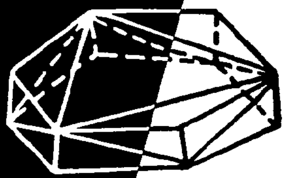

谈谈与蜂房结构有关的数学问题

华 罗 庚

北 京 出 版 社

谈谈与蜂房结构有关的数学问题

华 罗 庚

北 京 出 版 社

每届中学生数学竞赛之前，北京市中学生数学竞赛委员会都要邀请一些著名数学家为中学生数学爱好者作辅导报告。这些报告深受广大师生的欢迎。特把它们编成《北京市中学生数学竞赛辅导报告汇集》，予以出版。

本书是华罗庚同志为北京市 1978 年中学生数学竞赛所作的辅导报告。1963 年和 1964 年曾以此稿给一些中学教师作过讲演，并曾在《江苏教育》上发表。

谈谈与蜂房结构有关的数学问题
华 罗 庚
•
北 京 出 版 社 出 版
北京市新华书店发行
北 京 印 刷 一 厂 印 刷
•
787×1092 毫米 32 开本 1.5 印张 29,000 字
1979 年 1 月第 1 版 1979 年 1 月第 1 次印刷
印数1— 100,000
书号：7071·575 定价：0.13 元

目　录

小　　引

人类识自然，
探索穹研，
花明柳暗别有天，
谲诡神奇满目是，
气象万千。

往事几百年，
祖述前贤，
瑕疵讹谬犹盈篇，
蜂房秘奥未全揭，
待咱向前。

楔　　子

先谈谈我接触到和思考这问题的过程．始之以“有趣”．在看到了通俗读物上所描述的自然界的奇迹之一——蜂房结构的时候，觉得趣味盎然，引人入胜．但继之而来的却是“困惑”．中学程度的读物上所提出的数学问题我竟不会，或说得更确切些，我竟不能在脑海中想象出一个几何模型来，当然我更不能列出所对应的数学问题来了，更不要说用数学方法来解决这个问题了！在列不出数学问题，想象不出几何模型的时候，咋办？感性知识不够，于是乎请教实物，找个蜂房来看看．看了之后，了解了，原来如此，问题形成了，因而很快地初步解决了．但解法中用了些微积分，因而提出一个问题，能不能不用微积分，想出些使中学同学能懂的初

等解法．这样就出现了本文的第五节“浅化”（在这段中还将包括南京师范学院附中老师和同学给我提出的几种不同解法．这种听了报告就动手动脑的风气是值得称道的）．问题解得是否全面？更全面地考虑后，引出一个“难题”．这难题的解决需要些较高深或较繁复的数学．在本文中我作了些对比，以便看出蜂房的特点来．

在深入探讨一下之后发现，容积一样而用材最省的尺寸比例竟不是实测下来的数据，因而使我们怀疑前人已得的结论，因而发现问题的提法也必须改变，似乎应当是：以蜜蜂的身长腰围为准，怎样的蜂房才最省材料．这样问题就更进了一步，不是仅仅乎依赖于空间形式与数量关系的数学问题了，而是与生物体统一在一起的问题了，这问题的解答，不是本书的水平所能胜任的．

问题看清了，解答找到了．但还不能就此作结，随之而来的是浮想联翩．更丰富更多的问题，在这小册子上是写不完的，并且不少已经超出了中学生水平．但在最后我还是约略地提一下，写了几节中学生可能看不懂的东西，留些咀嚼余味罢！

总之，我做了一个习题．我把做习题的源源本本写下来供中学同学参考，请读者指正．

§1 有　　趣

我把我所接触到的通俗读物中有关蜂房的材料摘引几条（有些用括号标出的问句或问号是作者添上的）．

如果把蜜蜂大小放大为人体的大小，蜂箱就会成为一个悬挂在几乎达20公顷的天顶上的密集的立体市镇.

一道微弱的光线从市镇的一边射来，人们看到由高到低悬挂着一排排一列列五十层的建筑物.

耸立在左右两条街中间的高楼上，排列着薄墙围成的既深又矮的，成千上万个六角形巢房.

为什么是六角形？这到底有什么好处？十八世纪初，法国学者马拉尔琪曾经测量过蜂窝的尺寸，得到一个有趣的发现，那就是六角形窝洞的六个角，都有一致的规律：钝角等于109°28′，锐角等于70°32′.（对吗？）

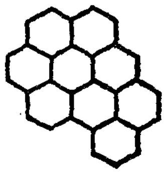

图 1

难道这是偶然的现象吗？法国物理学家列奥缪拉由此得到一个启示，蜂窝的形状是不是为了使材料最节省而容积最大呢？（确切的提法应当是，同样大的容积，建筑用材最省；或同样多的建筑材料，造成最大容积的容器.）

列奥缪拉去请教巴黎科学院院士瑞士数学家克尼格．他计算的结果，使人非常震惊．因为他从理论上的计算，要消耗最少的材料，制成最大的菱形容器（？），它的角度应该是109°26′和70°34′．这与蜂窝的角度仅差2分.

后来，苏格兰数学家马克劳林又重新计算了一次，得出的结果竟和蜂窝的角度完全一样．后来发现，原来是克尼格计算时所用的对数表（？）印错了！

小小蜜蜂在人类有史以前所已经解决的问题，竟要十八世纪的数学家用高等数学才能解决呢！

这些是多么有趣的描述呀！“小小蜜蜂”，“科学院院士”，“高等数学”，“对数表印错了”！真是引人入胜的描述呀！启发人们思考的描述呀！

诚如达尔文说得好：“巢房的精巧构造十分符合需要，如果一个人看到巢房而不备加赞扬，那他一定是个糊涂虫.”自然界的奇迹如此，人类认识这问题的过程又如此，怎能不引人入胜呢！

§2 困　惑

是的，真有趣．这个十八世纪数学家所已经解决的问题，我们会不会？如果会，要用怎样的高等数学？大学教授能不能解？大学高年级学生能不能解？我们现在是二十世纪了，大学低年级学生能不能解？中学生能不能解？且慢！这到底是个什么数学问题？什么样的六角形窝洞的钝角等于$109°28'$，锐角等于$70°32'$？不懂！六角形六内角的和等于$(6-2)\pi=4\pi=720°$，每个角平均$120°$，而$109°28'$与$70°32'$都小于$120°$，因而不可能有这样的六角形．

既说“蜂窝是六角形的”，又说“它是菱形容器”，所描述的到底是个什么样子？六角形和菱形都是平面图形的术语，怎样用来刻划一个立体结构？不懂！

困恼！不要说解问题了，连个蜂窝模型都摸不清．问题钉在心上了！这样想，那样推，无法在脑海形成一个形象来．设想出了几个结构，算来算去，都与事实不符，找不出这样的角度来．这还不只是数学问题，而必须请教一下实物，看

看蜂房到底是怎样的几何形状，所谓的角到底是指的什么角！

§3 访　实

解除困恼的最简单的办法是撤退．是的，我们有一千个理由可以撤退，象这是已经解决了的问题呀！这不是属于我们研究的范围内的问题呀！这还不是确切的数学问题呀！这些理由中只要有一个抬头，我们就将失去了一个锻炼的机会．一千个理由顶不上一个理由，就是不会！不会就得想，就得想到水落石出来．空间的几何图形既然还属茫然，当然就必须请教实物．感谢昆虫学家刘崇乐教授，他给了我一个蜂房，使我摆脱了困境．

画一支铅笔怎样画？是否把它画成为如图 2 那样？

图 2

有人说这不象，我说很象．我是从近处正对着铅笔头画的．这是写实，但是并不足以刻划出铅笔的形态来．我们的图 1（和§1 的说明）就是用“正对铅笔头的方法”画出来的，当然没有了立体感，更无法显示出蜂房内部的构造情况．

看到了实物，才知道既说“六角”又说“菱形”的意义．原来是，正面看来，蜂房是由一些正六边形所组成的．既然是正六边形，那就每一角都是 120°，并没有什么角度的问题．

问题在于房底．蜂房并非六棱柱，它的底部都是由三个菱形所拼成的．图 3 是蜂房的立体图．这个图比较清楚些，但还是得用各种分图及说明来解释清楚．说得更具体些，拿一支六棱柱的铅笔，未削之前，铅笔一端的形状是正六角形 $ABCDEF$（图 4）．通过 AC，一刀切下一角，把三角形 ABC 搬置 $AP'C$ 处；过 AE, CE 切如此同样三刀，所堆成的形状就如图 5 那样，而蜂巢就是由两排这样的蜂房底部和底部相接而成的．

因而初步形成了以下的数学问题了：

怎样切出来使所拼成的三个菱形做底的六面柱的表面积最小？

为什么说是“初步”？且待§6、§7 中分解．下节中首先解决这个简单问题．

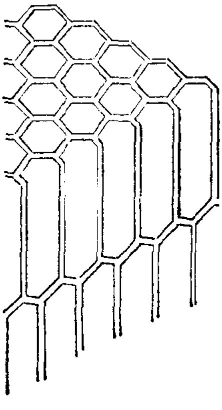

图 3

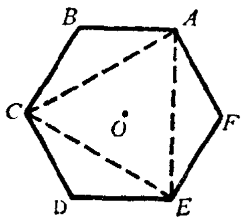

图 4

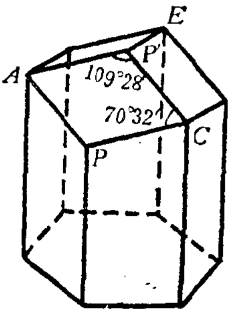

图 5

（读者试利用这机会来考验一下自己对几何图形的空间

想象能力．这样的图形可以排成密切无间的蜂窝．）

§ 4 解　　题

假定六棱柱的边长是 1，先求 AC 的长度．ABC 是腰长为 1，夹角为 120°的等腰三角形．以 AC 为对称轴作一个三角形 $AB'C$（图 6）．三角形 ABB' 是等边三角形．因此，

$$\frac{1}{2}AC=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

即得 $AC=\sqrt{3}$．

把图 5 的表面分成六份，把其中之一摊平下来，得出图 7 的形状．从一个宽为 1 的长方形切去一角，切割处成边

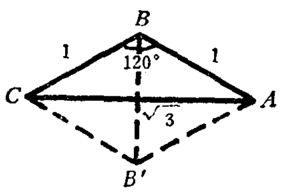

图 6

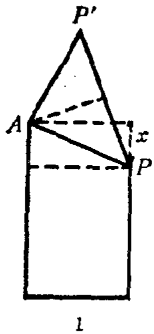

图 7

AP．以 AP 为腰，$\frac{\sqrt{3}}{2}$为高作等腰三角形．问题：怎样切才

能使所作出的图形的面积最小?

假定被切去的三角形的高是 x. 从矩形中所切去的面积等于$\frac{1}{2}x$. 现在看所添上的三角形 APP' 的面积. AP 的长度是$\sqrt{1+x^2}$, 因此 PP'的长度等于

$$2\sqrt{(1+x^2)-\frac{3}{4}}=\sqrt{1+4x^2},$$

因而三角形 APP'的面积等于

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}.$$

问题再变而为求

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}$$

的最小值的问题.

念过微积分的读者立刻可以用以下的方法求解: (没有学过微积分的读者可以略去以下这一段.)

求

$$f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}$$

的微商, 得

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{1+4x^2}}.$$

由 $f'(x)=0$, 解得 $1+4x^2=12x^2$, $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$. 又

$$f''(x)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+4x^2}}-\frac{4\sqrt{3}\,x^2}{(1+4x^2)^{3/2}}=\frac{\sqrt{3}}{(1+4x^2)^{3/2}}>0,$$

因而当 $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$时给出极小值

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)=-\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

这一节说明了当 $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$时取最小值，即在一棱上过 $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$处(图 5 中 P 点)以及与该棱相邻的二棱的端点(图5中 A,C 点)切下来拼上去的图形的表面积最小.

用 γ 表示三角形 APP' 两腰的夹角 $\angle PAP'$. γ 的余弦由以下的余弦公式给出：

$$2(1+x^2)\cos\gamma=2(1+x^2)-(1+4x^2)=1-2x^2,$$

即
$$\cos\gamma=\frac{1-2x^2}{2(1+x^2)}=\frac{3}{8}\Big/\left(1+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{3}.$$

因此得出 $\gamma=70°32'$.

把问题说得更一般些，以边长为 a 的正六边形为底，以 b 为高的六棱柱，其六个顶点顺次以 $ABCDEF$ 标出(图 8). 过 B (或 D 或 F) 棱距顶点为 $\frac{1}{\sqrt{8}}a$ 处及 A,C(或 C, E 或 E, A) 作一平面；切下三个四面体，反过来堆在顶上，得一以三个菱形做底的六棱尖顶柱. 现在算出这六棱尖顶柱的体积和表面积：

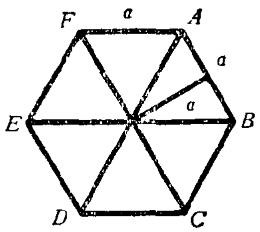

图 8

体积等于以边长为 a 的正六角形的面积乘高b，即

$$6\times\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

乘以 b，即得

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b.$$

表面积等于六棱柱的侧面积 $6\,ab$ 加上六倍的$\frac{1}{\sqrt{8}}a^2$［也就是 $f\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)a^2=\frac{1}{\sqrt{8}}a^2$］，即

$$6\,ab+\frac{6}{\sqrt{8}}a^2=6\,a\left(b+\frac{a}{\sqrt{8}}\right).$$

§5 浅　　化

没有读过微积分的读者不要着急．在我解决了这问题之后，当然就想到了要不要用微积分，能不能找到一个中学生所能理解的解法．有的，而且很不少．

方法一　我们需要用以下的结果（或称为算术中项大于几何中项）．当 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$ 时，常有

$$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab},\tag{1}$$

当 $a=b$ 时取等号，当 $a\neq b$ 时取不等号．这一结论可由不等式

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0 \tag{2}$$

立刻推出．

现在试来解决问题．命 $2x=t-\frac{1}{4t}(t>0)$，则

$$f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{4t}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(t+\frac{1}{4t}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{4}t+\frac{\sqrt{3}+1}{4}\times\frac{1}{4t}.$$

由(1) 得出

$$f(x)\geqslant 2\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{4^3}}=\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

并且知道仅当

$$\frac{\sqrt{3}-1}{4}t=\frac{\sqrt{3}+1}{4}\times\frac{1}{4t}$$

时取等号．即，当

$$4t^2=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2},\quad t=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}};$$

而当 $$x=\frac{1}{2}\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{3})}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{8}}$$

时，$f(x)$取最小值$\frac{1}{\sqrt{8}}$.

方法二 在式子

$$[\lambda(\sqrt{1+4x^2}+2x)^{\frac{1}{2}}-\mu(\sqrt{1+4x^2}-2x)^{\frac{1}{2}}]^2$$

$$=2(\lambda^2-\mu^2)x+(\lambda^2+\mu^2)\sqrt{1+4x^2}-2\lambda\mu\geqslant 0$$

中，取 $2(\lambda^2-\mu^2)=-\frac{1}{2}$， $\lambda^2+\mu^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$，即得

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}\geqslant 2\lambda\mu=\sqrt{(\lambda^2+\mu^2)^2-(\lambda^2-\mu^2)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{4^2}-\frac{1}{4^2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

并且仅当$\lambda^2(\sqrt{1+4x^2}+2x)=\mu^2(\sqrt{1+4x^2}-2x)$时取等号，即

$$(\lambda^2-\mu^2)\sqrt{1+4x^2}+2(\lambda^2+\mu^2)x$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{1+4x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x=0$$

时取等号. 解得 $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$.

方法三 命 $2x=\mathrm{tg}\theta$，则

$$f(x)=\frac{-\frac{1}{4}\sin\theta+\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\cos\theta}=\alpha\times\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}+\beta\times\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\geqslant 2\sqrt{\alpha\beta\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=2\sqrt{\alpha\beta},$$

这儿 $\alpha+\beta=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$-\alpha+\beta=-\frac{1}{4}$，不难由此解得答案.

方法虽是三个，实质仅有一条，转来转去仍然是依据了 $a^2+b^2-2ab=(b-a)^2\geqslant 0$.

南京师范学院附中的老师和同学们又提供了以下的四个证明(方法四至方法七).

方法四 令 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}$,

故
$$y+\frac{1}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2},$$

两边平方并加以整理得

$$x^2-2yx+\frac{3}{8}-2y^2=0. \tag{3}$$

因为 x 为实数，故二次方程(3)的判别式

$$\Delta=y^2-\frac{3}{8}+2y^2=3y^2-\frac{3}{8}\geqslant 0,$$

而 y 必大于 0，因此 y 的最小值是 $\frac{1}{\sqrt{8}}$. 以此代入(3)，则

$x=\frac{1}{\sqrt{8}}$.