个实数的最大一个。当 $n>N$ 时，有 $I<\frac{\varepsilon}{2}$。从而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

**【例 2.4】** 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

我们要证的是只要使 $n$ 充分大，便可使 $|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1$ 任意小。现在令 $h_n=\sqrt[n]{n}-1$。于是 $n^{\frac{1}{n}}=1+h_n$，从而
$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2!}h_n^2+\cdots+h_n^n>\frac{n(n-1)}{2!}h_n^2$$

注意 $n>2$ 时，$n-1>\frac{n}{2}$。所以便有
$$n>\frac{n^2}{4}h_n^2$$

亦即
$$h_n<\frac{2}{\sqrt{n}}$$

这里已经得出了根据 $\varepsilon$ 选取 $N$ 的办法。

**【证】** 对于 $\forall\ \varepsilon>0$，令 $N=\max\{2,[\frac{4}{\varepsilon^2}]\}$，则当 $n>N$ 时，$n>2$ 且 $n>\frac{4}{\varepsilon^2}$。于是
$$|\sqrt[n]{n}-1|=h_n<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

## 习　题　1.2

1. 以下几种叙述与极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的定义是否等价，并说明理由：

(1) $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ n_0\in N$，当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $|a_n-a|\leqslant\varepsilon$。

(2) $\forall\ k\in N$，$\exists\ n_k\in N$，当 $n\geqslant n_k$ 时，有 $|a_n-a|\leqslant\frac{1}{k}$。

(3) 有无限多个 $\varepsilon>0$，对每个 $\varepsilon$，$\exists\ N(\varepsilon)\in N$，当 $n>N(\varepsilon)$，有 $|a_n-a|\leqslant\varepsilon$。

(4) $\forall\ \varepsilon>0$，有无限多个 $a_n$，有 $|a_n-a|<\varepsilon$。

(5) $\forall\ k\in N$，只有有限多个 $a_n$ 位于区间 $(a-\frac{1}{k},a+\frac{1}{k})$ 之外。

(6) $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<b\varepsilon$，其中 $b$ 是一固定的正数。

2. 证明下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1}=\frac{3}{2}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$　　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{2n\cdot(2n+2)}\right]=\frac{1}{4}$

3. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=0$。

4. 证明若$|q|<1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$。

5. 证明若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$，反之是否成立，举例说明。

6. 设数列$\{a_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$。

7. 设$0<a<1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}na^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}n^3a^n=0$。

## 1.3　收敛数列的性质和运算

关于收敛数列的性质，我们总结为下面的三个定理和一个推论。

**【定理 3.1】（惟一性）** 如果数列$\{a_n\}$收敛，则它的极限是惟一的。

**【证】** 设有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$，则对于$\forall\ \varepsilon>0$，存在自然数$N_1$，当$n>N_1$时，有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

同样，存在自然数$N_2$，当$n>N_2$时，有

$$|a_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$。当$n>N$时，有

$$\begin{aligned}|a-b|&\leqslant|a-a_n|+|a_n-b|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

由于$\varepsilon$的任意性，必有$a=b$。从而数列$\{a_n\}$的极限惟一。

**【定理 3.2】（有界性）** 如果数列$\{a_n\}$收敛，则数列有界。

**【证】** 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，对于$\varepsilon=1$，存在自然数$N$，当$n>N$时，有

$$|a_n|-|a|\leqslant|a_n-a|<\varepsilon=1$$

从而，当$n>N$时

$$|a_n|<1+|a|$$

取$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,1+|a|\}$，则

$$|a_n|\leqslant M\qquad n=1,2,\cdots$$

即数列$\{a_n\}$是有界的。

从定理 3.2 知，若数列$\{a_n\}$无界，则该数列必发散。

定理 3.2 的逆命题不成立，即数列$\{a_n\}$有界，未必一定收敛。例如数列$\{(-1)^n\}$有界，但发散。

**【定理 3.3】（保序性）** 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$。

(1) 若$a>b$，则存在$N$，使当$n>N$时，有$a_n>b_n$。

(2) 若存在$N$，当$n>N$时，有$a_n\geqslant b_n$，则$a\geqslant b$。

**【证】** 先证(1)。取$\varepsilon=\frac{a-b}{2}>0$，则存在$N_1$，当$n>N_1$时，有$|a_n-a|<\frac{a-b}{2}$，从而$a_n>a-$

$\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$；同样，存在 $N_2$，当 $n>N_2$ 时，有 $|b_n-b|<\frac{a-b}{2}$，从而 $b_n<b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$；取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时

$$a_n>\frac{a+b}{2}>b_n$$

再用反证法证(2)。如果 $a<b$，则由(1)，$\exists\ N$，当 $n>N$ 时，有 $a_n<b_n$，这与已知矛盾。

**注意** 在定理 3.3(2)中，即使 $a_n>b_n$，也未必有 $a>b$。例如数列$\{\frac{1}{n}\}$和$\{\frac{1}{n^2}\}$。当 $n>1$ 时，$\frac{1}{n}>\frac{1}{n^2}$，但两个数列的极限都是 0。

**【推论】**（保号性） 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\neq0$，则存在 $N$，当 $n>N$ 时，$a_n$ 与 $a$ 同号。

**【证】** 在定理 3.3(1)中，取 $b=0$，即得。

关于收敛数列的运算，我们有下面的定理。

**【定理 3.4】** 如果数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都收敛，则它们的和、差、积、商(分母的极限不为 0)的数列也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n \tag{3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n \tag{3.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\quad(\text{这里}\lim_{n\to\infty}b_n\neq0) \tag{3.3}$$

**【证】** 设

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\qquad\lim_{n\to\infty}b_n=b \tag{3.4}$$

先证式(3.1)。由式(3.4)知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_1$，当 $n>N_1$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$；$\exists\ N_2$，当 $n>N_2$ 时，有 $|b_n-b|<\varepsilon$。取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，有

$$|(a_n\pm b_n)-(a\pm b)|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

即式(3.1)成立。

再证(3.2)。由收敛数列的有界性，存在常数 $M>0$，使

$$|a_n|\leqslant M\qquad n=1,2,\cdots$$

同理取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，有

$$\begin{aligned}|a_nb_n-ab|&\leqslant|a_nb_n-a_nb|+|a_nb-ab|=\\&|a_n||b_n-b|+|a_n-a||b|\leqslant\\&M\varepsilon+|b|\varepsilon=(M+|b|)\varepsilon\end{aligned}$$

即式(3.2)成立。

最后证(3.3)。由于$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq0$，对于$\frac{|b|}{2}>0$，存在 $N_3$，当 $n>N_3$ 时，有

$$|b|-|b_n|\leqslant|b_n-b|<\frac{|b|}{2}$$

从而
$$|b_n|>\frac{|b|}{2}$$

于是
$$\left|\frac{1}{b_n}\right|<\frac{2}{|b|} \tag{3.5}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$。当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|=\frac{1}{|b_nb|}|a_nb-ab_n|\leqslant$$

$$\frac{1}{|b_n|\cdot|b|}[|a_nb-ab|+|ab-ab_n|]=$$

$$\frac{1}{|b_n|\cdot|b|}[|b||a_n-a|+|a||b-b_n|]<$$

$$\frac{2}{b^2}(|b|+|a|)\varepsilon$$

在上式推导中，我们用了式(3.5)。

**【推论】** 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，对于任意常数 $c$

$$\lim_{n\to\infty}c\ a_n=c\lim_{n\to\infty}a_n \tag{3.6}$$

**【证】** 只须取 $b_n=c,n=1,2,\cdots$，由式(3.2)即得式(3.6)。

**【例 3.1】** 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+n+1}{2n^3-5}$。

**【解】** 将分式

$$\frac{3n^3+n+1}{2n^3-5}$$

的分子、分母同除以 $n^3$，再根据定理 3.4，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n+1}{2n^3-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2-\frac{5}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{5}{n^3})}=$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^3}}=\frac{3+0+0}{2-0}=\frac{3}{2}$$

**【例 3.2】** 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$。

**【解】** 由于$\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\dfrac{1}{6}(1+\dfrac{1}{n})(2+\dfrac{1}{n})$，根据定理 3.5，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=\frac{1}{3}$$

## 习　题　1.3

1. 用极限定义证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ (a_n\geqslant 0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$。

2. 下列计算方法是否正确，为什么？

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2})=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})(1+\dfrac{1}{n})\cdots(1+\dfrac{1}{n})=$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})\cdots\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1$$

3. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^2}$ $(|a|<1,|b|<1)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+4n+3}{2n^2+n+1}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})$ (5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2})$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}[1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}]$

*(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n})$

## 1.4 数列收敛的判别定理

到目前为止，我们虽已掌握利用定义 1.3 判定一数列$\{a_n\}$是否收敛的办法，但在许多情况下，还是远远不够的。本节将建立几个判别数列收敛的定理，同时继续 1.2 节的讨论，建立起一套系统的实数理论。

**【定理 4.1】**（两边夹定理） 设有三个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，如果存在自然 $N$，当 $n>N$ 时，有

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=l$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$。

**【证】** 由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=l$，对于$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_1$，当 $n>N_1$ 时，有$|a_n-l|<\varepsilon$，即 $l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon$；$\exists\ N_2$，当 $n>N_2$ 时，有$|c_n-l|<\varepsilon$，即 $l-\varepsilon<c_n<l+\varepsilon$。于是当 $n>\max\ \{N_1,N_2\}$时，有

$$l-\varepsilon<a_n\leqslant b_n\leqslant c_n>l+\varepsilon$$

由此得
$$|b_n-l|<\varepsilon$$
即
$$\lim_{n\to\infty}b_n=l$$

**【例 4.1】** 求证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\ (a>0)$。

**【证】** 注意到存在 $k\in N$，使得 $k>a$。从而当 $n>k$ 时

$$0<\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k}\cdot\frac{a}{k+1}\cdots\frac{a}{n}\leqslant$$

$$\frac{a^k}{k!}\cdot\frac{a}{n}=\frac{a^{k+1}}{k!}\cdot\frac{1}{n}$$

由于
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{k+1}}{k!}\cdot\frac{1}{n}=\frac{a^{k+1}}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

于是由定理 4.1，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

**【例 4.2】** 求证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$。

**【证】** 当 $a>1$ 时，存在 $N>a$。从而当 $n>N$ 时

$$1<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n}$$

由 1.2 节例 2.4，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。再由两边夹定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

当 $0<a<1$ 时，则$\dfrac{1}{a}>1$。因而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}=1$。注意$\sqrt[n]{a}=1/\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1$$

当 $a=1$ 时，显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

**【定义 4.1】** 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n\leqslant a_{n+1}\quad(a_n\geqslant a_{n+1})\qquad n=1,2,\cdots$$

则称该数列是单调增加(减少)；单调增加和单调减少统称为单调。

**【定理 4.2】（单调有界定理）** 单调有界数列必有极限。

**【证】** 为了确定起见，不妨设数列 $\{a_n\}$ 单调增加有界，类似地，可证单调减少有界的情形。

根据公理，将数列 $\{a_n\}$ 看做集合，则上确界必存在，记为

$$\mu=\sup\{a_n\}$$

这等价于：(1) $\forall\ n,a_n\leqslant\mu$，(2) $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ n_0\in N$，使得 $a_{n_0}>\mu-\varepsilon$。由于数列 $\{a_n\}$ 是单调增加的，当 $n>n_0$ 时，有

$$\mu-\varepsilon<a_{n_0}\leqslant a_n\leqslant\mu<\mu+\varepsilon$$

即

$$|a_n-\mu|<\varepsilon$$

也就是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\mu$。

**【例 4.3】** 证明数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 收敛。

**【证】** 首先证明 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 是单调增加数列。由二项式公式

$$\begin{aligned}a_n=&1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}=\\&1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\\&\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})\end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned}a_{n+1}=&1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})+\\&\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})\end{aligned}$$

比较 $a_n$ 和 $a_{n+1}$，后者多最后一项，且 $a_{n+1}$ 的前 $n+1$ 项都不小于 $a_n$ 相应的项，所以 $a_n\leqslant a_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$。

再证 $\{a_n\}$ 有界。在 $a_n$ 的展开式中用 0 代替 $\frac{i}{n}$，便得

$$\begin{aligned}0\leqslant a_n\leqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leqslant 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\\2+\frac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3\end{aligned}$$

即 $\{a_n\}$ 是有界的，由定理 4.2，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在。

以后，我们总用 e 来代表 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$。无论是在理论上还是在实用上，e 这个数都有特殊的重要性。可以证明，e 是一个无理数，一般都取它的五位小数的近似值 2.718 28。以 e 为底的

对数称为自然对数，记为 $\ln x$。

【例 4.4】 设 $a_1=4, a_n=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{2}, n=2,3,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$。

【解】 注意到

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}+\frac{a_n}{2}-a_n=\frac{2-a_n^2}{2a_n}$$

又

$$\frac{a_n}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{2}\right)\geqslant\sqrt{\frac{1}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以

$$a_n\geqslant\sqrt{2}$$

从而 $a_{n+1}-a_n=(2-a_n^2)/2a_n\leqslant 0$。因而数列 $\{a_n\}$ 单调减少且下方有界，由单调有界定理，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，记为 $a$。于是

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{2}\right)$$

得

$$a=\frac{1}{a}+\frac{a}{2}$$

有 $a^2=2, a=\sqrt{2}, a=-\sqrt{2}$（舍去）。故

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$$

由单调有界定理，很容易得到下述重要的定理。

【定理 4.3】 （闭区间套定理） 设有闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$，满足

(1) $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

则存在惟一的点 $l$ 属于所有的 $[a_n,b_n]$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=l$。

【证】 由(1)知，数列 $\{a_n\}$ 单调增加有上界 $b_1$，数列 $\{b_n\}$ 单调减少有下界 $a_1$。因此，由定理 4.2，它们的极限均存在。由(2)

$$0=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty} b_n-\lim_{n\to\infty} a_n$$

即

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$$

设极限为 $l$。由单调有界定理的证明知，$l$ 是 $\{a_n\}$ 的上确界，是 $\{b_n\}$ 的下确界。因此

$$a_n\leqslant l\leqslant b_n \qquad n=1,2,\cdots$$

即 $l\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$。

若还有 $h\in[a_n,b_n](\forall\, n\in\mathbf{N})$，即 $\forall\, n, a_n\leqslant h\leqslant b_n$。由两边夹定理 $l=h$。惟一性得证。

**注意** 定理中关于区间是闭的和区间长度数列的极限是零这两个条件缺一不可。就是说，如果有一个不成立，都不能保证定理的结论成立。请读者自行举例说明。

利用闭区间套定理，可以证明著名的 Bolzano - Weierstrass 定理，也称为致密性定理。为此，我们需要引入子数列的概念。

设 $\{a_n\}$ 是一数列，$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ 是一自然数列，则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为 $\{a_n\}$ 的子数列，简称子列，记作 $\{a_{n_k}\}$。例如，分别由 $\{a_n\}$ 的偶数项和奇数项组成的数列 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 都是 $\{a_n\}$ 的子列。

**注意** $k$ 表示 $a_{n_k}$ 是子列的第 $k$ 项，而 $n_k$ 表示 $a_{n_k}$ 是原数列 $\{a_n\}$ 中的第 $n_k$ 项，因此，$n_k\geqslant k$；并且若 $l>k$，则 $n_l>n_k$。理解 $k$ 与 $n_k$ 的关系，对于理解子列与原数列的关系至关重要，在许多实际

问题中，也是很有益的。作为例子，我们证明：数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是：它的每一个子列均收敛，且收敛于同一极限。

事实上，若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，设$\{a_{n_k}\}$是其任一子列。对于$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当$n>N$时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

由于当$k>N$时，有$n_k\geqslant k>N$，所以

$$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$$

即$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=a$。

反过来，若每一子列均收敛，$\{a_n\}$可看做其本身的一个子列，故有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$。

根据这一命题，若数列$\{a_n\}$有一个子列不收敛，则该数列发散；若有两个子列不收敛于同一数，则该数列也发散。例如$\{(-1)^n\}$便是发散数列。

**【定理 4.4】（Bolzano-Weierstrass 定理）** 有界数列必有收敛子列。

**【证】** 若数列$\{a_n\}$只是有限个数的重复，则其中必有一数重复无限次，设此数为$x_0$，则数列$\{a_n\}$中取$x_0$的项是一子列，此子列收敛于$x_0$。

以下设$\{a_n\}$中有无限多个互不相同的项。

由于数列$\{a_n\}$有界，取$x_1<y_1$，使得$\{a_n\}\subset[x_1,y_1]$，并任取$a_{n_1}$。二等分$[x_1,y_1]$得两个闭子区间，则必有一个，记为$[x_2,y_2]$，含有$\{a_n\}$中无限个互不相同的项（如果两子区间都是如此，则任选一个）。任取$a_{n_2}\in[x_2,y_2]\cap\{a_n\}$，使$n_2>n_1$。如此无限地等分下去，得一闭区间列$\{[x_k,y_k]\}$及子列$\{a_{n_k}\}$，$a_{n_k}\in[x_k,y_k]\cap\{a_n\}$，由于

(1) $[x_1,y_1]\supset[x_2,y_2]\supset\cdots\supset[x_k,y_k]\supset\cdots$

(2) $\lim\limits_{k\to\infty}(y_k-x_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{y_1-x_1}{2^{k-1}}=0$

满足闭区间套定理的条件，存在$l$使得$\lim\limits_{k\to\infty} x_k=\lim\limits_{k\to\infty} y_k=l$。由于

$$x_k\leqslant a_{n_k}\leqslant y_k \qquad n=1,2,\cdots$$

由两边夹定理知，$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=l$。

我们知道，收敛数列必有界，而有界数列却未必收敛。Bolzano-Weierstrass 定理告诉我们，有界数列必有收敛子列。在几何上，收敛实质上是向极限点无限密集。对于有界数列而言，可能不会整个数列向某点密集，但一定存在向其密集的子点列。显然，密集是指点与点之间的距离无限变小。收敛数列当$n$充分大以后，点与点之间的距离可以任意小。反过来也是对的，这便是下面著名的准则。

**【定理 4.5】柯西(Cauchy1787～1857 法国数学家)收敛准则** 数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，当$m,n>N$时，有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon \tag{4.1}$$

**【证】 必要性** 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$。则$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当$n>N$时，有$|a_n-a|<\varepsilon/2$。于是当$n,m>N$时，就有

$$|a_m-a_n|\leqslant|a_m-a|+|a-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

**充分性** 首先证$\{a_n\}$是有界的。取$\varepsilon=1$，由假设存在$N$，使$n$、$m>N$时，$|a_n-a_m|<1$。特别是$n>N$时，$|a_n-a_{N+1}|<1$。从而

$$|a_n|<|a_{N+1}|+1 \qquad (n>N)$$